Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

10. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 08.01.2023, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 + 2 = 6 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; 0 \;=\; \lim_{x\to\infty} f(x)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ ein Maximum oder ein Minimum annimmt.

b) Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 2 (2 + 2 = 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen bijektiv sind und bestimmen Sie die jeweilige Umkehrfunktion

a) $\quad f : [0,\infty) \to f([0,\infty)) \subset \mathbb{R},\; f(x) := \frac{1}{1+x^2},$

b) $\quad g : \mathbb{R} \to g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R},\; g(x) := \begin{cases} \exp(-x^2) & \text{falls } x < 0 \\ x^2 + x + 2 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

Aufgabe 3 (2 + 2 = 4 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen

a) Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Aus $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ folgt f stetig.

Aufgabe 4: (3 + 1 + 2 = 6 Punkte)

a) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und es gelte für $x_0 \in (a,b)$,

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Zeigen Sie, f ist stetig in x_0.

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass ohne die Monotonie, die Aussage in **a)** falsch ist.

c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (eventuell uneigentliches) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : I' \to \mathbb{R}$, $I' = f(I)$ streng monoton wachsend ist.
Hinweis: Sie können alle in der Vorlesung bewiesenen Aussagen von Satz 8.13 verwenden.

Bitte Wenden!

Aufgabe 5 * (4 Bonuspunkte)

Definiere die „*Zackenfunktion*" $Z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$Z(x) \;:=\; \begin{cases} x - 4k - 1 & \text{falls } x \in [4k, 4k+2) \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 4k + 3 - x & \text{falls } x \in [4k+2, 4k+4) \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

und die „*Wackelfunktion*" $W : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $W(x) := Z\left(\frac{1}{x}\right)$. Zeichnen Sie die Graphen von Z und W und beweisen Sie, dass W stetig ist, aber nicht gleichmäßig stetig.