

НИУ «МЭИ»
Институт Радиотехники и Электроники им. В. А. Котельникова
Кафедра Радиотехнических Систем

Контрольная работа №1
по курсу «Методы оптимального приёма сигналов в аппаратуре
потребителей СРНС»

Выполнила: Малафеева Д. Д.
Группа: ЭР-12м-19

Москва
2020

Дано:

Выборка сигналов, всего $M=2048$ отсчетов:

$$y_1 = A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) + n_{1,k},$$

$$y_2 = A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) + n_{2,k},$$

$$y_3 = A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) + n_{3,k},$$

$$y_4 = A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) + n_{4,k},$$

$$k \in [0, 2047],$$

$$T = 1/f_s,$$

$$f_s = 47.5 \text{ МГц}.$$

$n_{(1...4),k}$ - независимые некоррелированные по времени ДБГШ с СКО $\sigma_n = 10$.

Параметры сигналов $A_1, A_2, \omega, \varphi_0, \Delta\varphi$ неизвестны, но постоянны на интервале наблюдения.

Найти:

$\Delta\varphi$, дисперсию ошибки для полученной оценки $D_{\Delta\varphi}$.

•

Указания:

- В решении необходимо использовать метод максимального правдоподобия, применять итеративный алгоритм оценивания с помощью дискриминаторов.
- Неинформативные параметры (амплитуда, частота, начальная фаза) считаются информативными и тоже оцениваются:

$$\boldsymbol{\lambda} = [A_1 \quad A_2 \quad \omega \quad \varphi_0 \quad \Delta\varphi]^T.$$

- Вектор наблюдений:

$$\mathbf{y}_k = [y_{1,k} \quad y_{2,k} \quad y_{3,k} \quad y_{4,k}]^T = \mathbf{S}_k(\boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{n}_k.$$

- Отношение правдоподобия для векторных наблюдений в дискретном времени:

$$\rho(\mathbf{Y}_0^M) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k^T(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{S}_k(\boldsymbol{\lambda}) \right) \right\},$$

где $\mathbf{D}_n = \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}$ - матрица дисперсий шумов наблюдений.

Решение:

Теория

1. Запишем функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned}\ln(\rho(\lambda)) &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{S}_k(\lambda) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^M \left(\mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}_k(\lambda) \right)\end{aligned}\quad (0.1)$$

2. Теперь распишем $\mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}_k(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_k^T(\lambda) &= \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) & A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) & A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) & A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (0.2)$$

$$\mathbf{D}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_n^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}\quad (0.3)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} = \\
& = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_n^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_1 & \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_2 & \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_3 & \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_4 \end{vmatrix} \quad (0.4)
\end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}_k(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}_k(\lambda) = \\
& = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_1 & \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_2 & \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_3 & \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{vmatrix} = \\
& = \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_1 \cdot S_1 + \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_2 \cdot S_2 + \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_3 \cdot S_3 + \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_4 \cdot S_4 = \\
& = \frac{1}{\sigma_n^2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) = \\
& = \frac{1}{\sigma_n^2} [A_1^2 \cos^2(\omega kT + \varphi_0) + A_1^2 \sin^2(\omega kT + \varphi_0) + \\
& + A_2^2 \cos^2(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) + A_2^2 \sin^2(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi)] = \\
& = \frac{1}{\sigma_n^2} (A_1^2 + A_2^2). \quad (0.5)
\end{aligned}$$

3. Вернемся к выражению 1.1 и запишем его с учетом приведенных преобразований:

$$\begin{aligned}
\ln(\rho(\lambda)) &= \sum_{k=1}^M \mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \left(\mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{S}_k(\lambda) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^M \left(\mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \mathbf{S}_k^T(\lambda) \cdot \mathbf{D}_n^{-1} \cdot \mathbf{S}_k(\lambda) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^M \left(\left| \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_1 \quad \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_2 \quad \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_3 \quad \frac{1}{\sigma_n^2} \cdot S_4 \right| \cdot \mathbf{y}_k - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} (A_1^2 + A_2^2) \right) = \quad (0.6) \\
&= \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 + S_4 \cdot y_4) - \frac{M}{2} (A_1^2 + A_2^2) \right]
\end{aligned}$$

4. Далее рассчитаем все производные функции правдоподобия по составляющим вектора оцениваемых параметров:

$$\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (\cos(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} + \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k}) - M \cdot A_1 \right], \quad (0.7)$$

$$\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (\cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} + \sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{4,k}) - M \cdot A_2 \right], \quad (0.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} \cdot kT + A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} \cdot kT - \right. \\
&\quad \left. - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} \cdot kT + A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{4,k} \cdot kT) \right], \quad (0.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0} &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} + A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} - \right. \\
&\quad \left. - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} + A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{4,k}) \right], \quad (0.10)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \Delta\varphi} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} + A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{4,k}) \right], \quad (0.11)$$

5. Теперь найдем все вторые и смешанные производные функции правдоподобия:

- A_1 :

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1^2} = -\frac{M}{\sigma_n^2}, \quad (0.12)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial A_2} = 0, \quad (0.13)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \omega} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} \cdot kT + \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} \cdot kT \right) \right], \quad (0.14)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \varphi_0} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} + \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} \right) \right], \quad (0.15)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \Delta \varphi} = 0. \quad (0.16)$$

- A_2 :

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2^2} = -\frac{M}{\sigma_n^2}, \quad (0.17)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \omega} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta \varphi) y_{3,k} \cdot kT + \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta \varphi) y_{4,k} \cdot kT \right) \right], \quad (0.18)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \varphi_0} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta \varphi) y_{3,k} + \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta \varphi) y_{4,k} \right) \right], \quad (0.19)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \Delta \varphi} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M \left(-\sin(\omega kT + \varphi_0 + \Delta \varphi) y_{3,k} + \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta \varphi) y_{4,k} \right) \right]. \quad (0.20)$$

• ω :

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} \cdot (kT)^2 - A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} \cdot (kT)^2 - A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} \cdot (kT)^2 - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{4,k} \cdot (kT)^2) \right], \quad (0.21)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \varphi_0} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} \cdot kT - A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} \cdot kT - A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} \cdot kT - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{4,k} \cdot kT) \right], \quad (0.22)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \Delta\varphi} = \frac{1}{\sigma_n^2} [-A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} \cdot kT - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{4,k} \cdot kT], \quad (0.23)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_1 \cos(\omega kT + \varphi_0) y_{1,k} - A_1 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{2,k} - A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{4,k}) \right], \quad (0.24)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \Delta\varphi} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{4,k}) \right]. \quad (0.25)$$

• $\Delta\varphi$:

$$\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \Delta\varphi^2} = \frac{1}{\sigma_n^2} \left[\sum_{k=1}^M (-A_2 \cos(\omega kT + \varphi_0 + \Delta\varphi) y_{3,k} - A_2 \sin(\omega kT + \varphi_0) y_{4,k}) \right]. \quad (0.26)$$

6. Далее все рассчитанные производные нужно собрать в вектор (для первых производных) и матрицу (для вторых и смешанных производных) и применить алгоритм оценивания параметров сигналов с помощью дискриминаторов:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \frac{\partial \ln[\rho(\lambda^{(k)})]}{\partial \lambda} \left[\frac{\partial^2 \ln[\rho(\lambda^{(k)})]}{\partial \lambda^2} \right]^{-1}, \quad (0.27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln[\rho(\lambda^{(k)})]}{\partial \lambda} = \\ & = \left| \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1} \quad \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2} \quad \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega} \quad \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0} \quad \frac{\partial \ln(\rho(\lambda))}{\partial \Delta \varphi} \right|, \end{aligned} \quad (0.28)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \ln[\rho(\lambda^{(k)})]}{\partial \lambda^2} \right]^{-1} = \\ & = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial A_2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \omega} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \varphi_0} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0^2} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_1 \partial \Delta \varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial A_2 \partial \Delta \varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \omega \partial \Delta \varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \varphi_0 \partial \Delta \varphi} & \frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \Delta \varphi^2} \end{array} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (0.29)$$

Расчет производится с помощью метода простой итерации. Критерий окончания:

$$|\Delta \varphi^{(k)} - \Delta \varphi^{(k-1)}| \leq 10^{-8}. \quad (0.30)$$

7. При условии, что ОСШ достаточно большое дисперсию ошибки оценивания параметра $\Delta \varphi$ - $D_{\Delta \varphi}$ можно найти по формуле:

$$D_{\Delta\hat{\varphi}} = J_{5,5}^{-1}, \quad (0.31)$$

где $J_{i,j}$ - это элемент матрицы Фишера, рассчитываемый по формуле:

$$J_{i,j} = -M \left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right], \quad (0.32)$$

здесь $M[*]$ - функция вычисления мат. ожидания.

Тогда:

$$D_{\Delta\hat{\varphi}} = J_{5,5}^{-1} = - \left[\frac{\partial^2 \ln(\rho(\lambda))}{\partial \Delta\varphi^2} \right]^{-1}. \quad (0.33)$$

Математическое моделирование

1. Начальные данные для алгоритма оценивания параметров с помощью дискриминаторов

Расчёты проведены на языке программирования Python. Построим выборку заданных реализаций на входе приёмника:

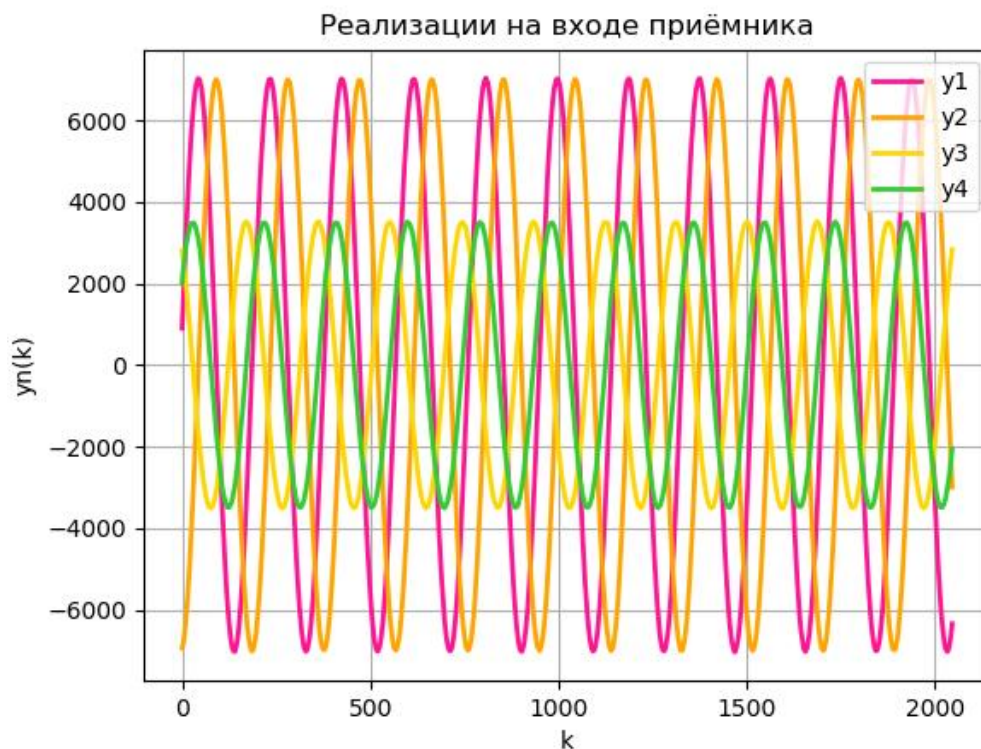


Рис. 1 Реализации на входе приёмника

Необходимо задать начальное значение вектора оцениваемых параметров:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \begin{bmatrix} A_{1,0} & A_{2,0} & \omega_0 & \varphi_{0,0} & \Delta\varphi_0 \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} 7030 & 3500 & 5 \cdot 10^5 & \text{rad}(-60^\circ) & \text{rad}(-120^\circ) \end{bmatrix}^T.\end{aligned}\tag{0.34}$$

Все параметры выбраны, вероятно, далекими от начальных значений параметров. Однако, мне кажется, это должно повлиять только на количество итераций, за которые оценка параметров достигнет заданной точности.

Результаты

(пока их нет)