Selbststudium/Übung

Aufgabe 6.1. Gegeben seien die sechs Abbildungen $h_i : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$

$$h_1(x) = x,\ h_2(x) = 1 - x,\ h_3(x) = \frac{1}{x},\ h_4(x) = \frac{x}{x-1}$$
$$h_5(x) = \frac{1}{1-x},\ h_6(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $G := \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ bezüglich der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe ist.

(ii) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(G, \circ)$.

Aufgabe 6.2. (a) Zeigen Sie, dass in einem Körper $1 + 1 = 0$ genau dann gilt, wenn $1 + 1 + 1 + 1 = 0$ ist.

(b) Sei p die kleinste Zahl in einem Körper K, falls es sie gibt, so dass $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p} = 0$.

Zeigen Sie, dass p dann eine Primzahl ist. Diese Zahl heißt *Charakteristik* des Körpers. Gibt es dieses p nicht, so sagt man, der Körper hat Charakteristik 0.

Aufgabe 6.3. Ist $(R, +, *)$ ein Ring mit Eins, so bezeichnen wir mit $R^\times$ die Menge aller invertierbaren Elemente von R bezüglich $*$.

(a) Zeigen Sie, dass $(R^\times, *)$ eine Gruppe ist (die sogenannte *Einheitengruppe* von R).

(b) Bestimmen Sie die Mengen $\mathbb{Z}^\times$ sowie $K^\times$ und $K[t]^\times$, wobei K ein Körper ist.

Aufgabe 6.4. (a) Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z = (2, 1) \in \mathbb{C}$ und $u = (1, -3) \in \mathbb{C}$ die Terme $-z$, $-u$, $z + u$, zu, $z^{-1}u$ und $z^{-1}z$.

(b) Beweisen Sie: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$ mit $\mathrm{i} = (0, 1)$.

Hinweis: Die Komplex-Konjugierte $\overline{z} \in \mathbb{C}$ von einer komplexen Zahl $z = (x, y)$ ist gegeben durch $\overline{z} = (x, -y)$.

Einzeln abgeben bis zum 28. November 2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 6.5. Sei $(R, +, *)$ ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$, der keine nicht-trivialen Nullteiler enthält, d. h. aus $a * b = 0$ für $a, b \in R$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$. (Ein solcher Ring heißt Integritätsbereich.)

(a) Auf $M = R \times R \setminus \{0\}$ sei eine Relation definiert durch

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x * v = y * u.$$

Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Die Äquivalenzklasse $[(x, y)]$ sei mit $\frac{x}{y}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Abbildungen wohldefiniert sind:

$$\oplus\colon (M/\sim) \times (M/\sim) \to (M/\sim) \quad \text{mit} \quad \frac{x}{y} \oplus \frac{u}{v} := \frac{x * v + y * u}{y * v}$$
$$\odot\colon (M/\sim) \times (M/\sim) \to (M/\sim) \quad \text{mit} \quad \frac{x}{y} \odot \frac{u}{v} := \frac{x * u}{y * v}$$

wobei $M/\sim$ die Quotientenmenge bezüglich $\sim$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(M/\sim, \oplus, \odot)$ ein Körper ist. (Dieser heißt der zu R gehörende Quotientenkörper.)

(d) Welcher Körper ist $(M/\sim, \oplus, \odot)$ für $R = \mathbb{Z}$?

Aufgabe 6.6. Betrachten Sie den in Aufgabe 6.5 konstruierten Quotientenkörper zum Ring der Polynome $R = K[t]$ über einem Körper K, für den $1 + 1 \neq 0$ ist. Seien $p = t^2 + (1 + 1)t + 1$ und $q = t^2 - t$. Bestimmen Sie $p^{-1}q$ und q^2p^{-1}.

Aufgabe 6.7. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen:

(a) Konjugieren ist ein bijektiver Körperhomomorphismus, d. h., für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{z_1^{-1}} = \overline{z_1}^{-1}.$$

(b) $\mathrm{Re}(z^{-1}) = \frac{1}{|z|^2}\,\mathrm{Re}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.