Задание 1

$(x_i, y_i), i = 1 \dots N, x_i, y_i$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины. $x_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$.

Так как x_i и y_i - независимые случайные величины, их совместная плотность распределения $p_{(x_i, y_i)}(x, y) = p_{x_i}(x) * p_{y_i}(y)$. Таким образом, функция правдоподобия для параметра σ^2 может быть вычислена по формуле:

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2\sigma^2\pi} \exp \frac{-(x_i - \mu_i)^2 - (y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$l(\sigma^2) = \ln L(\sigma^2) = -N \ln 2\sigma^2\pi + \sum_{i=1}^{N} \frac{-(x_i - \mu_i)^2 - (y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$$

Найдем производную $l(\sigma^2)$ и значение σ^2, при которой она равна нулю:

$$\frac{dl}{d\sigma^2} = -\frac{N}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu_i)^2 + (y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^4} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_i)^2 + (y_i - \mu_i)^2$$

Задание 2

$X_i = (x_1, \dots, x_{n_i}), i = 1 \dots N$. X_i состоят из 0 и 1, количество 1 в векторе X_i имеет распределение $Bin(n, p)$. Про X_i известно, были ли в нем единицы:

$$I(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{если в } X_i \text{ есть хоть одна } 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$