Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

6. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 27.11.2022, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (2+4=6 Punkte)

a) Sei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^k = a$ genau eine Lösung hat falls k ungerade ist und genau zwei Lösungen hat falls k gerade ist.

b) Zeigen Sie für alle $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$

(i) $x^r x^s = x^{r+s}$

(ii) $(x^r)^s = x^{rs}$

Hinweis: Sie können folgende Potenzgesetze für natürliche Exponenten verwenden: Für alle $x, y > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1)\ x^n y^n = (xy)^n, \quad (2)\ x^n x^m = x^{n+m}, \quad (3)\ (x^n)^m = x^{nm}$$

Aufgabe 2: (2+2=4 Punkte)

Seien $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Ungleichungen

$$\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}, \qquad |\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}| \leq \sqrt[n]{|a-b|}.$$

Hinweis: Sie können stets verwenden, dass für $0 < x, y$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$

Aufgabe 3 (2+4 = 6 Punkte)

a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}.$$

b) Sei $a > 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $a \geq 1$.

Aufgabe 4: (1+1+1+1=4 Punkte)

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, **b)** $\overline{zw} = (\overline{z})(\overline{w})$,

c) $|z+w| \leq |z| + |w|$, **d)** $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.