Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

1. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 23.10.2021, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (3+1+2=6 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \ = \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie folgende Aussage: $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 5 : 2^n > n^2$

Aufgabe 2: (2+2+2 = 6 Punkte) Sei M eine Menge und I eine Indexmenge. Seien A, B, C Mengen und für jedes $i \in I$ sei A_i eine Teilmenge von M. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$

b) $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$

c) $\bigcup\limits_{i \in I} (M \setminus A_i) = M \setminus \Big(\bigcap\limits_{i \in I} A_i \Big)$.

(Siehe Hinweis zu Vereinigung und Schnitt über beliebige Indexmengen auf der Rückseite.)

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung und es gelte $f(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie,

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ f(n) = n.$$

Aufgabe 4: (2 + 2 = 4 Punkte)

a) Zeigen Sie, $\forall n \in \mathbb{N} : n^2$ durch 3 teilbar $\Rightarrow n$ durch 3 teilbar.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis zu Aufgabe 2: Folgende Definitionen und Aussagen über Vereinigungen und Schnitte von Mengen können verwendet werden:
Sei I eine Indexmenge und A_i, $i \in I$ Mengen. Dann gilt

- $\bigcup_{i\in I} A_i := \left\{x \,:\, \bigvee_{i\in I}(x \in A_i)\right\} = \{x \,:\, (\exists i \in I \,:\, x \in A_i)\}$
- $\bigcap_{i\in I} A_i := \left\{x \,:\, \bigwedge_{i\in I}(x \in A_i)\right\} = \{x \,:\, (\forall i \in I \,:\, x \in A_i)\}$