Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

12. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 22.01.2023, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (3 + 3 = 6 Punkte)

a) Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$. Ferner, sei f differenzierbar in x_0 und g sei stetig in x_0. Zeigen Sie, dass $f \cdot g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 ist mit $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$.

b) Für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$ existieren die rechtsseitige und linksseitige Ableitungen $f'_+(x_0)$ und $f'_-(x_0)$, und diese stimmen überein. Zeigen Sie, dass f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Aufgabe 2 (2 + 2= 4 Punkte) Seien $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \cdot g(x) = x$ für alle $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie:

a) Sind f und g differenzierbar, so gilt: $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) \neq 0$.

b) Ohne die Differenzierbarkeitsvoraussetzung ist der Schluss in **a)** falsch.

Aufgabe 3: (2 + 2 = 4 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen für $x > 0$.

$$\textbf{a)}\ f(x) := \log \frac{x^3}{(1 + x^2)^5} \qquad \textbf{b)}\, f(x) := x^x \cos x$$

Aufgabe 4: (3 + 3 = 6 Punkte)

a) Beweisen Sie für $t \in \mathbb{R}$ folgende Gleichung

$$\frac{1 + it}{1 - it} = e^{2i\varphi} \quad \text{mit} \quad \varphi = \arctan t$$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit $z_{k,n} \in \mathbb{C}$ die n-ten Einheitswurzeln, d.h. $z_{k,n} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$. Betrachte den Polygonzug, welcher die Punkte $z_{k,n}$ verbindet. Die Länge des Polygonzugs ist

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1,n} - z_{k,n}|.$$

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} L_n$ und geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.