

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

Расчет запаса устойчивости по норме решения матричного уравнения Ляпунова

Выполнила: Евдокимова Дарья, 21205

Цель работы: рассчитать запасы устойчивости ПИ- и ПИД-регуляторов по норме решения матричного уравнения Ляпунова; сравнить с показателями устойчивости по годографу Найквиста из лабораторной работы 10.4.

Для **непрерывного** случая: см. со стр. 89 пособия

Программа для среды Scilab имеет вид:

```
A=[1 2; 2 1] // матрица дифференциального уравнения;  
I=eye(A) // единичная матрица;  
H=lyap(A,-I,'s') // решение уравнения Ляпунова;  
spes(H) // вычисление спектра H;  
// если в спектре H нет отрицательных значений,  
// то матрица A устойчива
```

Следствие 5. При условии устойчивости матрицы A верны равенства

$$\kappa(A) = \sup_{v(0) \neq 0} \frac{\int_0^\infty v(t)^\top v(t) dt}{v(0)^\top v(0)} = \sup_{v(0) \neq 0} \frac{v(0)^\top H v(0)}{v(0)^\top v(0)} = \|H\|.$$

Вычисление показателя $\kappa(A)$ в Scilab:

```
H=lyap(A,-eye(A),'s') // решение уравнения Ляпунова;  
spes(H) // вычисление спектра решения;  
// если в спектре нет отрицательных значений, то  
карпа=norm(H,2)  
// в противном случае матрица A неустойчива
```

Для **дискретного** случая: см. со стр. 107 пособия

Для анализа устойчивости системы (5.16) ищется решение H дискретного уравнения Ляпунова. Если все собственные числа $\lambda(H)$ строго положительны (т. е. $H > 0$), то система устойчива. Программа для Scilab:

```
Ad=[0.8 0.1; 0.2 0.7] // матрица разностного уравн.;
I=eye(Ad) // единичная матрица;
H=lyap(Ad,-I,'d') // решение дискретн. уравн. Ляпунова;
```

ГЛАВА 5. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

```
спес(H) // вычисление спектра;
// если в спектре H нет отрицательных значений,
// разностное уравнение с матрицей Ad устойчиво
```

Вычисление показателя $\kappa_d(A_d)$ в Scilab:

```
H=lyap(Ad,-eye(Ad),'d') //решение дискретного уравн. Ляпунова;
спес(H) // вычисление спектра решения;
// если в спектре нет отрицательных значений, то
kaprad=norm(H,2)
// в противном случае
// разностное уравнение с матрицей Ad неустойчиво
```

Уравнения Ляпунова:

Непрерывный случай	Дискретный случай
$A^T H + H A = -I$	$A^T_d H_d A_d - H_d = -I$

Для того, чтобы определить, насколько устойчива система используется показатель устойчивости, чем менее устойчиво решение, тем больше его норма

Системы управления с непрерывным временем

ПИ-рег

Код программы

```
n = 5
T0 = 0.91
Ti = 5.5
K = 1.08
T1 = 0

// создание полинома, оператор Лапласа для передаточной функции
s = poly(0, 's')

// вычисление передаточной функции
W_right = 1 / (1 + s * T0)^n
Wleft = K * (1 + (1 / (Ti * s))) * W_right
W = Wleft / (1 + Wleft)
disp('Wleft = ', Wleft)
disp('W = ', W)

// Создание линейной системы на основе передаточной функции
// 'c' - передаточная ф-ия задана в форме коэф-ов полиномов (числитель и знаменатель)
sys_lin = syslin('c', W)
// Извлечение матриц состояний и матрицы передачи D из линейной системы
[A, B, C, D] = abcd(sys_lin)
disp('A = ', A)
disp('B = ', B)
disp('C = ', C)
disp('D = ', D)

// Получение спектра матрицы A (собственных значений)
mat_A_spec = spec(A)
disp('Спектр матрицы A', mat_A_spec)

// Решение уравнения Ляпунова, A - матрица системы
//  $AX + XA^T = C$ ,  $C = -eye(A)$  - отрицательная единичная матрица размером как A
// 'c' - непрерывная система
// H содержит решение (X)
H = lyap(A, -eye(A), 'c')
disp('H = ', H)

// Нахождение собственных векторов H
mat_H_spec = spec(H)
disp('Спектр матрицы H', mat_H_spec)

// Проверка условия устойчивости
if (mat_H_spec > 0) then
    disp('H положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически')
    // показатель устойчивости
    kappa = norm(H, 2)
else
    kappa = %inf
end
disp('kappa(A) = ', kappa)
```

Результат такой:

```
"Н положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически"  
  
"kappa(A) = "  
  
36.352755
```

ПИД-рег

Код программы

```
n = 5  
T0 = 0.91  
Ti = 4.05  
K = 1.35  
T1 = 0  
  
Td = Ti / 4  
Tc = Td / 8  
  
s = poly(0, 's')  
  
Wright = 1 / (1 + s * T0)^n  
Wleft = K * (1 + (1 / (Ti * s)) + ((Td * s)/(Tc * s + 1))) * Wright  
W = Wleft / (1 + Wleft)  
disp('Wleft = ', Wleft)  
disp('W = ', W)  
  
sys_lin = syslin('c', W)  
[A, B, C, D] = abcd(sys_lin)  
disp('A = ', A)  
disp('B = ', B)  
disp('C = ', C)  
disp('D = ', D)  
  
mat_A_spec = spec(A)  
disp('Спектр матрицы A', mat_A_spec)  
  
H = lyap(A, -eye(A), 'c')  
disp('H = ', H)  
  
mat_H_spec = spec(H)  
disp('Спектр матрицы H', mat_H_spec)  
  
if (mat_H_spec > 0) then  
    disp('Н положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически')  
    kappa = norm(H, 2)  
else  
    kappa = %inf  
end  
disp('kappa(A) = ', kappa)
```

Результат:

"Н положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически"

"каппа (A) = "

45.259907

Системы управления с дискретным временем

ПИ-рег

Данные берем при T=1.5

Для ПИ-регулятора					
T1	Kcrit	K = K_H = Kcrit * 0.45	Ткрит	Ти = T_и,Н = Ткрит/1.2	Ошибка
0,00	2,5989	1,1695	8,2600	6,883333333	5,976
1,50	3,3710	1,5170	11,6870	9,739166667	40,198

Код программы

```
T0 = 0.91
n = 5
Ti = 9.739166667
K = 1.5170

// Шаг дискретизации
h = Ti / 100
T1 = 1.5

// Получение передаточной функции
s = poly(0, 's')
exp_decomp = 1 - T1*s + (T1*s)^2/2 - (T1*s)^3/6 + (T1*s)^4/24

Wright = exp_decomp / (1 + s * T0)^n
Wleft = K * (1 + (1 / (Ti * s))) * Wright
W = Wleft / (1 + Wleft)
disp('Wleft = ', Wleft)
disp('W = ', W)

// Создание линейной системы на основе передаточной функции
sys_lin = syslin('c', W)
// Преобразование непрерывной передаточной функции в дискретную форму с заданным
временным шагом h (частота дискретизации системы)
// Получаем дискретную линейную модель передаточной функции W с временным шагом h
sys_discr = dscr(sys_lin, h)

// Нахождение данных, необходимых для уравнения Ляпунова
A_discr = sys_discr.A
E_discr = -eye(A_discr)
```

```

disp('A_discr = ', A_discr)
disp('E_discr = ', E_discr)

// Нахождение собственных чисел матрицы A
mat_A_spec = spec(A_discr)
disp('Спектр матрицы A_discr', mat_A_spec)

// Решение уравнения Ляпунова
// Флаг 'd' говорит о том, что система дискретная
H_discr = lyap(A_discr, E_discr, 'd')
disp('H_discr = ', H_discr)

// Нахождение собственных чисел матрицы - решения уравнения Ляпунова
mat_H_spec = spec(H_discr)
disp('Спектр матрицы H_discr', mat_H_spec)

if (mat_H_spec > 0) then
    disp('H положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически')
    // Получение коэффициента устойчивости
    kappa = norm(H_discr, 2)
else
    kappa = %inf
end
disp('kappa(A_discr) = ', kappa)

```

Результат такой:

```

"Н положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически"

"kappa(A_discr) = "

2354.4729

```

ПИД-рег

Данные берем при T=1.5

Для ПИД-регулятора (покоординатная настройка)					
T1	Kcrit	$K = K_H = K_{crit} * 0.45$	Tкрит	$T_i = T_{и,Н} = T_{крит}/1.2$	Ошибка
0,00	2,4	1,0800	6,6000	5,5	5,626
1,50	2,5	1,1250	9,6000	8	10,449

Код программы

```

T0 = 0.91
n = 5
Ti = 8
K = 1.125
Td = Ti / 4
Tc = Td / 8
T1 = 1.5
h = Ti / 100

```

```

s = poly(0, 's')
exp_decomp = 1 - T1*s + (T1*s)^2/2 - (T1*s)^3/6 + (T1*s)^4/24

Wright = exp_decomp / (1 + s * T0)^n
Wleft = K * (1 + (1 / (Ti * s)) + ((Td * s)/(Tc * s + 1))) * Wright
W = Wleft / (1 + Wleft)
disp('Wleft = ', Wleft)
disp('W = ', W)

sys_lin = syslin('c', W)
sys_discr = dscr(sys_lin, h)

A_discr = sys_discr.A
E_discr = -eye(A_discr)
disp('A_discr = ', A_discr)
disp('E_discr = ', E_discr)

mat_A_spec = spec(A_discr)
disp('Спектр матрицы A_discr', mat_A_spec)

H_discr = lyap(A_discr, E_discr, 'd')
disp('H_discr = ', H_discr)

mat_H_spec = spec(H_discr)
disp('Спектр матрицы H_discr', mat_H_spec)

if (mat_H_spec > 0) then
    disp('H положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически')
    kappa = norm(H_discr, 2)
else
    kappa = %inf
end
disp('kappa(A_discr) = ', kappa)

```

Результат:

```
"H положительно определена. По Th Ляпунова система устойчива асимптотически"
```

```
"kappa(A_discr) = "
```

```
1988.7452
```