Klassische Theorie partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 17/18

Philipp Beck, Daniel Winkle

30. Oktober 2017

1 Einführung

GITHUB SUCKS

1.1 Partielle Differentialgleichungen aus der Physik

1.1 Elektrostatik:
Sei $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Ladungsverteilung bzw. Dichte und $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein elektrisches Feld. Aus der Physik ist der Zusammenhang

$$\underbrace{\int_\Omega \rho \, \mathrm{d}x}_{\text{Ladung in }\Omega} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} n \; E \, \mathrm{d}\sigma}_{\text{Aus }\Omega\text{ ausfließendes Feld}} \overset{\text{Gauß-O.}}{=} \int_\Omega \operatorname{div} E \, \mathrm{d}x$$

für „alle“ Gebiete $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ bekannt. Hierbei ist n der aus Ω hinauszeigende Normaleneinheitsvektor. Da Ω beliebig ist, folgt

$$\rho = \operatorname{div} E := \partial_{x_1} E_1 + \partial_{x_2} E_2 + \partial_{x_3} E_3.$$

Außerdem ist ein elektrisches Feld wirbelfrei, womit

$$\operatorname{rot} E := \nabla \times E = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2 \\ \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3 \\ \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1 \end{pmatrix} = 0$$

gilt. Damit besitzt ein E ein Potential $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$E = \operatorname{grad} \varphi := \nabla \varphi := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \varphi \\ \partial_{x_2} \varphi \\ \partial_{x_1} \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta \varphi = \rho.$$

Dabei bezeichnet

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$$

den *Laplace-Operator*. Nun bezeichnet man

$$\Delta \varphi = \rho$$
$$\Delta \varphi = 0$$

als *Poisson-bzw. Laplacegleichung.*

1.2 Wärmeleitung:
Sei $\nu : [0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Temperaturverteilung. Dann ist die Wärmeenergie durch

$$\int\limits_{\Omega} c \cdot \nu(t,x)\ \mathrm{d}x$$

für eine Materialkonstante c gegeben. Die Energieänderung erhält man nun durch

$$\int\limits_{\Omega} c \cdot \nu(t_1,x)\ \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} c \cdot \nu(t_2,x)\ \mathrm{d}x \overset{\text{Physik}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \alpha\ \nabla\nu(t,x) \cdot n\ \mathrm{d}x}_{\text{Wärmefluss aus } \Omega}\ \mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{Gauß-O.}}{=} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha\ \nabla\nu(t,x))\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t.$$

Da t_1, t_2 und Ω beliebig war, folgt

$$\int\limits_{\Omega} c\ \partial_t \nu(t,x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha\ \nabla\nu(t,x))\ \mathrm{d}x$$

und

$$\partial_t \nu(t,x) = \frac{1}{c}\ \nabla \cdot (\alpha\ \nabla\nu(t,x)).$$

Es folgt

$$\partial_t \nu(t,x) = \frac{\alpha}{c} \Delta\nu(t,x),$$

falls α eine Konstante ist. Diese Differentialgleichung nennt man *homogene Wärmeleitunsgleichung.*

1.3 Schallausbreitung:
Durch

$$\partial_t^2 u - c\ \gamma u = 0$$

ist die *homogene Wellengleichung* mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$ gegeben. Weiter ist mit

$$v = \frac{1}{\rho} \nabla u$$

die Geschwindigkeitsverteilung und mit

$$p = p_0 - \partial_t u$$

die Druckverteilung gegeben. Man wählt

$$u(t,x) = e^{\mathrm{i}\lambda t} w(x)$$

als Ansatz zur Entkopplung von Zeit und Ort. Durch Einsetzen erhält man

$$-\lambda^2 e^{\mathrm{i}\lambda t} w(x) - c e^{\mathrm{i}\lambda t} \Delta w(x) = 0 \Leftrightarrow \Delta w(x) + \frac{\lambda^2}{c} w(x) = 0$$

die *Helmholtz-Gleichung.*

1.4 Quantenmechanik:
Es ist die Aufenthaltsgeschwindigkeit

$$\varphi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

eines Elektrons gesucht. Insbesondere muss

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x) \, \mathrm{d}x = 1$$

erfüllt sein. Man findet φ durch Lösen der durch

$$\mathrm{i} \, \partial_t \varphi = -\Delta \varphi$$

gegebenen *Schrödingergleichung*.

1.5 Plattengleichung:
Die *Plattengleichung* ist durch

$$\partial_t^2 - c \, \Delta^2 u = 0$$

gegeben.

1.6 Elektromagnetische Wellen:
Gegeben sei die Stromdichte $j : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Ladungsdichte $\rho : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Gesucht ist nun die elektrische/magnetische Feldstärke $E, H : [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche die vier

$$\begin{aligned} \partial_t E + j &= \nabla \times H \\ \partial_t H &= -\nabla \times E \\ \nabla \cdot E &= \rho \\ \nabla \cdot H &= 0 \end{aligned}$$

Maxwell-Gleichungen erfüllen. Durch

$$\begin{aligned} \Delta E &= \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \rho + \nabla \times \partial_t H = \nabla \rho + \partial_t (\nabla \times H) \\ &= \nabla \rho + \partial_t (\partial_t E + j) \end{aligned}$$

folgt mit

$$\partial_t^2 E = \Delta E - \partial_t j - \nabla \rho$$

die *inhomogene Wellengleichung*

1.2 Typeinteilung

1.7 Definition:
Sei die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}(x)\ \partial_{x_i}\partial_{x_k} u(x) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x)\ \partial_{x_i} u(x) + c(x)\ u(x). \tag{1.2.1}$$

Dabei ist $A(x) = (a_{ik}(x))_{i,k=0,\dots,n}$ eine reelle symmetrische Matrix und es gilt $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.
Seien $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ die nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von $A(x)$. Die Eigenwerte werden entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Dann nennt man

$$d(x) = \#\{j \in \{0, \dots, n\} \mid \lambda_j(x) = 0\}$$

die ***Defektzahl*** und

$$t(x) = \#\{j \in \{0, \dots, n\} \mid \lambda_j(x) < 0\}$$

den ***Trägheitsindex***. Nun heißt die Differentialgleichung 1.2.1 im Punkt x

(i) ***hyperbolisch***, falls $d(x) = 0$ und $t(x) \in \{1, n\}$.

(ii) ***parabolisch***, falls $d(x) > 0$.

(iii) ***elliptisch***, falls $d(x) = 0$ und $t(x) \in \{0, n+1\}$.

(iv) ***ultrahyperbolisch***, falls $d(x) = 0$ und $1 < t(x) < n$.

1.8 Beispiele: (a) Für die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$$

ist

$$(a_{ik}) = \operatorname{diag}(1, -1, \dots, -1)$$

unabhängig von x. Damit ist $t(x) = n$ und $d(x) = 0$. Also ist die Wellengleichung hyperbolisch.

(b) Für die Laplace-bzw. Poissiongleichung

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = f$$

gilt

$$(a_{ik}) = \mathrm{Id} = \operatorname{diag}(1, \dots, 1),$$

woraus $d(x) = t(x) = 0$ folgt. Damit sind beide Gleichungen elliptisch.

(c) Genauso wie in (b) erkennt man, dass die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + c\, u = 0$$

elliptisch ist.

(d) Die Wärmeleitunsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

ist mit

$$(a_{ik}) = \operatorname{diag}(0, -1, \dots, -1)$$

parabolisch ($d(x) = 1$).

(e) Die Tricomi-Gleichung

$$x_2 \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u = 0$$

mit

$$a_{ik}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

- elliptisch für $x_2 > 0$.
- parabolisch für $x_2 = 0$.
- hyperbolisch für $x_2 < 0$.

1.9 Fragen: 1. Existenz von Lösungen.

2. Berechnung oder Konstruktion von Lösungen.
3. Welche Bedingungen sind für die Eindeutigkeit zu stellen.
4. Stetige Abhängigkeit der Lösung von gegebenen Daten.

1.10 Bezeichnungen:
Mit

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in D(f) \mid f(x) \neq 0\}}$$

bezeichnet man den ***Träger / Support*** von f. Mit

$$C_0^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega \to \mathbb{R}),\ \operatorname{supp}(f) \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

bezeichnet man die kompakt getragenen und k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Im Folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, sodass der Satz von Gauß-Ostrogradski angewendet werden kann. Insbesondere gilt dann die ***Greensche Formel***

$$\int_\Omega (f\ \nabla g - \nabla f\ g)\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f\ n \cdot \nabla g - g\ n \cdot \nabla f\ \mathrm{d}x,$$

wobei n der aus Ω zeigende Normaleneinheitsvektor ist.

2 Ganzraumprobleme

2.1 Die Laplace-Poisson Gleichung

2.1 Definition:
Man nennt $u \in C^2(\Omega \to \mathbb{R})$ ***harmonisch***, falls

$$\Delta u = 0$$

in Ω erfüllt ist.

Nun sucht man eine radialsymmetrische harmonische Funktion $u = u(|x|) = u(r)$. Den Laplace-Operator kann man durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \text{Terme mit Ableitung nach Winkeln}$$

in Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^m$ schreiben. Damit erhält man mit

$$u''(r) + \frac{m-1}{r}\,u'(r) = 0$$

das Fundamentalsystem

$$u(r) = c, \quad u(r) = \begin{cases} \frac{c}{r^{m-2}}, & \text{falls } m \geq 3 \\ c\ \ln(r), & \text{falls } m = 2 \end{cases}$$

der Laplace-Gleichung.

2.2 Definition:
Die ***Fundamentallösung*** der Laplacegleichung ist durch

$$\Phi_m(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln(r), & \text{falls } m = 2 \\ \frac{-1}{(m-2)\ |S_{m-1}| r^{m-2}}, & \text{falls } m \geq 3 \end{cases}$$

gegeben. Dabei ist $|S_{m-1}|$ das Maß der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^m$. Es gilt beispielsweise $|S_1| = 2\Pi$.