Задание 1

$\xi = (\xi_1, \xi_2) \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \Sigma)$, где $\bar{\mu} = (0,0)^T$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.
$\rho = cov(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\left[(\xi_1 - \mathbb{E}\left[\xi_1\right])(\xi_2 - \mathbb{E}\left[\xi_2\right])\right] = \mathbb{E}\left[\xi_1 \xi_2\right]$

(a)
Оценка для ρ по методу моментов:
$\widehat{\rho} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Оценка для ρ по методу максимального правдоподобия:
Плотность данного распределения:
$f_{(\xi_1,\xi_2)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp -\frac{1}{2}(x,y)\Sigma^{-1}(x,y)^T = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp -\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{1-\rho^2}$
Функция правдоподобия для ρ:
$L(\rho) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp -\frac{1}{2}\frac{x_i^2+y_i^2-2\rho x_i y_i}{1-\rho^2}$
$l(\rho) = \ln L(\rho) = \sum_{i=1}^{n} - \ln 2\pi - \frac{1}{2}\left(\ln(1-\rho^2) + \frac{x_i^2+y_i^2-2\rho x_i y_i}{1-\rho^2}\right)$
$\frac{dl}{d\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho}{1-\rho^2} - \frac{\rho(x_i^2+y_i^2)-\rho^2 x_i y_i - x_i y_i}{(1-\rho^2)^2}$
$n\widehat{\rho} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\widehat{\rho}(x_i^2+y_i^2)-(\widehat{\rho}^2+1)x_i y_i}{(1-\widehat{\rho}^2)}$
$n(1-\widehat{\rho}^2) - \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2) + \frac{\widehat{\rho}^2+1}{\widehat{\rho}}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$

(b)
Для многомерного нормального распеделения информация Фишера вычисляется по следующей формуле:
$I(\rho) = \frac{1}{2}tr\left(\Sigma^{-1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho}\right)^2$, где tr - след матрицы.
$I(\rho) = \frac{1}{2}tr\left(\frac{1}{\rho^2-1}\begin{pmatrix} -1 & \rho \\ \rho & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{(\rho^2-1)^2}tr\begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix}^2 = \frac{\rho^2+1}{(\rho^2-1)^2}$
Соответственно, нижняя оценка для дисперсии ρ_n по неравенству Рао-Крамера будет: $\frac{(\rho^2-1)^2}{n(\rho^2+1)}$

Задание 2

(x_i, y_i) - выборка из двумерного нормального распределения, $x_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), y_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), corr(x_i, y_i) = \rho$

$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \xrightarrow[n\to 0]{} \frac{\mathbb{E}[x]}{\mathbb{E}[y]} \neq \mathbb{E}\left[\frac{x}{y}\right]$ при $\rho \in (0,1)$

Если $\rho = 0$, то x и y некоррелированы, а значит, по свойствам многомерного нормального распределения, независимы. Тогда независимы и величины $(x, f(y))$, где f - любая борелевская функция. Функция $1/x$ является борелевской, так как не определена только на множестве меры 0. Таким образом,

x и $\frac{1}{y}$ независимы и $\mathbb{E}\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{\mathbb{E}[x]}{\mathbb{E}[y]}$

Если $\rho = 1$, x и y линейно зависимы, то есть $\exists a, b \in \mathbb{R} : x = ay + b$. Тогда $\mathbb{E}\left[\frac{x}{y}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{ay+b}{y}\right] = a + \frac{b}{\mathbb{E}[y]} = a + \frac{b}{\mu_2} = \frac{\mathbb{E}[x]}{\mathbb{E}[y]}$
Таким образом, при $\rho \in \{0, 1\}$ оценка $\frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ является состоятельной для $\mathbb{E}\left[\frac{x}{y}\right]$, в других случаях - нет.