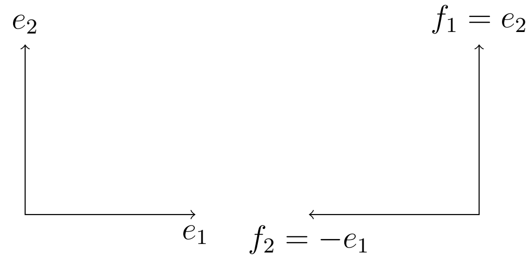
Предпосылки:

1. Закон распределения инвариантен к повороту
2. Координаты в ортогональном базисе независимы
3. Функция совместной плотности непрерывна

Пусть X, Y - случайные величины



- $(X; Y)_e$ - вектор в базисе $\{e_1, e_2\}$
- $(Y; -X)_f$ - вектор в базисе $\{f_1, f_2\}$

Будем считать, что существуют $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$, тогда:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) \\ \mathrm{E}(X) = -\mathrm{E}(Y) \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X) = -\mathrm{E}(X) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0; \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$$

Из 2-ой предпосылки совместная функция плотности случайных величин X, Y:

$$f_{X,Y} = f_X(x) f_Y(y)$$

В силу инвариантности к повороту (1-ая предпосылка) функция плотности зависит только от длины вектора $(X, Y)^T$:

$$f_X(x) = f_Y(x) \quad \Rightarrow \quad X \sim Y \sim (-X)$$

$$\Rightarrow \quad f_X(x) \quad \text{симметрична относительно нуля} \Rightarrow \quad f_X(x) = g(x^2)$$

Пусть $f_{XY}(x,y) = h(x^2 + y^2) = g(x^2)g(y^2)$, рассмотрим $h(x^2 + y^2)$:

$$\ln h(x^2 + y^2) = \ln g(x^2) + \ln g(y^2)$$

$$\ln h(x^2) = \ln g(x^2) + C, \quad \text{где} \quad C = \ln g(0) - \mathrm{const}$$

$$\ln g(x^2) = \ln h(x^2) - C$$

Заметим, что:

$$\ln g(nx^2) = \ln h(nx^2) - C = \ln h((n-1)x^2 + x^2) - C = \ln g((n-1)x^2) + \ln g(x^2) - C =$$

$$= \ln h((n-1)x^2) - C + \ln g(x^2) - C = \ln g((n-2)x^2) + 2\ln g(x^2) - 2C = ... =$$

$$= \ln g(0) + n \ln g(x^2) - nC = n \ln g(x^2) - (n-1)C$$

Пусть $x^2 = a$, тогда функция $\tilde{g}(a) = \ln g(a)$ обладает свойством:

$$\tilde{g}(na) = n\tilde{g}(a) - (n-1)C$$

Тогда:

$$\tilde{g}(na) - C = n\tilde{g}(a) - nC = n(\tilde{g}(a) - C)$$

Предположим, что:

$$\tilde{g}(a) = \ln g(a) = ka + C$$

Покажем, что такая функция удовлетворяет свойствам $\tilde{g}(a)$:

$$\tilde{g}(na) = nka + C = nka + nC - (n-1)C = n(ka - C) - (n-1)C = n\tilde{g}(a) - (n-1)C$$

Тогда:

$$\ln g(x^2) = kx^2 + C$$

$$g(x^2) = e^{kx^2+c} = e^{kx^2}e^C$$

Значит,

$$f_X(x) = e^{kx^2}e^C$$

Из свойств функции плотности найдем C и k:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{kx^2}e^C dx = 1$$

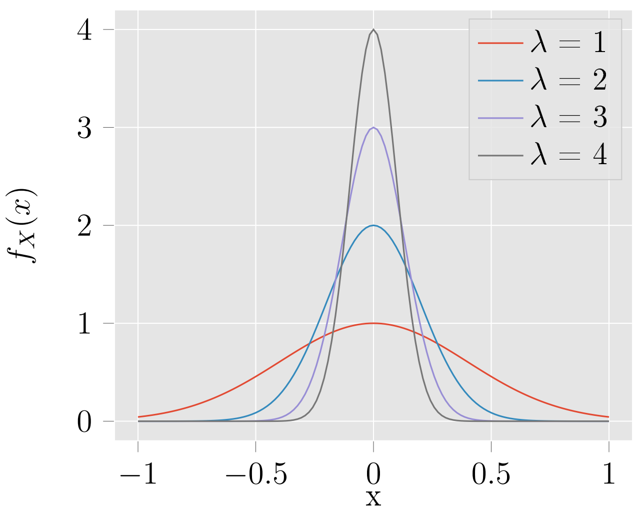
$$e^C \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx^2} dx = e^C \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-k}} = 1$$

$$e^C = \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{\pi}}$$

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{-k}}{\sqrt{\pi}} e^{kx^2}, k < 0$$

Сделаем замену $\lambda = \dfrac{\sqrt{-k}}{\sqrt{\pi}}$, тогда $f_X(x) = \lambda e^{-\pi\lambda^2 x^2}$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\pi\lambda^2 x^2}$$



Таким образом видно, что с ростом λ дисперсия уменьшается.

$$\mathrm{E}(X) = 0 \Rightarrow (\mathrm{E}(X))^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\pi\lambda^2 x^2} dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x \cdot e^{-\pi\lambda^2 x^2} dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = xe^{-\pi\lambda^2 x^2} dx & v = \frac{-1}{2\pi\lambda^2} e^{-\pi\lambda^2 x^2} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \left(uv\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} vdu \right) = \lambda \left(-\frac{x}{2\pi\lambda^2} e^{-\pi\lambda^2 x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\lambda^2} e^{-\pi\lambda^2 x^2} dx \right)$$

Так как e^{x^2} растет быстрее, чем x при $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2\pi\lambda^2} e^{-\pi\lambda^2 x^2} = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{-\pi\lambda^2 x^2}} = 0$$

Тогда:

$$\sigma^2 = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\lambda^2} e^{-\pi\lambda^2 x^2} dx = \frac{1}{2\pi\lambda^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Пусть $Z = X - \mu$, тогда:

$$f(z) = f(x - \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$