

Семинар 3. Принцип Беллмана в дискретном времени

Во всех задачах этой подборки рассматривается двухсекторная модель экономики в дискретном времени, в которой имеется запас некоторого промежуточного товара x_t и конечного продукта y_t . Перераспределение между периодами происходит за счет управления переменной u_t .

Задача 1

Рассмотрим модель экономики, действующую в течение трех периодов, $t \in \{0, 1, 2\}$. Выпуск двух отраслей описывается следующими соотношениями:

$$x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad y_{t+1} = 0.5y_t + u_t, \quad u_t \in [0, x_t], \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0$$

Найдите вектор оптимального управления, при котором достигается максимум $y_0 + y_1 + y_2$.

Задача 2

Пользуясь с принципом Беллмана, решите следующую задачу максимизации y_T при следующих условиях:

$$x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad y_{t+1} = y_t + u_t, \quad u_t \in [0, x_t], \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad x_t \geq 0$$

где $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$.

Задача 3

3.1

Рассмотрим модель экономики, действующую в течение трех периодов, $t \in \{0, 1, 2\}$. Выпуск двух отраслей в экономике описывается следующими соотношениями:

$$x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad y_{t+1} = y_t + u_t, \quad u_t \in [0, x_t], \quad x_0 = 1, \quad y_0 = \frac{3}{4}, \quad y_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 3$$

где $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$. Найдите вектор оптимального управления, при котором достигается максимальный y_2 .

3.2

Допустим, что $u_t \in [0, \alpha x_t]$ и все остальные соотношения такие же, как в 3.1. Найдите значения параметра α , при которых задача максимизации y_2 имеет решение, и решите ее.

Задача 4

Рассмотрим модель экономики, действующую в течение трех периодов, $t \in \{0, 1, 2, 3\}$. Выпуск двух отраслей описывается следующими соотношениями:

$$x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad y_{t+1} = 0.5y_t + u_t, \quad u_t \in [0, x_t]$$
$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 \geq \frac{1}{2}, \quad y_2 \geq 1, \quad x_2 \geq 3$$

Найдите вектор оптимального управления, при котором достигается максимум y_3 .