Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

11. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 15.01.2023, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Zeigen Sie

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2 (3 + 1 = 4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log(k))^{\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert.
Hinweis: Verwenden Sie das Konvergenzkriterium aus Blatt 8 Aufgabe 3.

b) Beweisen Sie $\log(1+x) \leq x$ für alle $x \geq 0$.
Hinweis: Verwenden Sie die Exponentialreihe.

Aufgabe 3 (2 + 4 = 6 Punkte)

a) Beweisen Sie folgende trigonometrischen Formeln

i) $\forall |\alpha| \leq \pi \qquad \cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$

ii) $\forall |\alpha| \leq \frac{\pi}{2} \qquad \sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sin(\alpha)}{2}\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}}$

b) Beweisen Sie folgende Wertetabelle

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
e^{ix}	$\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$	$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

Aufgabe 4: (3 + 3 = 6 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und es existiere ein $t > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(x+t)$. Zeigen Sie, f ist gleichmäßig stetig.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Teil **a)**. Zeigen Sie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = f(x^2)$ ist genau dann gleichmäßig wenn f eine konstante Funktion ist, d.h. es existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.