Analysis I

Tomáš Dohnal
tomas.dohnal@mathematik.uni-halle.de
Wintersemester 2022-23, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

22. Januar 2023

- Skript in Bearbeitung; Fehler (auch Tippfehler) melden Sie, bitte, auf meine Email-Adresse -

Inhaltsverzeichnis

Dieses ist kein vollständiges Skript. Es werden in der Regel nur die Definitionen und Sätze (Aussagen) getippt. Beweise, Beispiele, Erklärungen und Kommentare werden in der Vorlesung geliefert. Bei Bedarf können diese natürlich auch in der Literatur gefunden werden.

Die Hauptreferenz dieser Vorlesung ist [5]. Nicht immer wird aber der gleiche Zugang gewählt. Es werden außerdem viele andere Quellen benutzt, wie z.B. [3], [6] oder [1]. Dieses Skript folgt an mehreren Stellen dem Skript zu Analysis I von Matthias Röger, TU Dortmund.

1 Aussagenlogik, Mengenlehre, Abbildungen und Beweistechniken

Mathematik ist die Gewinnung von neuen wahren Aussagen aus alten wahren Ausagen. Mathematische Aussagen werden in der Form vom *Theorem, Satz, Proposition, Behauptung, Lemma* oder *Korollar* formuliert. Diese müssen bewiesen werden. Es gibt aber ein paar grundlegende Aussagen (Grundvoraussetzungen), die nicht bewiesen werden, s.g. *Axiome*. Diese werden als wahr vorausgesetzt. Als Beispiele erwähnen wir die *Peano-Axiome*, mit deren Hilfe man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ konstruiert:

(P1) Es ist 1 eine natürliche Zahl, d.h. $1 \in \mathbb{N}$.

(P2) Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n+1 \in \mathbb{N}$.

(P3) Die 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.

(P5) Für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $1 \in M$ und $(n \in M \Rightarrow n+1 \in M)$ gilt $M = \mathbb{N}$.

Mathematische Begriffe werden mit Hilfe von Definitionen eingeführt. Hier wird oft das Symbol „:=“ benutzt, z.B.

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Wir werden das Ende von jedem Beweis mit dem Symbol $\square$ markieren. Andere Mathematiker verwenden z.B. „q.e.d.“ (quod erat demonstrandum).

Mathematische Aussagen haben den Wahrheitswert 0 oder 1. Beispiele von wahren Aussagen sind

1. $1 + 2 = 3$
2. 29 ist eine Primzahl
3. 5 teilt 17 oder $0 \cdot 3 = 0$
4. 5 teilt 15 oder $0 \cdot 3 = 0$

Aussage 3 ist wahr, da $0 \cdot 3 = 0$. Aussage 4 ist wahr, da ein „oder“ in der Mathematik kein ausschließendes oder ist.

1.1 Logische Operationen

Seien A und B zwei Aussagen.

1) Und

- $A \wedge B$ heißt „A und B“.

- Die Aussage $(A \wedge B)$ wird als wahr bezeichnet, falls A und B wahr sind.

2) Oder

- $A \vee B$ heißt „A oder B“.
- Die Aussage $(A \vee B)$ wird als wahr bezeichnet, falls A oder B wahr ist. Da „oder“ kein ausschließendes oder ist, dürfen auch beide wahr sein.

3) Negation

$\neg A$ bezeichnet die Negation der Aussage A. Falls A wahr ist, ist $\neg A$ falsch und umgekehrt.

Als Beispiel sei $A=$ „$n \in \mathbb{N}$ ist gerade“, d.h. „n ist eine gerade natürliche Zahl'". Dann ist $\neg A=$“$n \notin \mathbb{N}$ oder $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade“.

4) Folgerung/Implikation

- $A \Rightarrow B$ heißt „aus der Aussage A folgt Aussage B“.
- Die Aussage $(A \Rightarrow B)$ wird als wahr bezeichnet, falls B wahr ist oder A falsch ist. In aderen Worten ist $(A \Rightarrow B)$ wahr, falls $(\neg A \vee B)$ wahr ist.

Es heißt, dass wir bei einer nicht wahren Voraussetzung A beliebiges B (wahr oder falsch) behaupten können. Die ganze Aussage $(A \Rightarrow B)$ ist dabei wahr. Also sind folgende Beispiele wahre Aussagen:

1. $x^2 < 5, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \leq 2$
2. $1+1=2 \Rightarrow \sqrt{9}=3$
3. $1+1=3 \Rightarrow 1+1=0$
4. $1+1=3 \Rightarrow 1+1=2$
5. $1+1=3 \Rightarrow$ die Summe von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist eine ungerade Zahl

Wir bemerken, dass bei der mathematischen Folgerung kein kausaler Zusammenhang bestehen muss. Bei den meisten nützlichen Anwendungen von $\Rightarrow$ besteht er aber doch. Oben kann man nur Beispiel 1 als „nützlich“ bezeichnen.

5) Äquivalenz

- $A \Leftrightarrow B$ heißt $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$, d.h. A gilt *genau dann, wenn* B gilt, d.h. die Aussagen A und B sind äquivalent. In anderen Worten $A \Leftrightarrow B$ ist wahr wenn beide A und B wahr oder beide falsch sind.

Beispiele wahrer Äquivalenzaussagen sind

1. $x^2 < 5, x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{Z}$
2. $0 = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$
3. $|-3| = 3 \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Nur Beispiel 1 kann als „nützlich“ bezeichnet werden, da es bei dem einen kausalen Zusammenhang gibt.

Es ist hilfreich sich die Werte in der folgenden Wahrsheitstabelle zu überlegen.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Proposition 1.1 Es gilt für beliebige Aussagen A und B

$$(A \Rightarrow B) \ \Leftrightarrow \ (\neg A \text{ oder } B) \ \Leftrightarrow \ (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Beweis. Die erste Äquivalenz folgt aus der Definition der Implikation angewandt auf $A \Rightarrow B$; die zweite Äquivalenz aus der Definition der Implikation angewandt auf $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Alternativ können wir den Beweis mit Hilfe der Wahrheitstabelle führen. Zum Beispiel, für die zweite Äquivalenz haben wir:

A	B	$\neg A$ oder B	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Die letzten zwei Spalten sind offensichtlich identisch, also sind ($\neg A$ oder B) und ($\neg B \Rightarrow \neg A$) tatsächlich äquivalent. $\square$

1.2 Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten (Elementen). Die leere Menge wird als $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet. Wir kennen schon

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ (Menge der natürlichen Zahlen - konstuiert oben durch die Peano-Axiome),
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (Menge der ganzen Zahlen),
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p$ und q sind teilerfremd$\}$ (Menge der rationalen Zahlen).

Wir definieren noch

- $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Folgende Begriffe brauchen wir:

- *Vereinigung* von Mengen M, N ist $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$
- *Schnitt* von Mengen M, N ist $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$
- *Differenz* von Mengen M, N ist $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$
- M ist eine *Teilmenge* der Menge N, d.h. $M \subset N$, genau dann wenn $(x \in M \Rightarrow x \in N)$. Man merkt, dass dabei $M = N$ möglich ist.
- M und N sind *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$
- Das *Komplement* einer Teilmenge $M \subset N$ ist $M^c := N \setminus M$.

- Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller Paare (x, y), wobei $x \in M$ und $y \in N$ ist.

Proposition 1.2 Seien A, B, C beliebige Mengen. Es gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Beweis. Folgende Äquivalenzkette gilt

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Die Äquivalenz der ersten und der letzten Aussage ergibt das Lemma. □

Quantoren

Um die Notation kurz zu halten, benutzt man bei der Arbeit mit Mengen spezielle Symbole, s.g. *Quantoren.*

- *Allquantor*: $\forall$ heißt „für jedes“
  Zum Beispiel
  $$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$$
  heißt: „für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n^2 \geq n$“.
- *Existenzquantor*: $\exists$ heißt „es existiert“
  Zum Beispiel
  $$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$$
  heißt „es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n^2 = 4$“. Der Quantor $\exists!$ heißt “es existiert genau ein.” Zum Beispiel gilt
  $$\exists! x \in \mathbb{N} : x - 1 \notin \mathbb{N}.$$
  Diese eindeutige Zahl ist natürlich $x = 1$.
- ein Beispiel mit beiden Quantoren (wobei $\mathbb{R}$ erst später definiert wird):
  $$\forall y \geq 0\ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y$$
  d.h.: „für jedes $y \geq 0$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x^2 = y$“.

Wie wir in den obigen Beispielen gesehen haben, wird der Doppelpunkt „ : “ für mindestens zwei Bedeutungen verwendet: als „gilt, dass“ und als „sodass“.

1.3 Abbildungen

Definition. Seien X, Y beliebige Mengen. Eine *Abbildung* (oder *Funktion*) $f : X \to Y$ ist eine Zuordnung, die jedem $x \in X$ genau ein $y = f(x) \in Y$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$$

oder

$$f : \begin{cases} X \to Y, \\ x \mapsto f(x). \end{cases}$$

X heißt der *Definitionsbereich* (oft als $D(f)$ bezeichnet) und Y die *Zielmenge* von f. Die Menge der tatsächlich angenomennen Werte $f(X) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ für ein } x \in X\}$ heißt das *Bild* von f. Das Bild kann als $f(X)$ geschrieben werden.

Beispiel. Wir betrachten $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$. Hier ist der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{Z}$, die Zeilmenge auch $\mathbb{Z}$. Das Bild sind die Quadratzahlen in $\mathbb{N}_0$, d.h. $\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Definition. Seien X, Y, Z beliebige Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Dann heißt

$$g \circ f \ : \ X \to Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{ für } x \in X$$

die *Komposition* (oder Verkettung) von g und f.

Beispiel. Wir betrachten $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, x \mapsto |x|$ und $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, x \mapsto (x+1)^2$. Die Komposition von g und f ist

$$(g \circ f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, x \mapsto (|x| + 1)^2.$$

Das Bild der Funktion $g \circ f$ sind die Quadratzahlen in $\mathbb{N}$, d.h. $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Man kann in diesem Beispiel auch $f \circ g$ definieren, obwohl der Definitionsbereich von f nicht gleich der Zielmenge von g ist. Es reicht nämlich, dass das Bild von g eine Teilmenge des Definitionsbereichs von f ist und das ist hier erfüllt. Wir bekommen

$$(f \circ g) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, x \mapsto |(x+1)^2| = (x+1)^2.$$

Das Bild der Funktion $f \circ g$ sind wieder die Quadratzahlen in $\mathbb{N}$.

Wir schließen diese kurze Einführung von Abbildungen durch die Definition von drei wichtigen Funktion-Klassen.

Definition. Seien M und N zwei beliebige Mengen und $f : M \to N$ eine Funktion.

1. f heißt *injektiv*, falls zu jedem $y \in N$ höchstens ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$.
2. f heißt *surjektiv*, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$, d.h. falls $f(M) = N$.
3. f heißt *bijektiv*, falls zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ existiert, sodass $f(x) = y$. f ist also genau dann bijektiv, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv, da $f(n) = f(-n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und auch nicht surjektiv, da $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}_0 \neq \mathbb{Z}$.

Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, x \mapsto |x|$ ist surjektiv aber nicht injektiv, da $f(n) = f(-n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele von bijektiven Funktionen sind nicht schwierig zu konstruieren, z.B. $f : \{1, 2, 5, 11\} \to \{1, 4, 25, 121\}, x \mapsto x^2$ oder $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2 - x$ oder $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto \frac{x}{3}$.

1.4 Beweistechniken

Wir besprechen die drei wichtigsten Beweistechniken: direkter Beweis, Widerspruchsbeweis und vollständige Induktion.

1) direkter Beweis (einer Aussage A)

$$\text{Voraussetzung (und bekannte wahre Aussagen)} \rightarrow \text{logische Folgerungen} \rightarrow \text{Aussage } A$$

Behauptung. Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist ungerade.

Beweis. Sei n eine ungerade Zahl, also $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

- $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; n^2$ ist ungerade

□

2) indirekter Beweis / Widerspruchsbeweis (einer Aussage A)

$\neg A$ (und bekannte wahre Aussagen) $\rightarrow$ logische Folgerungen $\rightarrow$ $\neg B$, wobei B eine bekannte wahre Aussage

Also, man zeigt, dass ($\neg A \;\Rightarrow \neg B$) gilt. Dies ist nach Prop. 1.1 äquivalent zur Wahrheit von ($B \Rightarrow A$). Da B wahr ist, muss auch A wahr sein.

Anders gesehen, unter der Voraussetzung $\neg A$ bekommen wir nach der Verwendung von logischen Schlussfolgerungen und anderen wahren Aussagen den Widerspruch mit einer bekannten wahren Aussage B. Deswegen muss also die Voraussetzung falsch sein.

Am Anfang des Beweises weiß man oft nicht, welche Aussage B verwendet wird.

Der Widerspruchsbeweis wird auf lateinisch "reductio ad absurdum" genannt.

Behauptung. In einem rechtwinkligen Dreieck mit Kathetenlängen $a, b > 0$ und Hypotenusenlänge $c > 0$ gilt $a + b > c$.

Beweis. Sei $a + b \leq c$.

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq c^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2 \overset{\text{Pythagoras}}{\Leftrightarrow} c^2 + 2ab \leq c^2 \Leftrightarrow 2ab \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch mit $a, b > 0$. □

3) vollständige Induktion

Hier ist die Aufgabe eine Aussage $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$, wobei $n_0 \in \mathbb{Z}$ fest ist und $n \in \mathbb{Z}$ frei ist, zu beweisen. Als Beispiel will man Zeigen, dass $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hier ist also $n_0 = 1$ und $A(n) =$ „$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$".

Das Vorgehen der vollständigen Induktion ist zu zeigen:

I.A. (Induktionsanfang) $A(n_0)$ ist wahr

I.S. (Induktionsschritt) Für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt:

$$\text{Falls} \quad \underbrace{A(n) \text{ wahr}}_{\text{Induktionsvoraussetzung (I.V.)}} \quad \text{ist, so ist auch } A(n+1) \text{ wahr.}$$

Daraus folgt:

$A(n_0)$ gilt nach I.A. $\Rightarrow$ $A(n_0+1)$ gilt nach I.S. (mit $n = n_0$) $\Rightarrow$ $A(n_0+2)$ gilt nach I.S. (mit $n = n_0+1$) usw.

Dass damit $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ gilt folgt aus dem Peano-Axiom P5 für natürliche Zahlen. Bemerke, dass die Aussagen auch durch $m \in \mathbb{N}$ enumeriert werden können, indem man $m := n + 1 - n_0$ setzt und die Aussagen $B(m) := A(m - 1 + n_0)$ betrachtet.

Behauptung. (Arithmetische Reihe) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$S(n) := 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang: $S(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (gilt offensichtlich)

Induktionsschritt: Zeige, dass für beliebiges $n \geq 1$ die Implikation

$$\underbrace{S(n) = \frac{n(n+1)}{2}}_{\text{I.V.}} \Rightarrow S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

wahr ist. Sei also $n \geq 1$ beliebig. Tatsächlich gilt

$$S(n+1) = S(n) + n + 1 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

1.5 Binomischer Lehrsatz

Als Anwendung der vollständigen Induktion beweisen wir im Nächsten den binomischen Lehrsatz und die Summe der geometrischen Reihe. Wir werden hier zum Teil schon die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ benutzen, obwohl diese erst in Kapitel 2 eingeführt werden. Dies ist zwar nicht ganz sauber; da wir aber keine wichtigen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ hier benutzen, ist dies vielleicht entschuldbar.

Definition. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $k! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k$ die *Fakultät* von k. Wir setzen $0! := 1$.

Satz 1.3 (Bedeutung der Fakultät) Es ist $n!$ die Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen) einer Menge aus n Elementen.

Beweis. Wir verfahren mit Hilfe der vollständigen Induktion. Für $n = 1$ ist $n! = 1$ und offenbar hat auch die Menge mit einem Element nur eine Anordnung.

Für den Induktionsschritt sei $\{a_1, \ldots, a_n, b\}$ eine $(n+1)$-elementige Menge. Nach der Induktionsvoraussetzung hat $\{a_1, \ldots, a_n\}$ gerade $n!$ Anordnungen. Für jede der $n!$ Anordnungen kann das neue Element b an $n+1$ unterschiedlichen Stellen stehen. Daher gibt es für $\{a_1, \ldots, a_n, b\}$ genau $(n+1)n! = (n+1)!$ Anordnungen. □

Bemerkung. *Summenzeichen, Produktzeichen und ganzzahlige Potenzen*: Für ganze Zahlen $m \leq n$ und reelle Zahlen a_k mit $m \leq k \leq n$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n, \quad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Für $m > n$ setzt man $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0, \prod_{k=m}^{n} a_k := 1$. Die leere Summe wird also als 0 und das leere Produkt als 1 definiert.

Zum Beispiel:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k,$$
$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \sum_{k=1}^{n} a^k,$$
$$n! = \Pi_{k=1}^{n} k.$$

Definition. Ein Spezialfall des Produktes ist die *Potenz*

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ mal}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Negative Potenzen werden (für nicht-Null Argumente) definiert durch

$$x^{-n} := (\tfrac{1}{x})^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Die nullte Potenz wird *definiert* als 1:

$$x^0 := 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Die Wahl des Wertes von x^0 hat eine Motivation. Für $x \neq 0$ kann sie durch Stetigkeit-Argumente begründet werden. Für $x = 0$ führt sie z.B. zur Gültigkeit der Formel im binomischen Lehrsatz (siehe Satz 1.7) oder der Formel für die Summe der geometrischen Reihe auch für den Fall $x = 0$ (siehe Satz 1.8).

Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n - j + 1}{j}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ setzt man $\binom{n}{k} := 0$. $\binom{n}{k}$ heißt der *Binomialkoeffizient.* Das Symbol $\binom{n}{k}$ wird als „n über k“ oder „k aus n“ gelesen.

Bemerkung. Für $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$ ist offenbar

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{1.1}$$

Wegen der Definition $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$ für $m > n$ ist

$$\binom{n}{0} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Außerdem folgt aus der Definition von $\binom{n}{k}$, dass

$$\binom{n}{k} = 0 \ \forall n, k \in \mathbb{N}_0, k > n,$$

da für $k > n$ ein Faktor in $\prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$ gleich Null ist.

Lemma 1.4 Es gilt

(i) $\binom{n}{1} = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$,

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$.

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition. Aussage (ii) folgt, indem man (1.1) mit $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ multipliziert. Aussage (iii) folgt aus (ii), weil $n - (n - k) = k$, sodass auch $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ gilt. □

Lemma 1.5 Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Für $k < 0$ sind beide die linke Seite (l.S.) un die rechte Seite (r.S.) gleich Null. Für $k = 0$ ist

$$\text{l.S.} = \binom{n}{0} = 1, \text{r.S.} = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{0} = 1.$$

Für $k > n$ gilt

$$\text{l.S.} = \text{r.S.} = 0$$

und für $k = n$ gilt

$$\text{l.S.} = 1, \text{r.S.} = 1 + 0 = 1.$$

Es bleibt also nur $0 < k < n$ zu betrachten. In diesem Fall haben wir mit Hilfe von Lemma 1.4 (ii)

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Satz 1.6 (Kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten) Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gleich $\binom{n}{k}$.

Bemerkung. Dabei ist zu beachten, dass eine (Teil-)Menge nur durch ihre Elemente definiert wird und nicht durch die Anordnung dieser Elemente. Z.B. die Mengen $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ sind identische Mengen.

Beweis. Betrachte eine n-elementige Menge. Für die Wahl des ersten Elemente einer k-elementigen Teilmenge haben wir n Möglichkeiten. Für die Wahl des 2. Elementen haben nur noch $n-1$ Möglichkeiten, usw. Für die Wahl des k-ten Elementen haben wir $n-k+1$ Möglichkeiten. Insgesamt können wir also $n(n-1)...(n-k+1)$ Teilmengen mit k Elementen finden. Diese enthalten aber auch alle mögliche Permutationen (Anordnungen), z.B.

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots a_k\}, \{a_2, a_1, a_3, \dots a_k\}, \dots.$$

Es gibt also $\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ unterschiedliche Teilmengen mit k Elementen. □

Satz 1.7 (Binomischer Lehrsatz / Binomialsatz) Seien x, y reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis. Wir benutzen die vollständige Induktion. Für den Induktionsanfang ist die Formel für $n = 0$ zu prüfen. Nach Definition von a^0 gilt $(x+y)^0 = 1$. Und auf der rechten Seite haben wir

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1.$$

Nun führen wir den Induktionsschritt ($n \rightsquigarrow n+1$) durch. Wir schreiben die linke Seite um

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n x + (x+y)^n y =: S_1 + S_2.$$

Nach der Anwendung der Induktionsvoraussetzung gilt

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k,$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $\binom{n}{n+1} = 0$ gilt. Und für S_2 bekommen wir

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} y^j$$

mit Hilfe der „Indexverschiebung“ $j := k+1$. Weil $\binom{n}{-1} = 0$, bekommen wir

$$S_2 = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} y^j.$$

Den Index j können wir nun einfach als k umbenennen und erhalten wegen $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

$$S_1 + S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

Damit ist der Beweis fertig. □

Beispiel. Ein einfaches Beispiel ist die dritte Potenz einer Summe, d.h. $(x+y)^3$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wie man einfach ausrechnet, gilt $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Dies stimmt mit dem binomischen Lehrsatz überein, da

$$1 = \binom{3}{0} = \binom{3}{3} \text{ und } 3 = \binom{3}{1} = \binom{3}{2}.$$

Bemerkung. Die Koeffizienten in der binomischen Formel kann man im *Pascalschen Dreieck* darstellen. In der $n-$ten Zeile stehen die Werte von $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Wegen Lemma 1.5 ist jede Zahl im Inneren des Dreiecks die Summe der beiden unmittelbar über ihr stehenden Zahlen.

$n=0$							1							
$n=1$						1		1						
$n=2$					1		2		1					
$n=3$				1		3		3		1				
$n=4$			1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1		
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	

Satz 1.8 (Geometrische Reihe) Seien $x \neq 1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe. □

2 Die Reellen Zahlen, das Supremum und Infimum

2.1 Körper, Vollständigkeit, reelle Zahlen

Die reellen Zahlen sind die wichtigsten Zahlen für die mathematische Analysis. Aus der Schule wissen Sie, dass man reelle Zahlen mit Punkten auf der Zahlengerade identifizieren kann und dass *jeder* Punkt auf der Gerade zu einer Zahl gehört. Diese Definition ist zwar anschaulich aber nicht sehr praktisch, da man nicht sofort alle Eigenschaften der reellen Zahlen, die man für die Analysis braucht, erkennt.

Wir führen reelle Zahlen axiomatisch ein - ein Zugang nach Hilbert.

Definition. Ein *Körper* ist ein Tripel $(\mathcal{K}, +, \cdot)$, wobei $\mathcal{K}$ eine Menge und $+, \cdot$ Abbildungen von $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}$ sind, der die Eigenschaften I-III efüllt. $+$ und $\cdot$ werden Addition und Multiplikation genannt. Wir schreiben

$$(a, b) \mapsto a + b, (a, b) \mapsto a \cdot b = ab.$$

<u>I. Addition</u>

(A.1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ gilt

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(A.2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathcal{K}$ gilt

$$x + y = y + x.$$

(A.3) Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0 \in \mathcal{K}$, so dass

$$x + 0 = x \text{ für alle } x \in \mathcal{K}.$$

(A.4) Existenz des Negativen: Zu jedem $x \in \mathcal{K}$ existiert eine Zahl $-x \in \mathcal{K}$, so dass

$$x + (-x) = 0.$$

Bemerkung. Für $x, y \in \mathcal{K}$ schreiben wir $x - y := x + (-y)$.

<u>II. Multiplikation</u>

(M.1) Assoziativgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ gilt

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(M.2) Kommutativgesetz: Für alle $x, y \in \mathcal{K}$ gilt

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(M.3) Existenz der Eins: Es gibt ein Element $1 \in \mathcal{K}$, so dass

$$x \cdot 1 = x \text{ für alle } x \in \mathcal{K}.$$

(M.4) Existenz des Inversen: Zu jedem $x \in \mathcal{K}$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $x^{-1} \in \mathcal{K}$, so dass $x \cdot x^{-1} = 1$.

<u>III. Distributivgesetz</u>

(D) Für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Bemerkung. In der Literatur werden Eigenschaften I-III oft „Körperaxiome“ genannt. Für uns ist I-III einfach Teil der Definition eines Körpers.

Definition. Ein *geordneter Körper* ist ein Körper $\mathcal{K}$ zusammen mit einer Relation $>$, welche die Eigenschaft IV erfüllt.

IV. Ordnung

In $\mathcal{K}$ können gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet (Schreibweise $x > 0$), so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(O.1) Trichotomie: Für jedes x gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0, x = 0, -x > 0.$$

(O.2) Abgeschlossenheit gegenüber Addition.

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \Rightarrow x + y > 0.$$

(O.3) Abgeschlossenheit gegenüber Multiplikation.

$$x > 0 \text{ und } y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0.$$

Definition. Man definiert für x, y in einem geordeneten Körper $\mathcal{K}$:

- $x > y$ heißt $x - y > 0$
- $x < y$ heißt $y > x$
- $x \geq y$ heißt $x > y$ oder $x - y = 0$
- $x \leq y$ heißt $x < y$ oder $x - y = 0$

Bemerkung. Man kann anhand der obigen Eigenschaften zeigen, dass für einen Körper, der aus mehr als einem Elementen besteht, $1 \neq 0$ gilt. Auch kann man alle Rechenregeln für die Addition, Multiplikation und für Ungleichungen, wie zum Beispiel:

- $-0 = 0$,
- $-(-x) = x$,
- $x \cdot 0 = 0$,
- $(x^{-1})^{-1} = x$ falls $x \neq 0$,
- $x - y = 0$ ist äquivalent zu $x = y$,
- $x < y \;\Rightarrow\; -x > -y$

beweisen (Übung).

Beispiel. Die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ sind kein Körper, da sie (A.3), (A.4), (M.4) nicht erfüllen.

Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ erfüllen zwar (A.3) und (A.4) aber nicht (M.4). Also sind sie auch kein Körper.

Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p \text{ und } q \text{ teilerfremd} \right\}$ sind ein geordneter Körper.

Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathcal{K}$. M heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $s \in \mathcal{K}$ gibt, sodass $x \leq s$ für alle $x \in M$. s heißt eine *obere Schranke* von M.

Definition. m_0 ist *ein Maximum* von M, falls $m_0 \in M$ und m_0 eine obere Schranke zu M ist, d.h. $x \leq m_0$ für alle $x \in M$.

Behauptung. Wenn ein Maximum m_0 von M existiert, so ist es eindeutig. Man schreibt dann $m_0 = \max(M)$.

Beweis. Sei m_0' ein weiteres Maximum. Dann gilt $m_0 \leq m_0'$ und auch $m_0' \leq m_0$. Die Ungleichung $m_0 \leq m_0'$ heißt nach Definition, dass

$$\text{(ai) } m_0 < m_0' \text{ (d.h. } m_0 - m_0' > 0) \quad \text{oder!} \quad \text{(aii) } m_0 = m_0' \text{ (d.h. } m_0 - m_0' = 0).$$

Die Ungleichung $m_0' \leq m_0$ heißt nach Definition, dass

$$\text{(bi) } m_0' < m_0 \text{ (d.h. } -(m_0 - m_0') > 0) \quad \text{oder!} \quad \text{(bii) } m_0 = m_0'.$$

Hier ist „oder!“ das ausschließende oder, d.h. es gilt immer genau eine der zwei Möglichkeiten.

Angenommen es gilt (ai). Dann sind beide (bi) und (bii) ausgeschlossen nach (O.1). Also muss (aii) gelten, d.h. $m_0 = m_0'$. □

Bemerkung. Eine *nach unten beschränkte* Menge, eine *untere Schranke* und das *Minimum* definiert man analog.

Definition. Ein *(Dedekind-)vollständiger Körper* ist ein geordneter Körper $\mathcal{K}$, der die Eigenschaft V erfüllt.

V. Vollständigkeit (Dedekind-Vollständigkeit)

(V) Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathcal{K}$ hat ein Supremum.

Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathcal{K}$. $s \in \mathcal{K}$ heißt ein *Supremum von M*, falls

(i) $x \leq s \; \forall x \in M$,

(ii) $(\exists t \in \mathcal{K} : x \leq t \; \forall x \in M) \Rightarrow s \leq t$.

Axiom. Es gibt einen vollständigen, geordneten Körper, bezeichnet mit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $\mathbb{R}$ heißt die Menge der *reellen Zahlen.*

Bemerkung. 1) Es kann gezeigt werden, dass es „im wesentlichen“ nur $\mathbb{R}$ als einen vollständigen geordneten Körper gibt. Genauer: $\mathbb{R}$ ist bis auf Isomorphie der einzige Dedekind-vollständige geordnete Körper, siehe Appendix A in [3].

2) Die obige Einführung der reellen Zahlen ist nicht konstruktiv. Ihre Existenz wird anhand des obigen Axioms einfach vorausgesetzt. Es gibt aber einen anderen (eleganteren und vor allem konstruktiven) Zugang. Hier werden nur die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ axiomatisch (durch die Peano-Axiome) eingeführt. Aus $\mathbb{N}$ werden erst die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die rationalen zahlen $\mathbb{Q}$ konstruiert. Danach werden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, mit Hilfe der Technik der s.g. Dedekindschen Schnitte, konstruiert, siehe Abschnitte 5, 9 und 10 in [2]. Anschließend kann man zeigen, dass diese so konstruierte Menge $\mathbb{R}$ die obigen Eigenschaften I-V erfüllt, d.h. sie ist ein vollständiger, geordneter Körper.

3) Nach dieser Einführung von $\mathbb{R}$ stellt sich die Frage, ob die früher eingeführten Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Um $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ zu zeigen, definiert man erst $\mathcal{N}$ als die kleinste Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
$$1 \in \mathcal{N},\ (x \in \mathcal{N} \ \Rightarrow\ x+1 \in \mathcal{N}).$$
Man kann dann zeigen, dass $\mathcal{N}$ die Peano-Axiome erfüllt. Deswegen identifiziert man $\mathcal{N}$ mit $\mathbb{N}$ und bekommt $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ ein Körper ist, gilt auch $-n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ sowie $0 \in \mathbb{R}$, sodas $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Weil auch $x \cdot \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$, folgt $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Satz 2.1 Hat eine Teilmenge M von einem geordneten Körper $\mathcal{K}$ ein Supremum, dann ist dieses eindeutig bestimmt. Es wird mit $\sup(M)$ bezeichnet.

Beweis. Seien $s, t \in \mathcal{K}$ Suprema von M. Wir möchten Zeigen, dass $s = t$. Beide s und t sind nach Definition obere Schranken von M. Da s ein Supremum ist, muss $s \leq t$ gelten. Aus dem Grund, dass t ein Supremum ist, muss gleichzeitig $t \leq s$ gelten. Wir erhalten also $s = t$. □

Bemerkung. 1. Das Supremum ist also **die** kleinste obere Schranke. Analog definieren wir unten die größte untere Schranke: das Infimum.

2. Nach dem obigen Axiom existiert $\sup M$ für jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$.

Beispiel. Wir betrachten die zwei Teilmengen
$$M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \text{ und } M_2 := \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}.$$
Für M_1 ist offenbar $\sup M_1 = \max M_1 = 1$. Für M_2 erwarten wir, dass $\sup M_2 = 1$ gilt. Allerdings wissen wir noch nicht, ob es vielleicht eine Zahl $a < 1$ gibt, sodass $x \leq a$ für alle $x \in M_2$. Dafür müsste es in $\mathbb{R}$ eine Lücke zwischen a und 1 geben. Dies schließt das archimedische Prinzip (Satz 2.3), oder genauer Korollar 2.4, aus.

Definition. Sei $\mathcal{K}$ ein geordneter Körper und $M \subset \mathcal{K}$. r heißt ein *Infimum von M*, falls

(i) $x \geq r\ \forall x \in M$,

(ii) $(\exists t \in \mathcal{K} : x \geq t\ \forall x \in M) \Rightarrow t \leq r$.

Notation: $r = \inf M$. (das Infimum ist eindeutig, falls es existiert - genauso wie das Supremum)

Satz 2.2 Für jede nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ existiert $\inf(M)$.

Beweis. Wir betrachten die Menge $-M := \{-m : m \in M\}$. Diese Menge ist nach oben beschränkt, da M nach unten beschränkt ist. Aus (V) folgt, dass $\sup(-M)$ existiert. Es gilt also $-m \leq \sup(-M)$ für alle $m \in M$. Also
$$m \geq -\sup(-M)\ \forall m \in M.$$
Das heißt, dass $-\sup(-M)$ eine untere Schranke von M ist. Zu zeigen bleibt, dass dies die größte untere Schranke ist. Sei dafür $t > -\sup(-M)$ auch eine untere Schranke. Dann gilt $m \geq t > -\sup(-M)$ für alle $m \in M$. Also $-m \leq -t < \sup(-M)$ für alle $m \in M$. Das ist ein Widerspruch damit, dass $\sup(-M)$ die kleinste obere Schranke von $-M$ ist. □

Bemerkung. 1) Offenbar, falls für ein $M \subset \mathbb{R}$ das Maximum $\max M$ existiert, dann gilt
$$\sup M = \max M.$$
Analog, falls das Minimum existiert, dann gilt
$$\inf M = \min M.$$

2) Für eine nach oben unbeschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\sup(M) = \infty$$

und für eine nach unten unbeschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\inf(M) = -\infty.$$

Bemerkung. Der Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, wie wir in Proposition 2.6 zeigen.

Anhand der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ kann gezeigt werden, dass $\mathbb{N}$ unbeschränkt ist (bezüglich der Ordnung aus $\mathbb{R}$). Dies heißt Archimedisches Prinzip.

Satz 2.3 (Archimedisches Prinzip) . Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist nicht beschränkt, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > x$.

Beweis. Wir benutzen den Widerspruchsbeweis. Angenommen $\mathbb{N}$ wäre beschränkt. Nach der Vollständigkeit (V) ist $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Da $0 < 1 \leq s$, gilt $s \neq 0$. Aus $n \leq s \; \forall n \in \mathbb{N}$ folgt auch $2n \leq s \; \forall n \in \mathbb{N}$, weil auch $2n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir bekommen also $n \leq \frac{s}{2} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Das heißt, dass $\frac{s}{2}$ eine weitere obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Weil $\frac{s}{2} < s$, ist dies ein Widerspruch damit, dass s die kleinste obere Schranke ist. ☐

Korollar 2.4 Zu jedem $\varepsilon \in (0, \infty)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Nach Satz 2.3 existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Also gilt $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ☐

Bemerkung. Mit diesem Korollar wissen wir, dass es in $\mathbb{R}$ keine „Lücken“ gibt. Zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen $a < b$ gibt es nämlich die Zahl $a + \frac{1}{n}$, wobei n aus Korollar 2.4 für $\varepsilon := b - a$ kommt.

Beispiel. Nun wissen wir für das obige Beispiel, dass für $M_2 := \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ die Zahl 1 die kleinste obere Schranke ist, d.h.

$$\sup(M_2) = 1,$$

und dass $\max(M_2)$ nicht existiert. Für jeden Kandidaten $m_0 \in M_2$ für das Maximum gibt es nämlich eine Zahl m mit $m_0 < m < 1$, d.h. ein $m \in M$ größer als m_0.

Proposition 2.5 Es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{Q}$, für die $x^2 = 2$.

Beweis. Angenommen ein $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (d.h. mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd) erfüllt $x^2 = 2$. Wegen $p^2 = 2q^2$ ist p^2 gerade und deswegen auch p gerade, d.h. $p = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten $2q^2 = p^2 = 4k^2$, also ist q^2 gerade und damit auch q gerade. Dies ist ein Widerspruch damit, dass p und q teilerfremd sind. ☐

Dieses Lemma besagt, dass $\sqrt{2}$ eine *irrationale* Zahl ist. Die aufmerksame Leserin hat gemerkt, dass wir bisher die Quadratwurzel nicht definiert haben. Wir wissen noch nicht, dass es eine reelle Lösung von $x^2 = 2$ gibt. Erst in Sec. 4 werden wir dies beweisen. Erst dann können wir $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ definieren.

Proposition 2.6 $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht die Dedekind-Vollständigkeit (V).

Beweis. Sei $M := \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$. Angenommen $s := \sup M$ existiert in $\mathbb{Q}$ (d.h. $s \in \mathbb{Q}$). Da z.B. $\frac{4}{3} \in M$, gilt $s > 1$.

(i) Da s die kleinste obere Schranke ist, folgt $(s + \alpha)^2 \geq 2$ für alle $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{Q}$. Also

$$s^2 - 2 \geq -\alpha(2s + \alpha) \; \forall \alpha > 0.$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist negativ. Nach Korollar 2.4 kann aber α beliebig klein gewählt werden. Somit kann die rechte Seite beliebig klein (negativ) gemacht werden. Deswegen muss $s^2 - 2 \geq 0$, d.h. $s^2 \geq 2$, gelten. Wäre nämlich $s^2 - 2 < 0$, dann würde es ein passendes (kleines) $\alpha > 0$ geben, sodass $s^2 - 2 < -\alpha(2s + \alpha)$.

(ii) Es gilt auch $(s - \alpha)^2 < 2$ für alle $0 < \alpha < 1, \alpha \in \mathbb{Q}$, weil $s = \sup M$. Also

$$s^2 - 2 < \alpha(2s - \alpha) \ \forall \alpha \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha < 1.$$

Die rechte Seite ist positiv, da $s > 1$. Da man α beliebig klein wählen kann, folgt analog zu (i) dass $s^2 - 2 \leq 0$, d.h. $s^2 \leq 2$.

Aus (i) und (ii) bekommen wir $s^2 = 2$, also ein Widerspruch mit Proposition 2.5. $\square$

2.2 Intervalle in $\mathbb{R}$

Wir definieren:

a) Abgeschlossenes Intervall. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Dann setzt man

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

b) Offenes Intervall. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Man setzt

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

c) Halboffenes Intervall. Für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

d) Uneigentliche Intervalle. Sei $a \in \mathbb{R}$. Man definiert

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \quad (a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \quad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

Bemerkung. Aus der Definition vom Maximum, Supremum, Minimum und Infimum folgern wir:

Für ein abgeschlossenes Intervall $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup(I) = \max(I) = b, \ \inf(I) = \min(I) = a.$$

Für ein offenes Intervall $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup(I) = b, \ \inf(I) = a,$$

aber weder das Maximum noch das Minimum von I existiert. Für ein uneigentliches Intervall $I := (a, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist

$$\inf(I) = a, \quad \sup(I) = \infty,$$

aber weder das Maximum noch das Minimum von I existiert.

Die entsprechenden Aussagen für andere Typen von Intervallen sind dann klar.

2.3 Der Absolut-Betrag

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren den *(Absolut-)Betrag* von x als

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Satz 2.7 Seien $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x| \geq 0$ und

$$|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \quad \text{(Definitheit)},$$

$$|xy| = |x||y| \quad \text{(Multiplikativität)},$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}.$$

Beweis. Die Aussage $|x| \geq 0$ sowie die Definitheit sind offensichtlich. Für die Multiplikativität notieren wir erst, dass $x = x_0$ oder $x = -x_0$, kurz $x = \pm x_0$, wobei $x_0 := |x|$. Analog $y = \pm y_0$, wobei $y_0 := |y|$. Es gilt also

$$|xy| = | \pm x_0 \cdot (\pm y_0)| = | \pm x_0 y_0| = |x_0 y_0| = x_0 y_0 = |x||y|.$$

Für die Dreiecksungleichung folgt wegen $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$, dass

$$x + y \leq |x| + |y|. \tag{2.1}$$

Aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ folgt

$$-(x + y) \leq |x| + |y|. \tag{2.2}$$

Insgesamt bekommen wir von (2.1) und (2.2) die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

2.4 Die Bernoullische Ungleichung

Die folgende Bernoullische Ungleichung ist eine wichtige Ungleichung, welche zahlreiche Anwendungen hat.

Lemma 2.8 (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$. Dann gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

Beweis. Wir verwenden wieder die vollständige Induktion.

1. Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = 0$, es ist $(1 + x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x = 1$.
2. Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, es gelte die Aussage für n (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann folgt

   $$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n \cdot (1 + x) \\ &\overset{\text{(IV)}, 1+x>0}{\geq} (1 + nx) \cdot (1 + x) \;=\; 1 + nx + x + nx^2 \;\geq\; 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

   es gilt also (2.3) für n ersetzt durch $n + 1$.

□

3 Folgen, Konvergenz, Grenzwerte

3.1 Folgen und Konvergenzeigenschaften

Definition. Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Wir schreiben

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

oder kurz $(a_n)_n$ oder sogar nur (a_n). Um klar zu machen, dass es eine Folge in $\mathbb{R}$ ist, schreiben wir oft $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

Die Zahlen a_n heißen *Glieder* der Folge (a_n).

Bemerkung. In Anwendungen kann eine Folge z.B. Messdaten in der Zeit beschreiben. Als Beispiel kann a_n die Geschwindigkeit der Strömung einer Flüßigkeit im Rohr in der $n-$ten Sekunde sein. Oder es könnte der Kontostand eines Festgeldkontos im $n-$ten Monat sein. In Anwendungen läuft der Index n natürlich nur bis zu einer endlichen Zahl. Mathematisch ist es aber möglich (und für die Analysis extrem wichtig) unendliche Folgen zu betrachten.

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Falls (a_n) gegen a konvergiert, so nennt man a den *Grenzwert* oder den *Limes* der Folge und schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

oder kurz $\lim a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Definition. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, nennt man *Nullfolge*.

Bemerkung. Geometrisch bedeutet $\lim a_n = a$, dass in jeder noch so kleinen $\varepsilon-$Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a (mit $\varepsilon > 0$) fast alle Glieder der Folge liegen. Genauer sind es alle bis auf endlich viele.

Man kann auch sagen, dass für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Glieder a_n mit „n groß genug" in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

Definition. Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *divergent gegen* ∞ (bzw. $-\infty$), wenn zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < K)\ \forall n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim a_n = \infty$ oder $a_n \to \infty$ (bzw. $\lim a_n = -\infty$ oder $a_n \to -\infty$).

Beispiel.
1. Die einfachste Folge ist die konstante Folge (a_n) mit $a_n = a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Hier gilt offenbar $\lim a_n = a$.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

   $$a_n := \frac{\alpha}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

   ist eine Nullfolge.

   In der Tat: Sei $\epsilon > 0$ gegeben und beliebig. Nach Korollar 2.4 existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{|\alpha|}{N} < \epsilon$. Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

   $$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{|\alpha|}{n} \leq \frac{|\alpha|}{N} < \epsilon.$$

Dies zeigt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, wie behauptet.

3. Die Folge $(a_n) = ((-1)^n)$ ist divergent.

   Wir zeigen dies mit dem Widerspruchsbeweis. Angenommen $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert (zu $\epsilon = 1$) ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Es folgt dann aber für alle $n \geq N$

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2,$$

   mit Hilfe der Dreiecksungleichung. Wir erhalten also $2 < 2$, ein Widerspruch.

4. Für $a_n := \frac{n}{n+42}$ gilt $\lim a_n = 1$.

   Weil $\left|\frac{n}{n+42} - 1\right| = \frac{42}{n+42} =: b_n$, wird die Aussage bewiesen, wenn man gezeigt hat, dass für $\varepsilon > 0$ beliebig ein $N > 0$ existiert, sodass $|b_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. In anderen Worten ist zu zeigen, dass $b_n \to 0$. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Korollar 2.4 (angewandt auf $\varepsilon/42$) ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{N+42} < \frac{\varepsilon}{42}$. Damit gilt $\frac{42}{N+42} < \varepsilon$ und also $b_n = \frac{42}{n+42} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $b_n = |b_n|$, zeigt dies die Aussage.

Satz 3.1 (Reziprokes einer gegen $\pm\infty$ divergenten Folge) Falls die Folge (a_n) divergent gegen ∞ oder $-\infty$ ist, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Bemerkung. Für $n < n_0$ ist $\frac{1}{a_n}$ möglicherweise nicht definiert, da $a_n = 0$ möglich ist.

Beweis. Im Fall $\lim a_n = \infty$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Dies folgt aus der Definition der Divergenz gegen ∞. Zu zeigen ist die Konvergenz $1/a_n \to 0$. Sei also $\varepsilon > 0$. Da $a_n \to \infty$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq N$. Also gilt

$$\frac{1}{a_n} < \varepsilon \ \forall n \geq N.$$

Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $1/a_n \to 0$.

Im Fall $\lim a_n = -\infty$ gilt $\lim(-a_n) = \infty$ und wie im ersten Teil gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{-a_n} < \varepsilon \ \forall n \geq N.$$

Das heißt, $1/a_n \to 0$. □

Satz 3.2 (Reziprokes einer Nullfolge) Sei (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ (bzw. $a_n < 0$ für alle $n \geq n_0$) mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann divergiert die Folge $(1/a_n)$ gegen ∞ (bzw. gegen $-\infty$).

Beweis. Der Beweis bleibt eine Übungsaufgabe. □

Trotz der nicht-Vollständigkeit von $\mathbb{Q}$ liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, d.h. jede reelle Zahl kann beliebig gut mit einer Folge rationaler Zahlen approximiert werden:

Satz 3.3 $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge rationaler Zahlen (r_n), die gegen x konvergiert.

Beweis. Erst zeigen wir, dass in jedem Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ eine rationale Zahl liegt. Weil $b-a > 0$, folgt aus Korollar 2.4, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\frac{1}{n} < b-a$. Also $bn - an > 1$, d.h. der Abstand zwischen bn und an ist gröger als 1. Es muss also zwischen an und bn eine ganze Zahl liegen:

$$\exists k \in \mathbb{Z}: \ an < k < bn, \ \text{d.h. } a < \frac{k}{n} < b.$$

Nun zeigen wir, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ gibt mit $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Sei also $x \in \mathbb{R}$. Nach dem ersten Schritt gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists r_n \in \mathbb{Q}: \ r_n \in \left(x, x + \frac{1}{n}\right).$$

Also $|r_n - x| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und somit $r_n \to x$ für $n \to \infty$. □

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $M \geq 0$ gibt, sodass

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sie heißt *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \leq K \ (\text{bzw. } a_n \geq K) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Satz 3.4 Jede konvergente Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Damit gilt für $n \geq N$:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Setze $M := \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung.

- Satz 3.4 ist offenbar äquivalent zu:
  „Jede unbeschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist divergent."
- Es gilt **nicht**, dass jede beschränkte Folge konvergent wäre. Zum Beispiel, die Folge (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.

Beispiel. Wir betrachten die Folge $(x^n)_n$ für unterschiedliche Werte von x.

a) $x > 1$. Hier gilt $\lim x^n = \infty$.

Sei dafür $K > 1$ beliebig. Zu zeigen ist, dass $x^n > K$ für alle n groß genug. Da $x > 1$, ist $x = 1 + a$ mit einem $a > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt

$$x^n = (1+a)^n \geq 1 + na \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also reicht zu zeigen, dass $1 + na > K$ für n groß genug. Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es aber $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \frac{K-1}{a}$. Damit gilt

$$1 + na > K \ \forall n \geq n_0.$$

b) $|x| < 1$. Es gilt $\lim x^n = 0$.

Dies zeigen wir mit Hilfe on a). Es gilt nämlich nach a), dass $\lim \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = \infty$. Mit Satz 3.1 folgt $\lim |x|^n = 0$. Da $|x|^n = |x^n|$ und weil die Konvergenz von $|x|^n$ gegen Null äquivalent ist zur Konvergenz von x^n gegen Null, folgt

$$\lim x^n = 0.$$

c) $x = 1$. Dann gilt $\lim x^n = 1$ (konstante Folge).

d) $x < -1$. Hier divergiert (x^n), da (x^n) unbeschränkt ist.

e) $x = -1$. Auch hier divergiert (x^n), wie wir schon oben gesehen haben.

Satz 3.5 (Eindeutigkeit des Limes) Falls eine Folge (a_n) gegen a und b konvergiert, dann ist $a = b$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ zwei Grenzwerte einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zu $\epsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$ existieren dann zwei Indizes $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N_a$ und $|a_n - b| < \epsilon$ für alle $n \geq N_b$. Es gilt also für alle $n \geq \max\{N_a, N_b\}$ (mit Hilfe der Dreiecksungleichung)

$$|a-b| \;=\; |a - a_n + a_n - b| \;\leq\; |a - a_n| + |a_n - b| \;<\; \epsilon + \epsilon \;=\; |a-b|.$$

Deswegen $|a - b| < |a - b|$, ein Widerspruch. □

Satz 3.6 (Summe und Produkt konvergenter Folgen) Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann konvergieren auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ und die Produktfolge $(a_n b_n)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

Beweis. Sei $a := \lim a_n, b := \lim b_n$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$

$$|a_n - a| \;<\; \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad |b_n - b| \;<\; \frac{\epsilon}{2}.$$

Es folgt dann für alle $n \geq N$, dass

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \;=\; |a_n - a + b_n - b| \;\leq\; |a_n - a| + |b_n - b| \;<\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon,$$

wie gefordert.

Für das Produkt sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig. Zunächst gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|a_n b_n - ab| \;=\; |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \;\leq\; |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Aus Satz 3.4 folgt, dass (a_n) beschränkt ist, das heißt es existiert $k > 0$, sodass $|a_n| \leq k \forall n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$|a_n b_n - ab| \;\leq\; k|b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|.$$

Nun existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2|b| + 1} \quad \text{für alle } n \geq N_a, \qquad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \text{für alle } n \geq N_b.$$

Wähle $N = \max\{N_a, N_b\}$. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|a_n b_n - ab| \;<\; k \cdot \frac{\epsilon}{2k} + |b| \cdot \frac{\epsilon}{2|b| + 1} \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon$$

Das zeigt $\lim a_n b_n = ab$. □

Satz 3.7 (Quotient konvergenter Folgen) Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim b_n \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und die Quotientenfolge $(a_n/b_n)_{n\geq n_0}$ konvergiert. Für ihren Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Beweis. Wegen Satz 3.6 gilt $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \lim \frac{1}{b_n}$, falls $(1/b_n)$ konvergiert. Wir zeigen, dass dies der Fall ist und $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$. Setze $b := \lim b_n$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{1}{b_n b}(b - b_n)\right| = \frac{1}{|b_n||b|}|b - b_n|$$

ist zu zeigen, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\frac{1}{|b_n||b|}|b - b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Wegen $b_n \to b$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|b_n - b| < |b|/2$ für alle $n \geq n_0$.

$$|b_n| \;=\; |b_n - b + b| \;\geq\; |b| - |b_n - b| \;>\; |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Also $|b_n||b| > |b|^2/2$ und somit $\frac{1}{|b_n||b|} < \frac{2}{|b|^2}$ für alle $n \geq n_0$. Das zeigt die Beschränktheit von $\left(\frac{1}{|b_n||b|}\right)$.

Außerdem, da $b_n \to b$, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon|b|^2/2$ für alle $n \geq n_1$.

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{1}{|b_n||b|}|b - b_n| < \frac{2}{|b|^2}\frac{\varepsilon|b|^2}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N := \max\{n_0, n_1\}.$$

□

Beispiel. 1. Sei $a_n := \frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n^2}}$. Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_n$ im Zähler erfüllt nach Satz 3.6

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim 1 + \lim \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

und analog gilt für den Nenner $\lim\left(3 - \frac{5}{n^2}\right) = 3$. Da also die Folge im Zähler sowie die im Nenner konvergiert, folgt aus Satz 3.7, dass

$$\lim a_n = \frac{\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim\left(3 - \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

2. Wir kommen zurück zum Beispiel $a_n := \frac{n}{n+42}$ und beweisen $\lim a_n = 1$ auf eienr einfacheren Weise. Hier divergiert zwar der Zähler sowie der Nenner, aber wir können a_n umschreiben als

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{42}{n}}.$$

Es folgt wieder unter Anwendung der Sätze 3.7 und 3.6

$$\lim a_n = \frac{\lim 1}{\lim\left(1 + \frac{42}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Satz 3.8 (Größenvergleich) Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen reeller Zahlen und für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Beweis. Da $\lim b_n - \lim a_n \geq 0$, folgt aus Satz 3.6

$$\lim(b_n + (-a_n)) = \lim(b_n - a_n) \geq 0.$$

Zu zeigen reicht also, dass falls $c_n \geq 0$ und (c_n) konvergiert, dann $\lim c_n \geq 0$. Angenommen es gilt für solche Folge $\lim c_n = -\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - (-\varepsilon)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Aus

$$c_n + \varepsilon \leq |c_n + \varepsilon| < \varepsilon \ \forall n \geq N$$

folgt $c_n < 0 \ \forall n \geq N$, ein Widerspruch. □

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

i) *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

ii) *streng monoton wachsend*, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

iii) *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

iv) *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

v) *monoton*, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist,

vi) *streng monoton*, falls sie streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Satz 3.9 Jede beschränkte monotone Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergiert. Jede unbeschränkte monotone Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ divergiert gegen ∞ oder gegen $-\infty$.

Beweis. Sei erst (a_n) beschränkt und monoton. Setze

$$M := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad a := \sup M < \infty.$$

Wir werden zeigen, dass $a_n \to a$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da a das Supremum ist, existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_N > a - \epsilon$. Da (a_n) monoton wächst, gilt für alle $n \geq N$

$$a_n \geq a_N > a - \epsilon.$$

Da weiter a obere Schranke von M ist, musst außerdem $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten und es folgt $|a_n - a| = a - a_n < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Dies zeigt die Konvergenz.

Zweitens sei (a_n) unbeschränkt und monoton. Es reicht eine monoton wachsende Folge zu betrachten (sonst betrachte $(-a_n)$). Aus der Unbeschränktheit folgt, dass es für jedes $K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_N > K$. Da (a_n) monoton wächst, ist $a_n \geq a_N > K$ für alle $n \geq N$, d.h. $a_n \to \infty$. □

Bemerkung. Es ist wichtig zu verstehen, dass nicht jede konvergente Folge monoton ist, z.B. die Folge $(\frac{(-1)^n}{n})$ konvergiert gegen 0, ist aber nicht monoton. Auch nicht jede gegen $\pm\infty$ divergente Folge ist monoton. Also, z.B. falls $a_n \to \infty$, müssen die Glieder a_n nicht immer größer werden. Ein Beispiel ist die gegen ∞ divergente Folge $((-1)^n + \frac{n}{2})$.

Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes oder der Bernoullischen Ungleichung kann man folgendes Lemma zeigen.

Lemma 3.10 Für alle $q \in [0, 1)$ gibt es ein $C > 0$, sodass $q^n \leq \frac{C}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge (nq^n) beschränkt.

Beweis. Für $q = 0$ ist die Aussage klar. Sei $q \in (0, 1)$. Dann gilt $\frac{1}{q} = 1 + x$ mit einem $x > 0$. Wir haben also

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx,$$

wobei die Bernoulli-Ungleichung benutzt wurde. Nach dem Umschreiben erhält man

$$q^n \le \frac{1}{x}\frac{1}{n} = C\frac{1}{n}, \quad C := \frac{1}{x}.$$

$\square$

Proposition 3.11 Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in (-1,1)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^k x^n = 0.$$

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung von Lemma 3.10 und der vollständigen Induktion und wird dem Leser als Übung überlassen. $\square$

3.2 Cauchy-Folgen

Definition. Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \ge n_0$ gilt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

In einer Cauchy-Folge werden also die Abstände der Folgenglieder untereinander mit wachsendem Index beliebig klein.

Satz 3.12 (i) Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

(ii) Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergiert genau dann wenn sie Cauchy ist.

(iii) In $\mathbb{Q}$ gibt es Cauchy-Folgen, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren, d.h., deren Grenzwert nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

Bemerkung. Punkt (iii) zeigt, dass in $\mathbb{Q}$ aus der Cauchy-Eigenschaft die Konvergenz nicht folgt.

Beweis. (i) Es existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a_N| < 1$ für alle $n \ge N$. Damit folgt für alle $n \ge N$

$$|a_n| \le |a_n - a_N| + |a_n| < |a_N| + 1$$

und somit $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) „$\Rightarrow$“: Es gelte $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \ge N$. Es folgt für alle $n, m \ge N$

$$|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

„$\Leftarrow$“: Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Nach (i) ist (a_n) beschränkt. Sei für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\overline{a}_N := \inf\{a_N, a_{N+1}, \ldots\}.$$

Da $\{a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots\} \subset \{a_N, a_{N+1}, \ldots\}$, gilt $\overline{a}_N \le \overline{a}_{N+1}$ für alle N. Also ist $(\overline{a}_N)_N$ monoton wachsend. Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, ist auch $(\overline{a}_N)_N$ beschränkt. Es ist also $(\overline{a}_N)_N$ monoton und beschränkt. Nach Satz 3.9 ist $(\overline{a}_N)_N$ konvergent. Sei

$$a := \lim_{N\to\infty} \overline{a}_N.$$

Wir zeigen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Sie dafür $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert $N_0 \in N$, sodass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall n, m \geq N_0$$

wegen der Cauych-Eigenschaft und

$$|\overline{a}_N - a| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall N \geq N_0$$

wegen der Konvergenz. Außerdem, da $\overline{a}_{N_0}$ das Infimum ist, gibt es ein $n_0 \geq N_0$, sodass

$$|a_{n_0} - \overline{a}_{N_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $n \geq n_0$ gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0} - \overline{a}_{N_0}| + |\overline{a}_{N_0} - a| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Für (iii) sei $a := \sup\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Wie wir wissen, gilt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es eine Folge $(q_n) \subset \mathbb{Q}$, sodass $q_n \to a$. Aus (ii) folgt, dass (q_n) Cauchy ist. Es ist also eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die aber in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert. □

Definition. Ein Körper $\mathcal{K}$ heißt *folgenvollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in $\mathcal{K}$ konvergiert.

Bemerkung.
- Satz 3.12 sagt also, dass $\mathbb{R}$ folgenvollständig während $\mathbb{Q}$ nicht folgenvollständig sind.
- Es gilt, dass ein angeordneter Körper genau dann Dedekind-vollständig ist, wenn er folgenvollständig ist und das archimedische Prinzip erfüllt. Einen Beweis findet man im Appendix B von [3]. Wir hätten also reelle Zahlen einführen können als den geordneten Körper, der folgenvollständig und archimedisch ist.

3.3 Teilfolgen, Häufungspunkte, Limes superior, Limes inferior

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 3.13 (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Am Anfang bemerken wir, dass für jedes (a_n) beschränkt Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $a_n \in [A, B] \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nun ist die Strategie des Beweises erstens eine s.g. Intervallschachtelung von $[A, B]$ zu konstruieren. Das ist eine Folge von immer kleiner werdenden Intervallen $I_k := [A_k, B_k], k \in \mathbb{N}$ mit $I_{k+1} \subset I_k \subset [A, B]$. In jedem Intervall sollen unendlich viele Glieder der Folge (a_n) liegen. Danach wird eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \in I_k \forall k$ gewählt und gezeigt, dass diese Teilfolge konvergiert.

Wir suchen also erstens Intervalle $I_k := [A_k, B_k], k \in \mathbb{N}$, sodass

(i) $I_{k+1} \subset I_k \ \forall k \geq 2$,

(ii) $B_k - A_k = 2^{-(k-1)}(B - A)$,

(iii) in jedem I_k liegen unendlich viele Gleider a_n.

Diese Folge $(I_k)_k$ konstruieren wir induktiv. Sei $I_1 := [A,B]$. Für den Induktionsschritt sei $(I_k)_{k=1}^m$ mit (i)-(iii) konstruiert. Wir setzen $M := (A_m + B_m)/2$. Da I_m unendlich viele Glieder a_n hat, muss entweder $[A_m, M]$ oder $[M, B_m]$ unendlich viele Glieder haben. Wir setzen

$$I_{m+1} := \begin{cases} [A_m, M], & \text{falls } [A_m, M] \text{ unendlich viele Glieder hat,} \\ [M, B_m] & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun zeigen wir mit Hilfe der Induktion die Existenz einer Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $a_{n_k} \in I_k \forall k \in \mathbb{N}$. Sei $a_{n_1} := a_1$. Für den Induktionsschritt sei $(a_{n_k})_{k=1}^m$ konstruiert. Da I_{m+1} unendlich viele Glieder beinhaltet, gibt es ein $n_{m+1} > n_m$, sodass $a_{n_{m+1}} \in I_{m+1}$. Damit ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konstruiert.

Es bleibt zu zeigen, dass $(a_{n_k})_k$ konvergiert. Sei dafür $\varepsilon > 0$ beliebig. Nun gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $B_N - A_N < \varepsilon$. Da $a_{n_k} \in I_k \subset I_N$ und $a_{n_j} \in I_j \subset I_N$ für alle $k, j \geq N$, folgt

$$|a_{n_k} - a_{n_j}| < \varepsilon \ \forall k, j \geq N.$$

Die Folge $(a_{n_k})_k$ ist also Cauchy und deswegen nach Satz 3.12 konvergent. □

Definition. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$, falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

Beispiel.

1. Die Folge $(a_n) := ((-1)^n)$ hat zwei Häufungspunkte: 1 und -1, weil $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$, $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$.
2. Auch $(a_n) := ((-1)^n)$ hat die gleichen zwei Häufungspunkte, da $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{2k}) = 1$ und $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}(-1 + \frac{1}{2k+1}) = -1$.
3. Die Folge $(a_n) := (n)$ hat keinen Häufungspunkt, da jede Teilfolge unbeschränkt ist.
4. Für die Folge mit $a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ gibt es den Häufungspunkt 0, weil

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0.$$

Bemerkung. Falls (a_n) konvergiert, dann ist $a := \lim a_n$ der einzige Häufungspunkt.

Definition. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir definieren den *Limes superior* und *Limes inferior* von (a_n):

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}(\sup\{a_k : k \geq n\}), \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}(\inf\{a_k : k \geq n\}).$$

Bemerkung. Die Folge $(\sup\{a_k : k \geq n\})_n$ ist entweder monoton fallend (falls $(a_n)_n$ nach oben beschränkt) oder identisch ∞ (falls $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt). Die Folge $(\inf\{a_k : k \geq n\})_n$ ist entweder monoton wachsend (falls $(a_n)_n$ nach unten beschränkt) oder identisch $-\infty$ (falls $(a_n)_n$ nach unten unbeschränkt).

Wir haben also

$$\limsup a_n = \begin{cases} \overline{a} \in \mathbb{R}, & \text{falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ beschränkt,} \\ -\infty, & \text{falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ unbeschränkt und } (a_n) \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{falls } (a_n) \text{ nach oben unbeschränkt.} \end{cases}$$

$$\liminf a_n = \begin{cases} \underline{a} \in \mathbb{R}, & \text{falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ beschränkt,} \\ \infty, & \text{falls } (\sup\{a_k : k \geq n\})_n \text{ unbeschränkt und } (a_n) \text{ nach unten beschränkt,} \\ -\infty, & \text{falls } (a_n) \text{ nach unten unbeschränkt.} \end{cases}$$

Im ersten Fall folgt die Existenz des $\limsup$ und $\liminf$ aus Satz 3.9. Im Fall einer nach oben (bzw. unten) unbeschränkten Folge haben wir $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$), wegen der oben eingeführten Notation für den Limes einer unbeschränkten Folge.

Der Limes superior und Limes inferior existieren also immer - entweder als reelle Zahlen oder als $\pm\infty$.

Satz 3.14 (Charakterisierung des Limes superior) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = a$$

genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

(i) $a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele,

(ii) $a_m > a - \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Seien $s_n := \sup\{a_k : k \geq n\}, n \in \mathbb{N}$.

Erstens zeigen wir „$\Rightarrow$“, d.h. dass aus $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ die Aussagen (i) und (ii) für jedes $\varepsilon > 0$ folgen. Sei $a = \lim s_n$ und $\varepsilon > 0$. Da (s_n) monoton fallend ist, gilt $s_n \geq a$ $\forall n$. Also muss (ii) gelten. Sonst wäre nämlich $a_n \leq a - \varepsilon$ $\forall n \geq N$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ und damit $s_n \leq a - \varepsilon < a$, also ein Widerspruch.

Für die Richtung „$\Leftarrow$“ gelte also (i) und (ii). Zu zeigen ist $\lim s_n = a$. Aus (ii) folgt, dass $s_n > a - \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Damit muss $s_n \geq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sei und deswegen $\lim s_n \geq a$. Aus (i) folgt, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n < a + \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Daraus folgt, dass $s_n \leq a + \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Wegen der Willkürlichkeit von ε folgt $\lim s_n \leq a$. Insgesamt erhalten wir $\lim s_n = a$. $\square$

Bemerkung. Analog gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = a$$

genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gelten

(i) $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele,

(ii) $a_m < a + \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Korollar 3.15 Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $\limsup a_n$ der größte Häufungspunkt von (a_n) und $\liminf a_n$ der kleinste Häufungspunkt von (a_n).

Beweis. Für die Aussage zu limsup sei $a := \limsup a_n$ und $(\delta_k) \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\delta_k > 0$ und $\delta_k \to 0 (k \to \infty)$. Nach Satz 3.14 gilt für jedes k die Ungleichung $|a_n - a| < \delta_k$ für unendlich viele n. Sei $n_k := \min\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \delta_k\}$. Insbesondere ist $|a_{n_k} - a| < \delta_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a_{n_k} \to a \quad (k \to \infty),$$

d.h. a ist ein Häufungspunkt, weil es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\delta_k < \varepsilon$ $\forall k > N$. Also ist $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ $\forall k > N$.

Zu zeigen bliebt, dass a der *größte* Häufungspunkt ist. Sei dafür $b > a$. Nach Satz 3.14 (i) gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ a_n < a + \frac{b-a}{2} \ \forall n \geq N.$$

Deswegen gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n < \frac{a+b}{2} < b - \delta \ \text{ für ein } \ \delta > 0.$$

Also ist b kein Häufungspunkt.

Dei Aussage zu liminf wird analog gezeigt. $\square$

Bemerkung. Es folgt, dass falls $a_n \to a \in \mathbb{R}$, dann ist $\limsup a_n = \liminf a_n = a$, weil a der einzige Häufungspunkt ist.

4 Wurzeln von reellen Zahlen

Wir möchten beweisen, dass für positive reelle Zahlen die Quadratwurzel (sowie die k-te Wurzel) existiert. Eine reelle Zahl $a > 0$ ist also gegeben und wir suchen ein $x > 0$, sodass $x^2 = a$. Also suchen wir die Seitenlänge des Quadrats mit Flächeninhalt a. Wir versuchen einen iterativen Zugang. Wir raten eine Zahl $x_0 > 0$ und betrachten das Rechteck mit Seitenlängen x_0 und a/x_0 (sodass der Flächeninhalt a ist). Um näher an ein Quadrat zu kommen, wählen wir im nächsten Schritt das Rechteck mit einer Seitenlänge $x_1 := \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$ (also als das arithmetische Mittel der vorherigen Seitenlängen) und der anderen Seitenlänge a/x_1 (wieder also mit Flächeninhalt a). Im nächsten Schritt hat das Rechteck Seitenlängen $x_2 := \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$ und a/x_2, usw. Da in jedem Schritt einer der Seitenlängen als das arithmetische Mittel der vorherigen Seitenlänge gewählt wird, formt sich das Rechteck immer näher zu einem Quadrat um. Der folgende Satz zeigt, dass diese Iteration wirklich zum Ziel führt.

Satz 4.1 Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen. Betrachte die Folge $(x_n)_n$ definiert durch die Rekursion

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}), \; n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen ein $x > 0$, sodass $x^2 = a$. Es gibt genau ein $x > 0$, sodass $x^2 = a$.

Beweis. 1) Offenbar gilt $x_n > 0 \; \forall n \geq 0$. Rigoros kann man dies mit der vollständigen Induktion sehr einfach zeigen.

2) $x_n^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weil

$$x_n^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a = \frac{1}{4}\left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0.$$

3) $x_{n+1} \leq x_n \; \forall n \geq 0$, weil

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - a\right) \geq 0$$

wegen 2).

4) (x_n) ist konvergent, da nach 3) monoton fallend und nach 1) nach unten beschränkt. Außerdem gilt

$$x := \lim x_n \geq 0,$$

weil $x_n > 0 \; \forall n$. Nun ist zu zeigen, dass $x^2 = a$. Aus (4.1) folgt, dass

$$2x_{n+1}x_n = x_n^2 + a.$$

Der Grenzwert der linken Seite is $2 \lim(x_{n+1}) \lim(x_n) = 2x^2$ und der Grenzwert der rechten Seite ist $x^2 + a$. Es folgt also $2x^2 = x^2 + a$, d.h. $x^2 = a$.

Weil $x^2 = a > 0$ ist tatsächlich $x > 0$.

Als letztes zeigen wir die Eindeutigkeit der positiven Lösung von $x^2 = a$. Sei $y^2 = a, y > 0$. Dann gilt

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Weil $x + y > 0$, muss $x - y = 0$, d.h. $x = y$, gelten. □

Definition. Die *Quadratwurzel* einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung x der Gleichung $x^2 = a$. Notation: $\sqrt{a}$.

Bemerkung.

- Für $a = 0$ ist $\sqrt{0} = 0$.
- Für $a > 0$ gibt es genau zwei reelle Lösungen der Gleichung $x^2 = a$, nämlich $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$. Dies folgt, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$ gilt

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = x^2 - a = 0.$$

Also $x^2 - a = 0$ genau dann, wenn $x + \sqrt{a} = 0$ oder $x - \sqrt{a} = 0$.

Jetzt konstruieren wir auch die $k-$te Wurzel. Im Beweis wird die Bernoullische Ungleichung benutzt.

Satz 4.2 Sei $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Dann konvergiert für jeden Anfangswert $x_0 > 0$ die Folge $(x_n)_n$ gegeben durch die Rekursion

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.2}$$

Der Limes ist die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^k = a$.

Beweis. Als erstes zeigen wir die Eindeutigkeit. Seien $0 < y_1 < y_2$. Dann gilt $y_1^k < y_2^k$,. Also muss $y_1^k \neq y_2^k$ gelten.

Offenbar (einfaches Induktion-Argument) gilt $x_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge (x_n) ist nach unten beschränkt. Nun zeigen wir die Konvergenz von (x_n), indem wir noch beweisen, dass sie monoton fällt. Wir haben

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}x_n\left((k-1) + \frac{a}{x_n^k}\right) = x_n\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right)\right) \; \forall \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right)\right)^k \geq 1 + \left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right) = \frac{a}{x_n^k}$$

und deshalb

$$x_{n+1}^k = x_n^k\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right)\right)^k \geq a \; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ist $a/x_n^{k+1} \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}_0$, also $a/x_n^k \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Aus Gleichung (4.3) folgt dann

$$x_{n+1} \leq x_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. (x_n) ist monoton fallend. Wir schliessen, dass $x_n \to x \geq 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $x^k = a$. Wir schreiben (4.2) um als

$$kx_{n+1}x_n^{k-1} = (k-1)x_n^k + a.$$

Der Grenzwert der linken Seite ist kx^k und der Grenzwert der rechten Seite ist $(k-1)x^k + a$. Es muss also $kx^k = (k-1)x^k + a$ gelten. Es folgt $x^k = a$. □

Definition. Sei $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$. Die *k-te Wurzel* einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die eindeutig bestimmte nicht-negative Lösung x der Gleichung $x^k = a$. Notation: $\sqrt[k]{a}$ (bei $k = 2$ schreibt man $\sqrt{a}$).

Bemerkung. Es ist eine einfache Übung zu zeigen, dass es für $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gerade bzw. ungerade genau zwei bzw. eine reelle Lösung von $x^k = a$ gibt.

Definition. (Rationale Potenzen) Für eine reelle Zahl $x > 0$ und eine rationale Zahl $r = m/n$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$) definiert man

$$x^r := \sqrt[n]{x^m}.$$

Bemerkung. Wir werden später auch reelle Potenzen von nicht-negativen Zahlen definieren. Dafür brauchen wir aber erst die Exponentialfunktion und den Logarithmus.

Lemma 4.3 Für alle $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

(i) $x^r y^r = (xy)^r$,

(ii) $x^r x^s = x^{r+s}$,

(iii) $(x^r)^s = x^{rs}$.

Beweis. Für (i) sei $r = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

$$x^r y^r = \sqrt[n]{x^m}\,\sqrt[n]{y^m} \quad \Rightarrow \quad (x^r y^r)^n = (\sqrt[n]{x^m})^n(\sqrt[n]{y^m})^n = x^m y^m = (xy)^m$$

Aus der Eindeutigkeit der $n-$ten Wurzel folgt

$$x^r y^r = \sqrt[n]{(xy)^m} = (xy)^{\frac{m}{n}} = (xy)^r.$$

Der Beweis von (ii) und (iii) bleibt eine Übungsaufgabe. $\square$

Beispiel. Als Beispiel einer Anwendung von Lemma 4.3 berechnen wir $16^{3/4}$. Es gilt nach (iii), dass $16^{3/4} = \left(16^{1/4}\right)^3$. Wir haben also

$$16^{3/4} = \left(16^{1/4}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

5 Komplexe Zahlen, Konvergenz von komplexen Folgen

5.1 Körper der komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung der reellen Zahlen, die uns erlaubt auch, z.B., die Gleichung $x^2 = -1$ zu lösen. Wir definieren komplexe Zahlen als geordnete Paare von reellen Zahlen. Für paare von reellen Zahlen müssen wir aber erst eine Addition und Multiplikation definieren. Die gewählte Multiplikation führt zu einem Körper.

Satz 5.1 Die Menge $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der geordneten Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ versehen mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{5.1}$$

ist ein Körper mit dem Einselement (das neutrale Element der Multiplikation) $(1, 0)$. Das inverse Element zu $(a, b) \neq (0, 0)$ (bezüglich der Multiplikation) ist (c, d) mit

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Beweis. Der Nachweis der kommutativ-, assoziativ- und distributiv-Gesetze ist eine einfache Rechnung.

Die Aussagen zum Einselement, Nullelement und zum inversen Element folgen aus den Rechnungen

$$\begin{aligned}
&(a, b) \cdot (1, 0) = (1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b) = (a, b), \\
&(a, b) + (0, 0) = (a, b), \\
&(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)
\end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Definition. Der Körper in Satz 5.1 heißt der *Körper der komplexen Zahlen.* Notation: $\mathbb{C}$.

Bemerkung.

- Der Körper $\mathbb{C}$ ist **nicht** angeordnet. Man kann zeigen, dass in $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert.
- Für komplexe Zahlen $(a, 0), (b, 0)$ gilt

  $$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \qquad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

  Die Addition und Multiplikation bei solchen komplexen Zahlen funktioniert offenbar wie in $\mathbb{R}$. Man kann also Zahlen $(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}$ identifizieren und schreiben

  $$(x, 0) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

  Die Körperoperation in den zwei Körpern ist also verträglich. Wir haben $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Wir definieren die *imaginäre Einheit* $\mathrm{i} := (0, 1)$. Diese erfüllt

  $$\mathrm{i}^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

  Also ist i eine Lösung der Gleichung $x^2 = -1$.

- Jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ kann als eine Linearkombination von 1 und i geschrieben werden
$$z = (x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y.$$
In dieser Darstellung wird das Multiplizieren von komplexen Zahlen einfacher - man muss nur beachten, dass $\mathrm{i}^2 = -1$, also
$$(a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) \;=\; ac + a\mathrm{i}d + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd \;=\; ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc),$$
in Übereinstimmung mit (5.1).

- Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ heißt x der *Realteil* und y der *Imaginärteil* von z
$$\mathrm{Re}(z) = x,\ \mathrm{Im}(z) = y.$$
Wenn z im kartesischen Koordinatensystem (s.g. Gauß'sche Zahlenebene) gezeichnet wird, dann ist der Realteil die horizontale Komponente und der Imaginärteil die vertikale Komponente.

Definition. Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) heißt $\bar{z} := x - \mathrm{i}y$ die *komplex konjugierte* Zahl zu z.

Bemerkung. In der Gauß'schen Zahlenebene entsteht $\bar{z}$ aus z durch Spiegelung an der reellen (horizontalen) Achse. Es ist
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}).$$

Definition. Für eine komplexe Zahl z heißt $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$ der *Betrag* von z.

Bemerkung.

- Es gilt für $z = x + \mathrm{i}y$
$$|z|^2 = z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2.$$
Also ist $|z|$ der Abstand des Punktes z vom Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene (bezüglich der üblichen euklidischen Metrik).

- Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt der komplexe Betrag mit dem Betrag der reellen Zahlen überein, da für $z = x + \mathrm{i}0$
$$|z| = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

- Es gelten für alle $z, w \in \mathbb{C}$, $z = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $w = x_2 + \mathrm{i}y_2$
$$\begin{aligned} \overline{z + w} \;&=\; \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} \;=\; \bar{z}\bar{w}, \\ |zw| \;&=\; |z|\,|w|, \\ |\mathrm{Re}z| \;&\leq\; |z|, \quad |\mathrm{Im}z| \;\leq\; |z|, \quad |z| \;=\; |\bar{z}|, \\ |z + w| \;&\leq\; |z| + |w|. \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

5.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Konvergenz-Begriffe für Folgen komplexer Zahlen sind analog zu den für reelle Zahlen. Wir besprechen hier nur die wichtigsten Punkte.

Definition. Eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt konvergent gegen eine komplexe Zahl c, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|c_n - c| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Bemerkung. Offensichtlich ist es die gleiche Definition wie im reellen Fall - nur ist dabei der Betrag der Betrag von komplexen Zahlen.

Satz 5.2 Eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}(c_n))$ und $(\mathrm{Im}(c_n))$ konvergieren. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(c_n) + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(c_n).$$

Beweis. Sei $cn = a_n + \mathrm{i}b_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle n.

Wir zeigen erst „$\Rightarrow$“. Sei also $c_n \to c = a + ib$ $(n \to \infty)$. Es gibt also für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|c_n - c| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt

$$|a_n - a| = |\mathrm{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon, \; |b_n - b| = |\mathrm{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Es folgt also $a_n \to a, b_n \to b$ und deswegen $\lim c_n = \lim a_n + \mathrm{i} \lim b_n$.

Für „$\Leftarrow$“ sei $a_n \to a, b_n \to b$ und $c := a + ib$. Zu zeigen ist $c_n \to c$. Wähle also ein $\varepsilon > 0$. Es gibt $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \; \forall n \geq N_1, \qquad |b_n - b| < \varepsilon/2 \; \forall n \geq N_2.$$

Mit der Dreiecksungleichung (und da $|\mathrm{i}| = 1$) folgt

$$|c_n - c| = |a_n - a + \mathrm{i}(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

$\square$

Bemerkung. Offenbar gilt in $\mathbb{C}$ sowie in $\mathbb{R}$ die Äquivalenz $x^n \to 0 \;\Leftrightarrow\; |x|^n \to 0$. Nach dem relevanten Beispiel in Abschnitt 3.1 gilt also $(x \in \mathbb{C}, x^n \to 0) \;\Leftrightarrow\; |x| < 1$.

Definition. Eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt

$$|c_n - c_m| < \varepsilon.$$

Satz 5.3 Eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn die beiden reellen Folgen $(\mathrm{Re}(c_n))$ und $(\mathrm{Im}(c_n))$ Cauchy-Folgen sind.

Beweis. Der Beweis ist analog dem von Satz 5.2. $\square$

Korollar 5.4 In $\mathbb{C}$ konvergiert jede Cauchy-Folge. Jede in $\mathbb{C}$ konvergente Folge ist Cauchy.

Beweis. Dies folgt aus Sätzen 5.3, 5.2 und 3.12. $\square$

Bemerkung. Damit wurde gezeigt, dass $\mathbb{C}$ ein folgenvollständiger Körper ist.

Satz 5.5 Seien $(c_n) \subset \mathbb{C}, (d_n) \subset \mathbb{C}$ konvergente Folgen. Dann konvergieren auch $(c_n + d_n)$ und $(c_n d_n)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty}(c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} c_n + \lim_{n\to\infty} d_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(c_n d_n) = (\lim_{n\to\infty} c_n)(\lim_{n\to\infty} d_n).$$

Falls $\lim d_n \neq 0$, dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $d_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} c_n}{\lim_{n\to\infty} d_n}.$$

Beweis. Der Beweis läuft identisch zum reellen Fall, siehe Sätze 3.6 und 3.7. $\square$

6 Unendliche Reihen, Exponentialreihe

Wir möchten die Glieder einer Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ aufsummieren und fragen, ob diese Summe existiert - als eine komplexe Zahl. Wir haben aber bisher die Addition von unendlich vielen Zahlen nicht definiert. Dafür wird erst der Begriff „unendliche Reihe“ als die Folge der „Partialsummen“ $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)_n$ definiert. Falls diese Folge konvergiert, dann können die unendlich vielen Glieder der Folge (a_n) sinnvoll summiert werden.

Definition. Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ gegeben. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definiert man die *Partialsumme*

$$s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen heißt die *unendliche Reihe* mit den Gliedern a_n. Notation: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Falls (s_m) konvergiert, dann heißt der Grenzwert die *Summe der Reihe* und wird auch mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. Die Reihe heißt dann *konvergent*. Falls (s_m) gegen $\pm\infty$ divergiert, schreiben wir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Bemerkung.

- Das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat also zwei Bedeutungen. Es ist die Folge der Partialsummen und im Falle der Konvergenz auch der Grenzwert dieser Folge, d.h. die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

- Der Index der Reihe kann auch bei einem anderen $j \in \mathbb{Z}$ anfangen - falls man Folgenglieder $(a_n), n = j, j+1, j+2, \ldots$ summiert.

Bemerkung. Jede Folge $(c_n) \subset \mathbb{C}$ lässt sich als Reihe darstellen, nämlich als die so genannte *Teleskop-Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \text{ mit } d_1 := c_1, d_k := c_k - c_{k-1} \text{ für } k \geq 2.$$

Es gilt offenbar $c_n = \sum_{k=1}^{n} d_k, n \in \mathbb{N}$.

Satz 6.1 (Unendliche geometrische Reihe) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für alle $|x| < 1$ und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Beweis. Die m-te Partialsumme ist $s_m := \sum_{n=0}^{m} x^n = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ nach Satz 1.8. Wir erhalten

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \frac{\lim(1 - x^{m+1})}{1-x} = \frac{1}{1-x},$$

da $|x| < 1$. □

Satz 6.2 (Linearkombination konvergenter Reihen) Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen komplexer Zahlen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt für die Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis. Dies folgt, da für konvergente Folgen $(s_m), (r_m)$ mit $s_m \to s, r_m \to r$ die Konvergenz

$$\lambda s_m + \mu r_m \to \lambda s + \mu r$$

gilt, siehe Satz 5.5. □

6.1 $b-$adische Brüche

Das bekannteste Beispiel $b-$adischer Brüche sind Dezimalbrüche. Als ein Beispiel nehmen wir

$$x := 0,12323\overline{23} = \frac{1}{10} + \frac{23}{10^3} + \frac{23}{10^5} + \cdots = \frac{1}{10} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{23}{10^{3+2n}}.$$

Nach Satz 6.1 ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{23}{10^{3+2n}} = \frac{23}{10^3} \sum_{n=0}^{\infty} (10^{-2})^n = \frac{23}{10^3} \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{23}{990},$$

also $x = \frac{1}{10} + \frac{23}{990} = \frac{61}{495}$.

Definition. Sei $b \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ein (unendlicher) *b-adischer Bruch* ist

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n},$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$, $a_n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n < b$.

Notation: $\pm a_{-k} a_{-k+1} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$.

Bemerkung.

- Die Zahl b heißt die *Basis* des Bruchs.
- Falls $a_n = 0$ für alle $n > m$, dann schreibt man $\pm a_{-k} a_{-k+1} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m$.
- Für $b = 10$ heißen $b-$adischen Brüche Dezimalbrüche. Für $b = 2$ heißen sie dyadische Brüche. Bei dyadischen Brüchen werden nur die Ziffern 0 und 1 verwendet - dies ist besonders geeignet für elektronische Rechner, bei den zwei Zustände einfach unterscheidet werden können: kein Strom (0), Strom (1).

Satz 6.3 Jeder $b-$adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.

Beweis. Betrachte $\sum_{j=-k}^{\infty} a_n b^{-j}$ mit $k \in \mathbb{N}_0, a_j \in \{0, 1, \dots b-1\}\ \forall j$. Für $n \geq -k$ sei $x_n := \sum_{j=-k}^{n} a_j b^{-j}$ (die n-te Partialsumme).

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass $b^{-N} < \varepsilon$ (da $b > 1$). Für $n > m$ gilt

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| = \sum_{j=m+1}^{n} a_j b^{-j} &\leq \sum_{j=m+1}^{n} (b-1) b^{-j}, \qquad (\text{da } a_j \leq b-1),\\
&\leq (b-1) b^{-m-1} \sum_{k=0}^{n-m-1} b^{-k}\\
&\leq (b-1) b^{-m-1} \frac{1}{1-b^{-1}} = b^{-m}(1-b^{-1}) \frac{1}{1-b^{-1}} = b^{-m}.
\end{aligned}$$

Also folgt $|x_n - x_m| \leq b^{-N} < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. □

Satz 6.4 Sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Dann lässt sich jede reelle Zahl in einen $b-$adischen Bruch entwickeln.

Bemerkung. Die $b-$adische Darstellung ist nicht immer eindeutig. Zum Beispiel gilt für die Dezimalbrüche

$$1,0 = 0,999\overline{9}.$$

Dies folgt aus $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = 1$.

Im Allgemeinen gilt für alle b-adische Brüche $1,0 = 0,\overline{(b-1)}$.

6.2 Konvergenz-Kriterien für unendliche Reihen

Es existieren einige Tests der Konvergenz von unendlichen Reihen. Hier werden nur die wichtigsten besprochen.

Satz 6.5 (Cauchysches Kriterium) Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq m \geq N. \tag{6.1}$$

Beweis. Nach Korollar 5.4 konvergiert die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen genau dann, wenn diese eine Cauchyfolge ist. Da für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (ohne Einschränkung mit $n > m$)

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{m+1}^{n} a_k \right|,$$

ist dies äquivalent zu (6.1). □

Folgender Satz gibt eine notwendige (aber **nicht hinreichende**!!) Bedingung für die Konvergenz.

Satz 6.6 Für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gilt $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis. Das Cauchy-Kriterium impliziert, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ (wähle $m = n + 1$ in (6.1)). Dies zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Bemerkung. Wie das folgende Beispiel der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ zeigt, ist die Bedingung $a_n \to 0$ nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel. (harmonische Reihe) Wir zeigen die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, in dem wir eine (gegen ∞) divergente Teilfolge der Partialsummen finden. Dafür gruppieren wir die Glieder der Folge $\frac{1}{n}$, sodass jede Gruppe die Summe größer $\frac{1}{2}$ hat. Für die Partialsumme $s_{2^k} := \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n}, j \in \mathbb{N}$ haben wir nämlich

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Für jede der Gruppen $\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{n}$ (welche 2^j Glieder enthält) gilt

$$\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{n} > 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Also

$$s_{2^k} > 1 + \frac{k}{2},$$

sodass $s_{2^k} \to \infty$ für $k \to \infty$.

Satz 6.7 Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ (insbesondere $a_n \in \mathbb{R}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe (d.h. die Folge der Partialsummen) beschränkt ist.

Beweis. Da $a_n \geq 0$ für alle n gilt, ist $(s_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k)$ monoton wachsend. Nun können zwei Fälle auftreten. Entweder ist (s_n) beschränkt oder unbeschränkt. Im ersteren Fall ist also (s_n) monoton und beschränkt, also konvergent. Im letzteren Fall monoton wachsend und unbeschränkt, also divergent gegen ∞. $\square$

Beispiel 6.1 Im Gegensatz zur harmonischen Reihe konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für jedes $k > 1$.

Da die Reihe (also Folge der Partialsummen) monoton wachsend ist, reicht es zu zeigen, dass sie auch nach oben beschränkt ist. Sei dafür $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir zeigen, dass $s_N \leq (1 - 2^{-k+1})^{-1}$. Auch hier kommt eine clevere Gruppierung der Glieder ins Spiel.

Es gibt sicher ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $N \leq 2^{m+1} - 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} s_N &\leq \sum_{n=1}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^k} = 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \cdots + \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^j = \frac{1}{1 - 2^{-k+1}}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Abschätzung

$$\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n^k} \leq 2^m \frac{1}{2^{mk}} = \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^m$$

und im letzten Schritt die Formel für die Summe der geometrischen Reihe benutzt haben.

Satz 6.8 (Leibniz'sches Kriterium) Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Beweis. Sei $s_k := \sum_{j=1}^{k} (-1)^n a_n$ die $k-$te Partialsumme. Da (a_n) monoton fällt, gilt $s_{2k+2} - s_{2k} = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$, also

$$s_0 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_{2k} \geq s_{2k+2} \geq 0 \ldots \tag{6.2}$$

Wegen $s_{2k+3} - s_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$ gilt

$$s_1 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_{2k+1} \leq s_{2k+3} \leq \ldots \tag{6.3}$$

und wegen $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0$ erhält man

$$s_{2k+1} \leq s_{2k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

Die Folge $(s_{2k})_k$ ist also monoton fallend und beschränkt (da $s_{2k} \geq s_1$ wegen (6.4) und (6.3)). Wir haben also

$$s := \lim_{k\to\infty} s_{2k} \in \mathbb{R}.$$

Die Folge $(s_{2k+1})_k$ ist monoton wachsend und beschränkt (da $s_{2k+1} \leq s_0$ wegen (6.4) und (6.2)) und es folgt

$$s' := \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \in \mathbb{R}.$$

Allerdings gilt $s = s'$, weil
$$s - s' = \lim(s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim a_{2k+1} = 0.$$
Es gibt also für jedes $\varepsilon > 0$ Zahlen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass
$$|s_{2k} - s| < \varepsilon \ \forall k \geq N_1, \quad |s_{2k+1} - s| < \varepsilon \ \forall k \geq N_2.$$
Das heißt, $|s_m - s| < \varepsilon$ für alle $m \geq \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$. □

Beispiel. Ein Beispiel für die Anwendung des Leibnizsches Kriterium ist die alternierende harmonische Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$
Die Summe dieser Reihe ist $\log 2$, wie wir im Abschnitt zu Taylor-Reihen zeigen werden.

Absolute Konvergenz

Definition. Eine (i.A.) komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung. Wir wissen aus Satz 6.7, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist.

Satz 6.9 Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Beweis. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, ist sie auch Cauchy, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq N$. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann
$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \qquad \forall n \geq m \geq N.$$
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist also Cauchy und wegen Satz 6.5 konvergent. □

Bemerkung. Nicht jede konvergente Reihe ist absolut konvergent. Ein Beispiel ist uns schon bekannt: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht.

Satz 6.10 (Majoranten-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nicht-negativen (also insb. reellen) Gliedern c_n und sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit
$$|a_n| \leq c_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Konvergenz von $\sum c_n$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\sum_{k=m}^{n} c_k| < \varepsilon \ \forall n \geq m \geq N$. Da $|a_k| \leq c_k$ erhält man
$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k = \left| \sum_{k=m}^{n} c_k \right| < \varepsilon \ \forall n \geq m \geq N.$$
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist also Cauchy und deshalb konvergent. □

Bemerkung. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt dann eine *Majorante* für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Korollar 6.11 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent mit $c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und sei $a_n \geq c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum a_n$ divergent.

Beispiel. Wir zeigen hier die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit Hilfe des Majorantenkriteriums. Die Konvergenz wurden aber natürlich schon in Beispiel 6.1 mit anderen Methoden gezeigt.

Offenbar ist $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Wir zeigen dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ konvergiert. Deshalb ist es eine Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Der Trick ist zu erkennen, dass $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n}$ für alle $n \geq 2$. Deswegen

$$s_m := \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} \right).$$

Dies ist aber eine Teleskop-Summe und es folgt

$$s_m = 2 - \frac{n+1}{n}.$$

Offenbar gilt $s_m \to 1 (m \to \infty)$, also $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$. Deswegen konvergiert auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und offenbar genauso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Satz 6.12 (Quotienten-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe (mit $(a_n) \subset \mathbb{C}$).

Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\theta \in (0, 1)$ gibt, so dass

$$a_n \neq 0, \ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Falls $a_n \neq 0, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Im ersten Fall gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq \theta \, |a_{n-1}| \leq \theta^2 \, |a_{n-2}| \leq \ldots \leq \theta^{n-n_0} \, |a_{n_0}| \ = \ C\theta^n$$

mit $C := \theta^{-n_0} \, |a_{n_0}|$.
Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} C\theta^n$ konvergente Majorante von $\sum |a_n|$, und die Behauptung folgt aus Satz 6.10.

Im zweiten Fall gilt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| \ \geq \ |a_{n-1}| \ \geq \ |a_{n-2}| \ \geq \ \ldots \ \geq \ |a_{n_0}| > 0.$$

Damit ist (a_n) keine Nullfolge und die zugehörige Reihe nach Satz 6.6 damit divergent. □

Bemerkung.

- Die Bedingung, dass es ein $\theta \in (0, 1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$, ist äquivalent zu
$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$
- Es reicht nicht im Satz 6.12, dass $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Die Quotienten $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ dürfen nicht beliebig nach an 1 herankommen. Es gibt nämlich Reihen, welche $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ erfüllen und divergieren. Ein Beispiel ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$, für die $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle n, aber die Reihe divergiert!

- Die Bedingung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ (mit $\theta \in (0,1)$) für alle $n \geq n_0$ ist nicht notwendig für Konvergenz. Es gibt also Reihen, welche diese Bedingung nicht erfüllen und konvergieren. Ein Beispiel ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Hier gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$, aber es gibt kein $\theta \in (0,1)$, sodass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$ (weil $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$). Trotzdem konvergiert die Reihe, wie oben gezeigt!

Satz 6.13 (Wurzel-Kriterium) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Falls es ein $\theta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Im ersten Fall gilt für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$, also

$$|a_n| \leq \theta^n \ \forall n \geq n_0.$$

Da $\theta \in (0,1)$, ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} \theta^n$ eine (konvergente) Majorante für $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$, also ist $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Im zweiten Fall gilt $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n, also ist (a_n) keine Nullfolge und deswegen divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Bemerkung. Natürlich ist wieder die Bedingung, dass es ein $\theta \in (0,1)$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$ für alle $n \geq n_0$, äquivalent zu

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

6.3 Umordnung von Reihen

Die Kommutativität der Addition von reellen Zahlen $a + b = b + a$ gilt im Allgemeinen nicht für unendlich viele Summanden. Wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, kann man, zum Beispiel, die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1/n)$ so umordnen, dass die umgeordnete Reihe gegen ∞ divergiert. Dies ist kein Widerpruch mit dem Leibniz'schen Kriterium, da die umgeordenete Reihe nicht mehr alternierend und die Folge der Beträge der Glieder nicht mehr monoton ist.

Definition. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine (i.A. komplexe) Reihe und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Die bezüglich φ *umgeordnete Reihe* ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + a_{\varphi(3)} + \dots.$$

Satz 6.14 Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut gegen die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Sei $s := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Wir zeigen erst, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und deswegen

$$\left| s - \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n \right| = \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \le \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da φ surjektiv ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\{1, \ldots, n_0 - 1\} \subset \{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(N)\}.$$

Für alle $m \ge N$ gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n)} - \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n \right| \le \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung erhält man für alle $m \ge N$

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n)} - s \right| \le \left| \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n)} - \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n \right| + \left| \sum_{n=1}^{m} a_{\varphi(n)} - s \right| < \varepsilon.$$

Um die absolute Konvergenz zu zeigen wendet man den obigen Beweis auf $\sum |a_n|$ und $\sum |a_{\varphi(n)}|$ an. $\square$

Bemerkung. Für Reihen die konvergent aber nicht absolut konvergent sind gilt der obige Satz nicht. Es kann sogar folgendes bewiesen werden (für den Beweis siehe Satz 3.7.2 in [3].)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine reelle konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist. Dann gibt es für jedes $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, die gegen s konvergiert bzw. divergiert.

Bei einer komplexen konvergenten und nicht absolut konvergenten Reihe gilt die obige Aussage für den Realteil sowie den Imaginärteil. Insbesondere gibt es also für jedes $s \in \mathbb{C}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, die gegen s konvergiert.

6.4 Cauchy-Produkt von Reihen

Für das Produkt von zwei endlichen Summen gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{N} b_n \right) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots + (a_1 b_N + a_2 b_{N-1} + \cdots + a_N b_1).$$

Dies motiviert den folgenden Satz für das Produkt unendlicher Reihen.

Satz 6.15 Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente (i.A. komplexe) Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$c_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right). \tag{6.5}$$

Beweis. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |c_k| &= \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} |a_j||b_{k-j+1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_k||b_j| = \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k| \right) \left(\sum_{j=1}^{N} |b_j| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \right)\end{aligned} \tag{6.6}$$

Damit ist $(\sum\limits_{k=1}^{N} |c_k|)_N$ monoton steigend und nach oben beschränkt. Es folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergiert.

Es bleibt nun zu zeigen (6.5). Aus (6.6) folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ mit

$$d_1 := a_1 b_1, d_2 := a_1 b_2, d_3 := a_2 b_1, d_4 := a_1 b_3, d_5 := a_2 b_2, d_6 := a_3 b_1, \ldots$$

absolut konvergiert. Nach Satz 6.14 konvergiert auch jede Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ gegen die gleiche Summe. Wir betrachten eine Aufzählung längs Quadraten in der unendlichen Matrix mit Einträgen $e_{kj} = a_j b_k$. Wir setzen also

$$s_N := \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_j b_k = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \right) \left(\sum_{k=1}^{N} b_k \right)$$

und folgern

$$s = \lim_{N \to \infty} s_N = \lim_{N \to \infty} \Big(\sum_{j=1}^{N} a_j \Big) \lim_{N \to \infty} \Big(\sum_{k=1}^{N} b_k \Big) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \Big) \Big(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \Big).$$

□

6.5 Exponentialreihe

Die Exponentialreihe ist eine unendliche Reihe, welche von einer Variable z abhängt. Wir zeigen, dass diese Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert und deshalb eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{C}$, die sogenante Exponentialfunktion definiert. Die Exponentialfunktion ist (nicht nur in der Mathematik) die wichtigste Funktion überhaupt.

Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Satz 6.16 Die Exponentialreihe konvergiert in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage trivial. Sei nun $z \neq 0$. Setze $a_k := \frac{1}{k!} z^k$. Dann gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|z|^k} \right| = \frac{1}{k+1} |z| \to 0.$$

Mit dem Quotientenkriterium Satz 6.12 folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

Bemerkung.

- Nach Satz 6.16 ist exp eine Funktion (die *Exponentialfunktion*) mit Definitionsbereich $\mathbb{C}$ und Zielmenge $\mathbb{C}$, d.h.
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$
- $e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots$ heißt die *Eulersche Zahl.* Es ist $e = 2,7182818....$ Man kann recht einfach zeigen, dass $e \notin \mathbb{Q}$.
- Da die Exponentialfunktion durch eine Summation von *unendlich* vielen Gliedern definiert wird, kann man ihr Wert im Allgemeinen nie genau bestimmen. Der folgende Satz gibt eine Abschätzung des Fehlers, welchen man macht, wenn man nur endlich viele Glieder der Reihe addiert. Dies ist die Standard-Weise, in der Taschenrechner (und Computer) die Exponentialfunktion auswerten.

Satz 6.17 (Abschätzung des Restglieds) Es gilt für jedes $N \in \mathbb{N}_0$
$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + R_{N+1}(z),$$
wobei
$$|R_{N+1}(z)| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \text{ für alle } |z| \leq 1 + \frac{N}{2}.$$

Satz 6.18 (Additions-Theorem der Exponentialfunktion) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

Beweis. Nach Satz 6.16 sind $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$, $\exp(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} w^j$ absolut konvergent. Mit Satz 6.15 folgt
$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} w^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} z^k\right) \frac{1}{(n-k)!} w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{k!(n-k)!}}_{=\frac{1}{n!}\binom{n}{k}} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}}_{=(z+w)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\
&= \exp(z+w).
\end{aligned}$$

□

Satz 6.19 Es gilt

1. $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
2. $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
3. $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
4. $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
5. $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. 1. folgt aus $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp\big(z + (-z)\big) = \exp(0) = 1$, wobei die letzte Gleichheit direkt aus der Definition von exp folgt.
Zu 2: Für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt (wegen $\overline{\xi + \zeta} = \overline{\xi} + \overline{\zeta} \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{C}$)

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} z^k} = \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} z^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \overline{z}^k = \exp(\overline{z}).$$

Zu 3: Für $x \geq 0$ folgt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \geq 1$. Damit folgt für $x < 0$ schließlich $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$.
Zu 4: Weil $|z|^2 = z\overline{z}$ ergibt sich mit mit 2. und Satz 6.18

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(0) = 1.$$

Zu 5. Für $n \in \mathbb{N}_0$ nutzen wir die Induktion. Für $n = 0$ gilt $\exp(0) = 1 = e^0$. Für den Induktionsschritt haben wir mit Hilfe des Additions-Theorems

$$\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) \overset{\text{I.V.}}{=} e^n e^1 = e^{n+1}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ habe wir nun mit 1.

$$\exp(n) = \exp(-|n|) = \frac{1}{\exp(|n|)} = \frac{1}{e^{|n|}} = e^{-|n|}.$$

$\square$

Bemerkung.

- Der letzte Punkt in Satz 6.19 zeigt, dass um den Wert der Exponentialfunktion in einem $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, genügt es, die Werte im Bereich $-1/2 < \xi \leq 1/2$ zu kennen. Wenn wir nämlich ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ als $x = n + \xi$ mit $-1/2 < \xi \leq 1/2, n \in \mathbb{Z}$ schreiben, folgt $\exp(x) = \exp(n + \xi) = \exp(n)\exp(\xi) = e^n \exp(\xi)$.
- Später, wenn wir die Potenzfunktion a^x für beliebige reelle (und sogar komplexe) x definiert haben, werden wir auch die Identität $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$) haben.

7 Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit

Die Konzepte der Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit wurden von Georg Cantor (1845-1918) eingeführt. G. Cantor ist der Vater der Mengenlehre und war in den Jahren 1869-1913 an der Universität Halle tätig.

Definition. Eine nichtleere Menge A heißt ***abzählbar***, wenn es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to A$ gibt, d.h. wenn eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Die leere Menge wird als abzählbar definiert. Eine Menge heißt ***überabzählbar***, wenn sie nicht abzählbar ist.

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $A \to B$ gibt.

Bemerkung.

- Offenbar ist jede endliche Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ abzählbar. Eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to A$ kann man hier, z.B., als $\varphi(j) = a_j, j = 1 \ldots, N$ und $\varphi(j) = a_N, j > N$ wählen.
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. Man kann die surjektive Abbildung wählen als

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad \varphi(n) := \begin{cases} k & \text{falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -k & \text{falls } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

  Wie man einfach sieht, ist φ auch injektiv, sodass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

Satz 7.1 Jede unendlich abzählbare Menge ist gleichmächtig mit $\mathbb{N}$.

Beweis. Sei A unendlich und abzählbar, d.h

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Wir suchen eine Bijektion $\psi : \mathbb{N} \to A, k \mapsto a_{n_k}$. Diese konstruieren wir induktiv.

Für $k = 1$ setzen wir $n_1 = 1$, d.h. $\psi(1) := a_1$. Nun machen wir den Induktionsschritt $k \to k+1$. Wir nehmen also an, dass $Nn_1, \ldots n_k$ gewählt wurden und wir setzen

$$n_{k+1} := \min\{n > n_k : a_n \neq a_{n_j} \text{ für alle } j = 1, \ldots, k\}.$$

$\square$

Satz 7.2 Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen M_n, $n \in \mathbb{N}$, ist abzählbar.

Beweis. Seien $M_1, M_2, M_3, \ldots$ abzählbar. Also existiert eine Aufzählung der jeweiligen Elemente

$$\begin{array}{ll} M_1: & a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \ldots \\ M_2: & a_{21},\ a_{22},\ a_{23}, \ldots \\ M_3: & a_{31},\ a_{32},\ a_{33}, \ldots \\ M_4: & a_{41},\ a_{42},\ a_{43}, \ldots \\ \vdots & \end{array}$$

Eine Aufzählung „entlang der Diagonalen“ liefert Aufzählung aller Elemente der Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$. Dies ist *Cantors erstes Diagonalverfahren.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & & a_{15} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & a_{25} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & a_{35} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & a_{45} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Damit ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ höchstens abzählbar. $\square$

Korollar 7.3 Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$\left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}$$

gleichmächtig zu $\mathbb{Z}$, denn $m \mapsto \frac{m}{n}$ ist eine Bijektion dieser Menge auf $\mathbb{Z}$. Damit ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ abzählbar. Nun ist aber

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}$$

und $\mathbb{Q}$ nach Satz 7.2 abzählbar. $\square$

Satz 7.4 Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Es reicht offenbar zu zeigen, dass $(0,1) \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist. Wir zeigen dies durch einen Widerspruchsbeweis. Angenommen $(0,1)$ ist abzählbar, d.h. $(0,1) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir schreiben jedes x_n eindeutig in der Dezimalbruchdarstellung (Periode-9-Brüche ausgeschlossen):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0, \underline{a_{11}}\; a_{12}\; a_{13} \ldots \\
x_2 &= 0, a_{21}\; \underline{a_{22}}\; a_{23} \ldots \\
x_3 &= 0, a_{31}\; a_{32}\; \underline{a_{33}} \ldots \\
x_4 &= \ldots \\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

Für den Widerspruch finden wir nun eine Zahl $x_* \in (0,1)$, sodass $x_* \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Diese Zahl wird durch das *zweite Diagonalverfahren von Cantor* definiert. Wir wählen zum Beispiel

$$x_* := 0, b_1 b_2 b_3 \ldots \text{ mit } b_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{jj} \neq 1, \\ 2, & \text{falls } a_{jj} = 2 \end{cases} \qquad \text{für jedes } j \in \mathbb{N}.$$

Die Zahl x_* unterscheidet sich von der $j-$ten Zahl x_j in der $j-$ten Dezimalstelle ($b_j \neq a_{jj}$ $\forall j \in \mathbb{N}$), d.h. auf der Diagonale des obigen Schemas. Deswegen ist sie unterschiedlich von jeder Zahl x_j, $j = 1, 2, \ldots$. $\square$

Bemerkung. Es bietet sich die Frage an, warum das zweite Diagonalverfahren nicht zeigt, dass auch $\mathbb{Q}$ überabzählbar ist. Für diese Schlussfolgerung müsste $x_* \in \mathbb{Q}$ gelten, d.h. die Dezimalbruchdarstellung $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ müsste periodisch sein (jede rationale Zahl hat eine periodische $b-$adische Entwicklung). Dies muss aber nicht gelten.

8 Stetigkeit von Funktionen

Stetigkeit von Funktionen ist ein zentraler Begriff der Analysis. Funktionen und ihr Definitionsbereich, die Zielmenge und das Bild haben wir schon in Abschnitt 1.3 definiert. Funktionen mit Zielmenge $N \subset \mathbb{R}$ heißen *reellwertige Funktionen* und die mit Zielmenge $N \subset \mathbb{C}$ *komplexwertige Funktionen*.

8.1 Funktionen

Einige wichtige Funktionen:

1. konstante Funktion
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto c \in \mathbb{C}$$

2. Identität
$$\mathrm{Id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto x$$

3. Betragsfunktion:
$$\mathrm{abs} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

4. Signumfunktion:
$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

5. charakteristische Funktion von $A \subset \mathbb{C}$:
$$\chi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Bemerkung: Für $A \subset \mathbb{R}$ wird $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genauso definiert.

6. Quadratwurzel:
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

7. Exponentialfunktion:
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto \exp(x)$$

8. Polynomfunktion:
$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
wobei $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j = 0, \ldots, n$

9. rationale Funktion:
$$R : D \to \mathbb{C}, x \mapsto R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
wobei P, Q Polynome sind und $D := \{x \in \mathbb{C} : Q(x) \neq 0\}$

Im Rest des Kapitels 8 formulieren wir die meisten Resultate im Körper $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sein darf. Sei im folgenden $D \subset \mathbb{K}$ eine beliebige Teilmenge.

Definition. Seien $f, g : D \to \mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}$. Dann definieren wir Funktionen $f + g, f \cdot g, \lambda f : D \to \mathbb{K}$ durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Weiter setzen wir $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ und definieren

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{K}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

8.2 Stetigkeit

Im ganzen Abschnitt sei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $D \subset \mathbb{K}$.

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt *stetig in* $x_0 \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

f heißt *stetig*, falls f in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Definition. $f : D \to \mathbb{K}$ heißt *Lipschitzstetig*, falls $L \geq 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

L heißt dann *Lipschitzkonstante* von f.

Proposition 8.1 Jede Lipschitzstetige Funktion ist stetig.

Beweis. Sei $f : D \to \mathbb{K}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L. Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \varepsilon$$

falls $x \in D$ und $|x - x_0| < \delta := \varepsilon / L$. □

Proposition 8.2 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis. Erstens zeigen wir die Stetigkeit in $x = 0$.
Für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \delta$ gilt

$$\begin{aligned} |\exp(x) - 1| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |x|^k < \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k \overset{\delta \leq 1}{=} \frac{1}{1-\delta} - 1 = \frac{\delta}{1-\delta} \leq 2\delta \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, falls $\delta \leq \frac{1}{2}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben und setze

$$\delta := \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

Mit obiger Rechnung folgt

$$|\exp(x) - 1| < 2\delta \leq \varepsilon$$

für alle $|x| < \delta$. Das zeigt wegen $\exp(0) = 1$ die Stetigkeit von exp in 0.

Anschließend zeigen wir die Stetigkeit im beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$|\exp(x_0) - \exp(x)| \;=\; |\exp(x_0)| \left|1 - \frac{\exp(x)}{\exp(x_0)}\right| \;=\; \exp(x_0)\,|1 - \exp(x - x_0)|\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem ersten Schritt existiert $\delta > 0$ mit $|1 - \exp(x - x_0)| < \varepsilon \exp(x_0)$ für alle $|x - x_0| < \delta$ und damit nach obiger Rechnung auch

$$|\exp(x_0) - \exp(x)| \;<\; \varepsilon \qquad \text{für alle } |x - x_0| < \delta.$$

Damit ist exp stetig in x_0. □

Für $x \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnen wir mit $B_\varepsilon(x)$ den „offenen" Ball mit Radius ε und Mittelpunkt x, d.h.

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < \varepsilon\}.$$

Definition. Sei $A \subset \mathbb{K}$.

1. $x \in \mathbb{K}$ heißt ***Häufungspunkt von*** A, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $A \cap B_\varepsilon(x)$ unendlich viele Elemente hat.

2. $x \in A$ heißt *isolierter Punkt*, falls für ein $\varepsilon > 0$ gilt: $B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$.

Beispiel. Für $A = [-1, 1] \cup \{2\}$ sowie für $A = (-1, 1) \cup \{2\}$ sind z.B. $x = 0$, $x = 1$ Häufungspunkte und $x = 2$ ein isolierter Punkt.

Bemerkung.

- Ein Punkt $x \in A$ ist entweder ein Häufungspunkt von A oder ein isolierter Punkt (und nicht beides).
- Im isolierten Punkt $x_0 \in A$ ist jede Funktion $f : A \to \mathbb{K}$ automatisch stetig.

Definition. (Grenzwerte bei Funktionen)

- Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$ und sei $x_0 \in \mathbb{K}$ Häufungspunkt von D. Die Funktion f *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{K}$ für x gegen x_0, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

  $$|f(x) - a| \;<\; \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

  Wir schreiben $f(x) \to a$ für $x \to x_0$ oder

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

  a heißt dann der *Grenzwert* von f in x_0.

- Sei $D \subset \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \mathbb{K}$ Häufungspunkt von D. Wir sagen

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty),$$

  falls es für jedes $M \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > M$ (bzw. $f(x) < M$) für alle $x \in D$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

- Sei $D \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt von oben (bzw. unten) und $f : D \to \mathbb{K}$. Wir schreiben

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \in \mathbb{K}, \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = a \in \mathbb{K}),$$

  falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ (bzw. $K < 0$) existiert, sodass

  $$|f(x) - a| \;<\; \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } x > K \text{ (bzw. } x < K).$$

Und wir schreiben

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad (\text{bzw. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty),$$

falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $K > 0$ (bzw. $K < 0$) existiert, sodass

$$f(x) > M \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } x > K \text{ (bzw. } x < K).$$

Analog definiert man $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

Beispiel. Für $f : R \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Für $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

aber der erste Limes ist nicht gleich $f(0)$, da f in $x = 0$ nicht definiert ist.

Proposition 8.3 Sei $D \subset \mathbb{K}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent

1. $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.
2. Für alle Folgen $(x_k)_k$ in D mit $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k$ gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

Beweis. 1.$\Rightarrow$2.: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta > 0$ so gewählt, dass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_k - x_0| < \delta$ für alle $k \geq N$. Dies impliziert, dass $|f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$. Nach Definition folgt damit $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$.

2.$\Rightarrow$1.: Angenommen f ist nicht stetig in x_0. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in D$ existiert mit

$$|x - x_k| < \frac{1}{k} \qquad \text{aber} \qquad |f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Damit konvergiert $(x_k)_k$ gegen x_0, aber $(f(x_k))_k$ nicht gegen $f(x_0)$. ☐

Lemma 8.4 Sei $D \subset \mathbb{K}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D, $f : D \to \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent

1. $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$,
2. f ist stetig in x_0.

Beweis. Die Definition von $f(x) \to a$ für $x \to x_0$ mit $a = f(x_0)$ und die Definition von „f stetig in x_0" sind identisch. ☐

Korollar 8.5 Sei $D \subset \mathbb{K}$, $x_0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent

1. $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$ für alle $(x_k) \subset D$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$,
2. f ist stetig in x_0.

Beweis. Im Fall, dass x_0 ein HP ist, ist dies die Aussage von Lemma 8.4. Falls x_0 ein isolierter Punkt ist, dann ist die Äquivalenz trivial, weil beide (i) und (ii) immer wahr sind. Bei (i) ist nämlich $x_k = x_0$ für alle Indizes k groß genug. $\square$

Bemerkung. Lemma 8.4 und Korollar 8.5 liefern sehr praktische Umformulierungen der Stetigkeit. Es ist nämlich oft einfacher mit Folgen als mit dem ε, δ-Kriterium zu arbeiten. Die Eigenschaft 1. in Korollar 8.5 heißt die „*Folgenstetigkeit*".

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

- Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, x_0)$.

  $$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = c$$

  bedeutet $\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = c$. Das heißt alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $x_k < x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_0$ erfüllen $f(x_k) \to c$ $(k \to \infty)$. c heißt dann der *linksseitiger Grenzwert* von f in x_0.

- Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$.

  $$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = c$$

  bedeutet $\lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = c$. Das heißt alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $x_k > x_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_0$ erfüllen $f(x_k) \to c$ $(k \to \infty)$. c heißt dann der *rechtsseitiger Grenzwert* von f in x_0.

Beispiel. 1. Sei $D = \mathbb{R}$ und $f(x) := \text{sign(x)}$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1, \ \lim_{x \to 0-} f(x) = -1, f(0) = 0.$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht, da die links- und rechts-sitigen Limiten unterschiedlich sind und $\lim_{x \to 0} |f(x)|$ existiert nicht, da $|f(0)| = 0$ ungleich der links- und rechts-seitigen Limiten von $|f(x)|$ ist.

2. Sei $D = (0, 1)$ und $f(x) := \frac{1}{x}$. Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to 1-} f(x) = 1.$$

$\lim_{x \to 0-} f(x)$ ist nicht definiert, da $0 \notin D \cap (-\infty, 0)$ und $\lim_{x \to 1+} f(x)$ ist nicht definiert, da $1 \notin D \cap (1, \infty)$.

Satz 8.6 Sei $D \subset \mathbb{K}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig. Dann sind auch die Funktionen $f + g, fg : D \to \mathbb{K}$ stetig. Für $D' := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ gilt $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{K}$ ist stetig.

Beweis. Sie $x_0 \in D$. Betrachte den Beweis der Stetigkeit von $f + g$: Wegen Korollar 8.5 reicht es zu zeigen, dass für jede Folge $(x_k) \subset D$ mit $x_k \to x_0$ folgt

$$(f + g)(x_k) \to (f + g)(x_0).$$

Dies folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen. Es gilt

$$\lim_{k \to \infty} (f + g)(x_k) = \left(\lim_{k \to \infty} f(x_k) \right) + \left(\lim_{k \to \infty} g(x_k) \right) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0),$$

wobei der zweite Schritt aus der Stetigkeit von f und g folgt. Analog zeigt man die Stetigkeit von fg und f/g. $\square$

Bemerkung. Also ist jede rationale Funktion auf ihrem Definitionsbereich stetig.

Satz 8.7 Sei $D \subset \mathbb{K}, E \subset \mathbb{K}$ und seien $f : D \to \mathbb{K}$, $g : E \to \mathbb{K}$ gegeben mit $f(D) \subset E$. Falls f stetig ist in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0) \in E$, dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{K}$ stetig in x_0.

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. Da f stetig in x_0 ist, folgt $f(x_k) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$. Dann ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y_k := f(x_k)$ Folge in E mit $y_k \to y := f(x_0)$. Da g stetig in y ist, folgt $g(y_k) \to g(y)$ $(k \to \infty)$, das heißt $g\big(f(x_k)\big) \to g\big(f(x_0)\big)$, das heißt $(g \circ f)(x_k) \to (g \circ f)(x_0)$ $(k \to 0)$, also $(g \circ f)$ stetig in x_0. □

Beispiel. Die Funktion $\exp\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)$ ist stetig auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, da $f(x) := 1/x$ stetig auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ und $g(x) := \exp(\mathrm{x})$ stetig in $\mathbb{R}$ sind.

8.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 8.8 (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis. Sei $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$. Dann ist M nicht leer, denn $a \in M$. Weiter ist M beschränkt. Damit existiert $x_0 := \sup M$. Zu zeigen ist $f(x_0) = 0$.

Zuerst gilt $x_0 > a$, denn es existiert, wegen Stetigkeit von f, ein $\delta > 0$, sodass $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, a + \delta)$.

1. Zeige $f(x_0) \leq 0$. Da x_0 kleinste obere Schranke, existiert $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to x_0$. Dann wegen Stetigkeit
$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(x_k)}_{\leq 0} \leq 0$$
2. Zeige $f(x_0) \geq 0$.
Angenommen $f(x_0) < 0$. Dann existiert, da f stetig, ein $\delta > 0$, sodass $f(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ wegen 1. ist $x_0 < b$, damit existiert $x_1 > x_0$, $x_1 \in [a, b]$, sodass $f(x_1) < 0$. $x_1 \in M$, Widerspruch denn x_0 obere Schranke von M, aber $x_1 > x_0$, $x_1 \in M$.
Damit $f(x_0) \geq 0$.

Aus 1. und 2. folgt $f(x_0) = 0$. □

Korollar 8.9 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x_0 \in [a, b]$, sodass $f(x_0) = c$.

Beweis. Sei c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gewählt und setze $g(x) := f(x) - c$. Dann ist $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$ oder $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$ und Satz 8.8 kann auf g angewendet werden. □

Korollar 8.10 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (eventuell uneigentlich) und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall (eventuell uneigentlich).

Beweis. Setze $A := \inf f(I)$ und $B := \sup f(I)$. Dann gilt $A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1. Zu zeigen ist erst $(A, B) \subset f(I)$.
Dazu sei $A < y < B$. Nach Definition von Supremum und Infimum existieren $a, b \in I$, sodass $f(a) < y < f(b)$. Dann existiert nach Korollar 8.9 ein $x \in I$ mit $f(x) = y$.

2. Da $(\inf f(I), \sup f(I)) \subset f(I)$, muss gelten entweder $f(I) = (A, B)$ oder $f(I) = [A, B]$ oder $f(I) = [A, B)$ oder $f(I) = (A, B]$.

$\square$

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt* (bzw. *nach unten beschränkt*, *nach oben beschränkt*) falls $f(D)$ eine beschränkte (bzw. nach unten beschränkte, nach oben beschränkte) Menge ist.

Definition. Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*.

Satz 8.11 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an, das heißt es existieren $x_+, x_- \in [a, b]$, so dass $f(x_+) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $f(x_-) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Insbesondere ist jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Beweis. Wir zeigen die Existenz des Maximums. Der Beweis des Minimums ist analog. Sei $A := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Es gilt $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und es existiert eine Folfe $(x_n) \subset [a, b]$, sodass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Zu zeigen ist, dass $f(x_+) = A$ für ein $x_+ \in [a, b]$.

Da (x_n) beschränkt ist, existiert nach Satz von Bolzano - Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (x_n), also $x_{n_k} \to x_0 \in \mathbb{R}$ für $k \to \infty$. Dann $x_0 \in [a, b]$, denn $a \leq x_{n_k} \leq b \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$. Da aber die ganze Folge $(f(x_n))_n$ (gegen A) konvergiert, gilt

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Wir wählen also $x_+ := x_0$. $\square$

Bemerkung. Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist also immer beschränkt und das Bild ist das kompakte Intervall $[f(x_-), f(x_+)]$ (wobei $f(x_-) = f(x_+)$ auftreten kann, cf. konstante Funktionen).

Definition. Sei $A \subset D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist *gleichmäßig stetig auf* A, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Bemerkung.
- Offenbar ist jede gleichmäßig stetige Funktion stetig. Die gleichmäßige Stetigkeit unterscheidet sich von der Stetigkeit, in dem das $\delta > 0$ nur von $\varepsilon > 0$ abhängt aber nicht vom Punkt x_0. Das heißt es gibt ein δ welches für alle $x_0 \in A$ funktioniert. Bei der Stetigkeit ist also im Allgemeinen $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ und bei der gleichmäßigen Stetigkeit ist nur $\delta = \delta(\varepsilon)$.
- Jede Lipschitzstetige Funktion ist gleichmäßig stetig. Hier kann $\delta := \varepsilon/L$ gewählt werden.

Satz 8.12 (Satz von Heine) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ (d.h. auf einem kompakten Intervall) ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Das heißt, es gibt $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, existieren $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, sodass $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Dann sind (x_n) und (y_n) beschränkte Folgen in $[a, b]$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$. Da $a \leq x_{n_k} \leq b \quad$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt $x \in [a, b]$.

Dann gilt aber auch $y_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$, denn $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$ $(k \to \infty)$.

Da f stetig ist, folgt nun

$$0 = |f(x) - f(x)| = \left|\lim_{k\to\infty} \left(f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right)\right| = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right|}_{\geq\varepsilon} \geq \epsilon$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon > 0$. □

Bemerkung. Im Satz 8.12 ist wichtig, dass das Intervall kompakt (d.h. abgeschlossen und beschränkt) ist. Für andere Intervalle, etwa $(a, b], (-\infty, b]$, usw. gilt die Aussagen i.A. nicht.

Beispiel. Für die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ zeigen wir, dass sie gleichmäßig stetig ist auf $[r, \infty)$ für jedes $r > 0$ aber nicht auf $(0, \infty)$.

1. Sei $r > 0$ und wähle $x, y \geq r$ beliebig.

   $$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{1}{r^2}|x - y|$$

   Also ist f Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante $L := \frac{1}{r^2}$. Damit ist $f : [r, \infty) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

2. Jetzt betrachten wir f auf $(0, \infty)$.

   Angenommen f wäre gleichmäßig stetig. Dann existiert zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y > 0$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < 1$.

   Allerdings, für $y = \frac{x}{2}$ ist $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$ für alle $0 < x < 2\delta$, aber

   $$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{x} > 1$$

   für $x > 0$ klein genug, nämlich $x < \min\{2\delta, 1\}$.

Definition. Sei $f : M \to N$ eine Bijektion zwischen zwei allgemeinen Mengen M, N (nicht unbedingt Teilmengen von $\mathbb{K}$). Dann heißt $f^{-1} : N \to M$ mit

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

die *Umkehrfunktion* (oder *inverse Funktion*) von f.

Bemerkung. Bitte nicht $f^{-1}(x)$ mit der Funktion $\frac{1}{f(x)}$ verwechseln!

Definition. (Monotone Funktionen) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt

$$\begin{cases} \textit{monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{cases}, \text{ falls } \begin{cases} f(x) \leq f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \geq f(x') \\ f(x) > f(x') \end{cases}$$

für alle $x, x' \in D$ mit $x < x'$.

Satz 8.13 Sei $f : I \to \mathbb{R}$, I (eventuell uneigentliches) Intervall. Sei f stetig und streng monoton wachsend. Dann ist auch $I' := f(I)$ Intervall (eventuell uneigentlich) und $f : I \to I'$ bijektiv. Weiter ist $f^{-1} : I' \to I$ stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Nach Korollar 8.10 ist I' Intervall. Da f streng monoton, ist f injektiv, damit $f : I \to I'$ bijektiv. Zu zeigen, dass dann $f^{-1}; I' \to I$ streng monoton wachsend ist, bleibt eine Übungsaufgabe.

Zu zeigen bleibt, dass f^{-1} stetig ist. Sei $y_0 \in I'$ beliebig. Dann $y_0 = f(x_0)$ für ein $x_0 \in I$. Wir unterscheiden zwei Fälle; (a): x_0 ist kein Randpunkt von I und (b): x_0 ist ein Randpunkt von I.

(a) Es gibt $\varepsilon_0 > 0$, sodass $I_\varepsilon := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Wähle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ beliebig und setze $c := f(x_0 - \varepsilon)$, $d := f(x_0 + \varepsilon)$. Da f streng monoton ist, ist $f : I_\varepsilon \to [c, d]$ bijektiv. Wähle dann $\delta := \min\{y_0 - c, d - y_0\}$. Dann gilt für alle $y \in I'$ mit $|y_0 - y| < \delta$, dass $y \in (c, d)$, damit $f^{-1}(y) \in I_\varepsilon$, insbesondere $\left|f^{-1}(y) - x_0\right| < \varepsilon$.

    Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt dass f^{-1} stetig in y_0 ist.

(b) Falls x_0 der linke Randpunkt von I ist, d.h. $x_0 = \inf I = \min I$, dann ist $I_\varepsilon = [x_0, x_0 + \varepsilon]$ für $\varepsilon > 0$ klein genug. Man argumentiert dann wie oben, wobei man $\delta := f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$ wählt.

    Falls x_0 der rechte Randpunkts ist, d.h. $x_0 = \sup I = \max I$, dann analog mit $\delta := f(x) - f(x_0 - \varepsilon)$.

$\square$

Bemerkung. Eine analoge Aussage gilt für stetige streng monoton fallende f.

Beispiel. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$. Diese Funktion ist stetig und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ und es gilt $f([0, \infty)) = [0, \infty)$. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[k]{x}$. Als Kontrolle rechnen wir

$$f^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; \sqrt[k]{y} = x \;\Leftrightarrow\; y = x^k \;\Leftrightarrow\; y = f(x).$$

9 Logarithmus und trigonometrische Funktionen

9.1 Logarithmus und allgemeine Potenz

Lemma 9.1 Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv, streng monoton wachsend und

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty.$$

Beweis. Da für jedes $x > 0$ gilt $\exp(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1 + x$, bekommt man

$$\lim_{x \to \infty} \exp(x) > \lim_{x \to \infty} (1 + x) = \infty.$$

Nun folgt

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to \infty} \exp(-x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Da exp stetig ist, müssen nach dem Zwischenwertsatz alle Werte zwischen 0 und ∞ angenommen werden. Es ist also $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, d.h. exp is surjektiv. Es bleibt die strenge Monotonie zu zeigen. Seien dafür $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ beliebig. Zu zeigen ist $\exp(x + \alpha) > \exp(x)$.

$$\exp(x + \alpha) = \exp(x) \exp(\alpha) > (1 + \alpha) \exp(x) > \exp(x).$$

□

Wegen der Bijektion von exp existiert die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$.

Definition. Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt der *Logarithmus*, $\log := \exp^{-1}$, $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Satz 9.2 Der Logarithmus ist stetig, streng monoton wachsend und erfüllt

$$\lim_{x \to 0+} \log(x) = -\infty, \ \lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty, \ \log(1) = 0, \ \log(e) = 1.$$

Es gilt außerdem

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \forall x, y > 0,$$
$$\log \frac{1}{x} = -\log(x) \qquad \forall x > 0.$$

Beweis. Mit Satz 8.13 folgen aus der Stetigkeit und strenger Monotonie von exp die gleichen Eigenschaften von $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Die erste Gleichung-Zeile folgt aus Lemma 9.1 und $\exp(0) = 1, \exp(1) = e$. Weiter,

$$\exp(\log x + \log y) = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y) = xy.$$

Das heißt

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

Für die letzte Zeile

$$0 = \log(1) = \log(x \tfrac{1}{x}) = \log(x) + \log(\tfrac{1}{x}).$$

□

Definition. Sei $a > 0$. Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty), \exp_a(x) := \exp(x \log a)$ heißt *Exponentialfunktion zur Basis a.*

Bemerkung. 1) Die Exponentialfunktion zur Basis e bezeichnen wir weiterhin mit $\exp(x)$.

2) $\exp_a(x)$ macht Sinn auch für $x \in \mathbb{C}$ (und $a > 0$). Es gilt für jedes $a > 0$, dass $\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Satz 9.3 Sei $a > 0$. Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig und es gilt

1. $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
2. $\exp_a(q) = a^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Bemerkung. Satz 9.3 gilt auch für $\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{C}, a > 0$.

Beweis. Da $\exp_a = g \circ f$ mit $g = \exp$ und $f = \log(a) \cdot \mathrm{Id}$, wobei beide f und g stetig sind, folgt $g \circ f$ stetig. Für 1. rechnen wir:

$$\exp_a(x + y) = \exp((x + y) \log(a)) = \exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp_a(x) \exp_a(y).$$

Für 1. sei erst $n \in \mathbb{N}$.

$$\exp_a(n) = \exp(n \log(a)) = \exp(\log(a) + \cdots + \log(a)) \overset{1.}{=} (\exp(\log(a)))^n = a^n.$$

Für negative ganze Zahlen argumentiert man mit Hilfe von:

$$1 = \exp_a(n - n) = \exp_a(n) \exp_a(-n) = a^n \exp_a(-n).$$

Also folgt $\exp_a(-n) = a^{-n} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $g = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, d.h. $r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}$.

$$\left(\exp_a(\tfrac{r}{s})\right)^s = \exp_a(\tfrac{r}{s}s) = \exp_a(r) = a^r,$$

wobei im letzten Schritt die eben gezeigte Eigenschaft $\exp_a(n) = a^n \ \forall n \in \mathbb{Z}$ benutzt wurde. Es folgt

$$\exp_a(\tfrac{r}{s}) = e^{\frac{r}{s}}.$$

□

Korollar 9.4 Für alle $a > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis. Dies folgt aus der Stetigkeit von $\exp_a$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \exp_a(\tfrac{1}{n}) = \exp_a(0) = 1.$$

□

Bemerkung. Satz 9.3 zeigt, dass $\exp_a(x)$ die uns bekannte Potenzfunktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ erweitert: die Eigenschaften bleiben erhalten und der Definitionsbereich wird erweitert von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ (oder sogar auf $\mathbb{C}$). Deswegen macht es Sinn die Notation

$$a^x := \exp_a(x) \text{ für alle } a > 0, x \in \mathbb{R}$$

zu verwenden. Deswegen wird auch

$$e^x := \exp(x)$$

geschrieben.

Satz 9.5 Für alle $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

1. $a^{x+y} = a^x a^y$,
2. $\log(a^x) = x \log(a)$,
3. $(a^x)^y = a^{xy}$,
4. $a^x b^x = (ab)^x$,
5. $(1/a)^x = a^{-x}$.

Beweis. Für (i) siehe Punkt 1. in Satz 9.3.
Punkt (ii) folgt aus $a^x = \exp(x \log a)$ durch die Anwendung von log.
Für (iii)

$$(a^x)^y = \exp(y \log(a^x)) \stackrel{(ii)}{=} \exp(yx \log(a)) = a^{xy}.$$

Identitäten (iv) und (v) zeigt man ähnlich. $\square$

Beispiel. 1) $\lim_{x\to\infty} e^x x^{-k} = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$
Dies folgt aus

$$e^x x^{-k} = x^{-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} + \frac{x}{(k+1)!} + x^{-k} \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{x^j}{j!} > \frac{x}{(k+1)!} \to \infty \quad (x \to \infty).$$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = 0$ für alle $\alpha > 0$
Dies wird bewiesen durch:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{e^{x \log(\alpha)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\frac{1}{\alpha} y}{e^y} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y\to\infty} y e^{-y} \stackrel{1)}{=} 0,$$

wobei die Substitution $y := \alpha \log(x)$ benutzt wurde.

3) $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = 0$ für alle $\alpha > 0$
Hier benutzen wir folgende Rechnung:

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log(x) = \lim_{x\to 0+} \left(-\frac{\log(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^\alpha} \right) = \lim_{y\to\infty} \left(-\frac{\log(y)}{y^\alpha} \right) \stackrel{2)}{=} 0,$$

wobei die Substitution $y := \frac{1}{x}$ benutzt wurde.

9.2 Trigonometrische Funktionen

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cos(x) := \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x)), \qquad \sin(x) := \mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x)).$$

Bemerkung. • Wir haben also die s.g. *Eulersche Formel* $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

- Da $|e^{\mathrm{i}x}| = 1$, liegt der Punkt $\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene. Dass dabei x immer die orientierte Länge des Bogens von $z = 1$ bis $z = e^{\mathrm{i}x}$ ist, zeigen wir in der Vorlesung Analysis II.

Satz 9.6 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}),\ \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$,

(ii) $\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$,

(iii) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Beweis. (i) folgt aus der Definition. (iii) folgt aus $1 = |\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}$. Für (ii) ergibt

$$\overline{\exp(\mathrm{i}x)} = \exp(\overline{\mathrm{i}x}) = \exp(-\mathrm{i}x) = \exp(\mathrm{i}(-x))$$

die Gleichung

$$\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x) = \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x).$$

Nach dem Ziehen des Realteils und des Imaginärteils erhält man (ii). □

Bemerkung. Aus (iii) folgt $|\cos(x)| \leq 1, |\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 9.7 $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis. Wegen Satz 9.6 (i) ist cos gegeben durch die Summe der zwei stetigen Funktionen $\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}x}$ und $\frac{1}{2}e^{-\mathrm{i}x}$. Deswegen ist cos nach Satz 8.6 stetig. Für sin argumentiert man analog. □

Satz 9.8 (Additionstheoreme) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion erhalten wir

$$\exp\big(\mathrm{i}(x + y)\big) = \exp(\mathrm{i}x) \cdot \exp(\mathrm{i}y)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \mathrm{Re}\big(\exp\big(\mathrm{i}(x + y)\big)\big) = \mathrm{Re}\big(\exp(\mathrm{i}x) \cdot \exp(\mathrm{i}y)\big) \\ &= \mathrm{Re}\big(\exp(\mathrm{i}x)\big)\mathrm{Re}\big(\exp(\mathrm{i}y)\big) - \mathrm{Im}\big(\exp(\mathrm{i}x)\big)\mathrm{Im}\big(\exp(\mathrm{i}y)\big) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $\sin(x + y) = \mathrm{Im}\big(\exp\big(\mathrm{i}(x + y)\big)\big)$ beweist man analog das Additionstheorem für die Sinus-Funktion. □

Bemerkung. Insbesondere gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Korollar 9.9 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Beweis. Wir setzen

$$u := \frac{x+y}{2}, \qquad v := \frac{x-y}{2},$$

sodass $x = u + v$, $y = u - v$. Es folgt dann mit Satz 9.8

$$\begin{aligned}
\sin(x) - \sin(y) &= \sin(u+v) - \sin(u-v) \\
&= \cos(u)\sin(v) + \sin(u)\cos(v) - \Big(\cos(u)\sin(-v) + \sin(u)\cos(-v)\Big) \\
&= 2\cos(u)\sin(v) = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

Der Beweis der Identität für $\cos(x) - \cos(y)$ ist ähnlich. □

Satz 9.10 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt mit dem Majorantenkriterium, da die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert. Zum Beispiel ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

mit $a_n = (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!}$ für n gerade und $a_n = 0$ für n ungerade. Also folgt $|a_n| \le \left|\frac{x^n}{n!}\right|$ und somit die absolute Konvergenz.

Um die Gleichungen für cos und sin zu beweisen, notieren wir erst, dass

$$\mathrm{i}^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ \mathrm{i}, & \text{falls } n = 4m+1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{falls } n = 4m+2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0, \\ -\mathrm{i}, & \text{falls } n = 4m+3 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}x)^{4k+3}}{(4k+3)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{(4k)!} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} - \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big].
\end{aligned}$$

Dear Realteil und der Imaginärteil dieser Identität liefern die zwei Gleichungen. □

Proposition 9.11 Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} \;=\; 1.$$

Beweis. Es gilt $e^{\mathrm{i}x} - (1+\mathrm{i}x) = \cos(x) - 1 + \mathrm{i}(\sin(x) - x)$. Also (mit Hilfe von Satz 6.17)

$$\Big|\sin(x) - x\Big| \;\leq\; |e^{\mathrm{i}x} - (1+\mathrm{i}x)| \leq \frac{2}{2!}|x|^2 = x^2.$$

Deswegen

$$\left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| = \frac{|\sin(x) - x|}{|x|} \leq |x|$$

und damit

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| \leq \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} |x| \;=\; 0.$$

□

Satz 9.12 Die Funktion cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle t_0. Wir definieren

$$\pi := 2t_0.$$

Der Kosinus ist streng monoton fallend auf $[0,2]$ und der Sinus ist streng monoton steigend auf $[0,\frac{\pi}{2}]$. Beide Funktionen sind positiv auf $(0,\frac{\pi}{2})$.

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass cos durch eine alternierende Reihe gegeben wird. Sei $s_n(x)$ die $n-$te Partialsumme, d.h.

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für $x \in [0,2]$ ist $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)_k$ monoton fallend, da

$$\frac{\frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}}{\frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} < 1 \qquad \forall x \in [0,2], k \geq 1.$$

Wie im Beweis von Satz 6.8 gezeigt wurde, ist also $(s_{2j}(x))_j$ monoton fallend und $(s_{2j+1}(x))_j$ monoton wachsend für alle $x \in [0,2]$. Da $s_n(x)$ gegen $\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gilt dies auch für die Teilfolgen $s_{2j}(x)$ und $s_{2j+1}(x)$. Aus den Monotonie-Eigenschaften folgt dann

$$s_{2j+1}(x) \leq \cos(x) \leq s_{2j}(x) \quad \forall x \in [0,2], j \in \mathbb{N}_0$$

und

$$|\cos(x) - s_{2j+1}(x)| \leq |s_{2j+2}(x) - s_{2j+1}(x)| \quad \forall x \in [0,2], j \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere

$$|\cos(x) - s_1(x)| \leq \frac{x^4}{4!} \;\forall x \in [0,2], \text{ d.h. } |\cos(x) - (1 - \tfrac{x^2}{2})| \leq \frac{x^4}{24} \;\forall x \in [0,2].$$

Im Punkt $x = 2$ erhält man
$$|\cos(2) - (-1)| \le \frac{2}{3},$$
also $\cos(2) < 0$.

Durch eine ähnliche Argumentation zeigt man, dass
$$\sin(x) \ge \frac{x}{3} \quad \forall x \in [0, 2]. \tag{9.1}$$

Als nächstes zeigen wir die Monotonie und finden die eindeutige Nullstelle von cos. Sei $0 \le x < y \le 2$. Mit Korrolar 9.9 und Abschätzung (9.1) folgt
$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} \le -2\frac{x+y}{6}\frac{y-x}{6} = \frac{x^2-y^2}{18} < 0.$$

Es ist also cos streng monoton fallend auf $[0, 2]$. Deswegen und wegen $\cos(0) = 1 > 0, \cos(2) < 0$ und der Stetigkeit von cos folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein eindeutiges $t_0 \in (0, 2)$ gibt, sodass $\cos(t_0) = 0$. Wir definieren
$$\pi := 2t_0.$$

Es ist also $\cos(x) > 0$ für alle $x \in [0, \pi/2)$.

Sei nun $0 \le x < y \le \pi/2$.
$$\sin(y) - \sin(x) = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} > 0,$$
weil $\cos\frac{x+y}{2} > 0$ und nach (9.1) ist $\sin\frac{y-x}{2} \ge \frac{y-x}{6} > 0$. Also ist sin streng monoton wachsend auf $[0, \pi/2]$.

Wegen $\sin(0) = 0$ folgt $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi/2]$. □

Satz 9.13 (Spezielle Werte von exp**)** Für die komplexe Exponentialfunktion gilt
$$\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}, \quad \exp(\mathrm{i}\pi) = -1, \quad \exp\left(\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}, \quad \exp(2\pi\mathrm{i}) = 1.$$

Da $\cos(\pi/2) = 0$, folgt aus dem letzten Satz
$$\sin^2(\pi/2) = 1 - \cos^2(\pi/2) = 1.$$

Weil $\sin(\pi/2) > 0$, erhält man $\sin(\pi/2) = 1$. Also folgt
$$\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}.$$

Die restliche Werte folgen wegen $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{i}^3 = -i, \mathrm{i}^4 = 1$ und aus dem Rechenregeln für die Exponentialfunktion.

Bemerkung. Aus Satz 9.13 können folgende Werte von cos und sin abgeleitet werden

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Korollar 9.14 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x), \qquad \sin(x+2\pi) = \sin(x), \tag{i}$$
$$\cos(x+\pi) = -\cos(x), \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x), \tag{ii}$$
$$\cos(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right). \tag{iii}$$

Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

Korollar 9.15 (Nullstellen von Sinus und Kosinus) Es gilt

- $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für die Aussage zu Sinus benutzen wir $\cos(x) > 0\ \forall x \in [0, \pi/2)$ und $\cos(-x) = \cos(x)\ \forall x$ um erstmal

$$\cos(x) > 0\ \forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

zu schließen. Aus $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ folgt $\sin(x) > 0\ \forall x \in (0, \pi)$ und aus $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ dann $\sin(x) < 0\ \forall x \in (\pi, 2\pi)$. Wir erhalten, dass auf $[0, 2\pi]$ die Funktion sin nur die Nullstellen 0 und π hat. Wegen der 2π-Periodizität hat sin auf $\mathbb{R}$ nur die Nullstellen $0 + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ und $\pi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Insgesamt also $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Die Aussage zu Kosinus folgt dann aus $\cos(x) = -\sin(x - \pi/2)$. □

Korollar 9.16 Es gilt für $x \in \mathbb{R}$ genau dann $\exp(\mathrm{i}x) = 1$, wenn $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Aus den vorherigen Aussagen folgt $\mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}x}) = \cos(x) = 1$ genau dann wenn $x \in K_0 := \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathrm{Im}(e^{\mathrm{i}x}) = \sin(x) = 0$ genau dann wenn $x \in K_0$. □

Definition.

1. Die *Tangensfunktion* ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

2. Die *Kotangensfunktion* ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert durch

$$\cot x := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Bemerkung. Die Tangens- und Kotangensfunktionen sind auf ihren Definitionsbereichen stetig, siehe Satz 8.6.

Wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ folgt

$$\tan(-x) = -\tan(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \cot(-x) = -\cot(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aus Korollar 9.14 folgt

$$\cot(x) = -\tan(x - \tfrac{\pi}{2})\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beide Tangens- und Kontangensfunktion sind wegen Korollar 9.14 (ii) $\pi-$periodisch:

$$\tan(x+\pi) = \tan(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \cot(x+\pi)\cot(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Satz 9.17 (Umkehrfunktionen von Sinus, Kosinus und Tangens) 1. Die Funktion cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet $[0, \pi]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

nennen wir *Arcus-Kosinus.*

2. Die Funktion sin ist auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend und bildet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

nennen wir *Arcus-Sinus.*

3. Die Funktion tan ist auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und bildet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

nennen wir *Arcus-Tangens.*

Beweis. Für 1. folgt erstens aus Satz 9.12, dass cos auf $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend ist. Wegen der Symmetrie $\cos(-x) = \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$ ist cos streng monoton wachsend auf $[-\pi/2, 0]$. Da noch $\cos(x + \pi) = \cos(x)$ (Korollar 9.14), bekommen wir, dass cos streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ ist. Dies und der Fakt, dass cos stetig ist mit $\cos(0) = 1, \cos(\pi) = -1$, ergibt $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ (siehe Korollar 8.10).

Für den Beweis von 2. reicht es nun die Identität $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ zu verwenden.

Für den Beweis der strengen Monotonie von Tangens auf $[0, \pi/2)$ sei $0 \leq x < x' < \pi/2$. Aus $\sin(x) < \sin(x')$ und $\cos(x) > \cos(x')$ folgt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x')$. Da $\tan(-x) = -\tan(x)$, ist tan streng monoton wachsend auf $(-\pi/2, \pi/2)$.

Zu zeigen ist nun

$$\lim_{x \to \pi/2-} \tan(x) = \infty.$$

Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to \pi/2-$ und o.B.d.A $x_n > 0$ für alle n. Für $y_n := \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}$ gilt $y_n > 0$ und $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Also erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \tan(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{y_n} = \infty.$$

Weil $\tan(-x) = -\tan(x)$, impliziert dies

$$\lim_{x \to -\pi/2+} \tan(x) = -\infty.$$

Nach Korollar 8.10 ist $\tan((-\pi/2, \pi/2)) = \mathbb{R}$. □

9.3 Polarkoordinaten

Neben der Darstellung der komplexen Zahlen mit Hilfe der kartesischen Koordinaten, d.h. mit Hilfe des Realteiles und des Imaginärteiles, gibt es noch eine übliche Darstellung: mit Hilfe des Abstandes vom Ursprung und des orientierten Winkels (im Bogenmaß) zur positiven reellen Halbachse. Diese zwei Größen heißen die Polarkoordinaten.

Satz 9.18 (Polarkoordinaten) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi},$$

wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in [0, \infty)$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis. Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot \exp(\mathrm{i}\varphi)$ für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$.
Sei im Folgenden also $z \neq 0$. Mit der Bezeichnung $r := |z|$ folgt

$$z = r\zeta, \text{ wobei } \zeta := \frac{z}{r}.$$

Sei

$$\mu := \mathrm{Re}(\zeta), \quad \nu := \mathrm{Im}(\zeta).$$

Da $|\zeta| = 1$, also $\mu^2 + \nu^2 = 1$, gilt $|\mu| \leq 1$ und

$$\alpha := \arccos \mu$$

ist wohldefiniert und erfüllt $\alpha \in [0, \pi], \cos(\alpha) = \mu$. Damit ist

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \mu^2 = \nu^2.$$

Dann gilt entweder für $\varphi := \alpha$ oder $\varphi := -\alpha$, dass $\sin \varphi = \nu$. Mit der entsprechenden Wahl von φ folgt

$$\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi = \mu + \mathrm{i}\nu = \zeta$$

und damit auch $r \exp(\mathrm{i}\varphi) = z$.
Für die Eindeutigkeit seien $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ so, dass $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\psi)$. Dann folgt

$$\exp\left(\mathrm{i}(\varphi - \psi)\right) = 1$$

und mit Korollar 9.16 folgt, dass $\psi = \varphi + k \cdot 2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung. Mit Hilfe der Polarkoordinaten wird das Produkt (und Quotient) von zwei komplexen Zahlen sehr einfach berechnet:

$$z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{\mathrm{i}\varphi_2} \;\Rightarrow\; z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Korollar 9.19 (n−te Einheitswurzel) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung

$$z^n = 1$$

hat genau n komplexe Lösungen, nämlich $z = w_k$, wobei

$$w_k = e^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Beweis. Sei $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C}$. Aus dem letzten Satz folgt, dass $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wegen $r \geq 0$ und

$$1 = |z^n| = |z|^n = r^n$$

gilt $r = 1$. Also erhalten wir $e^{\mathrm{i}n\varphi} = 1$. Korollar 9.16 liefert

$$n\varphi = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Und weil $\varphi \in [0, 2\pi)$, bekommen wir $k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$. □

10 Differentiation

Der nächste zentrale Begriff der Analysis ist die Differenzierbarkeit und die Ableitung.

10.1 Die Ableitung

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in I$ *differenzierbar*, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (als reelle Zahl, d.h. $f'(x_0) \in \mathbb{R}$). Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt die *Ableitung* von f im Punkt x_0.

Bemerkung.

- Die Ableitung wird oft dargestellt auch als

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dies ist natürlich äquivalent zur obigen Definition.

- Üblicherweise wird die kurze Notation $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, bzw. $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ verwendet. Dabei wird verstanden, dass nur solche Folgen (x_n) (bzw (h_n)) betrachtet werden, für welche $x_n \to x_0$ und $x_n \neq x_0 \ \forall n$ (bzw. $h_n \to 0, h_n \neq 0 \ \forall n$).

- Geometrisch ist für $x \neq x_0$ der Differenzenquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Sekante durch $\big(x_0, f(x_0)\big)$ und $\big(x, f(x)\big)$. Beim Grenzübergang $x \to x_0$ geht die Sekante in die Tangente des Graphen von f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$ über. $f'(x_0)$ ist also die Steigung der Tangente des Graphen von f in $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

- Andere übliche Notation für die Ableitung: $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (nicht unbedingt offen) und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in I$ *rechts* (bzw. *links*) *differenzierbar*, falls

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0+, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{bzw. } f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0-, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f'_+(x_0)$ (bzw. $f'_-(x_0)$) heißt die *rechtsseitige* bzw. *linksseitige Ableitung* von f im Punkt x_0.

Bemerkung.

- Falls $f'(x_0)$ existiert, dann gilt offenbar $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Man kann auch relativ einfach zeigen (Übungsaufgabe), dass falls $f'_+(x_0)$ und $f'_-(x_0)$ existieren und $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ gilt, dann ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

- Falls $I = [a, b]$ mit $a < b$, dann kann offenbar nur die rechtsseitige Ableitung in a und nur die linksseitige in b existieren.

Beispiel.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha x + \beta$ mit fest gewählten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f'(x_0) = \alpha$. Wir haben nämlich

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha x - \alpha x_0}{x - x_0} = \alpha.$$

2. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist $f'(x_0) = 2x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, denn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0.$$

3. Für $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}\right) = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(x_0+h)x_0}\right) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

4. Für $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\exp'(x_0) = \exp(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\exp'(x_0) \quad = \quad \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x_0+h)-\exp(x_0)}{h} = \exp(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x_0),$$

wobei im letzten Schritt Satz 6.17 benutzt wurde. In Detail

$$|\exp(h)-(1+h)| \le 2\frac{h^2}{2!} = h^2 \quad \forall |h| \le \frac{3}{2}$$

und deswegen $\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h+r(h)}{h}$, wobei $0 \le r(h) \le h^2$. Es folgt also

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h} = 1.$$

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp(x), & x \le 0 \\ 2x+1, & x > 0. \end{cases}$

Wir haben

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{\exp(h)-\exp(0)}{h} \overset{\text{Bsp.4}}{=} \exp(0) = 1$$

und

$$f'_+(0) \overset{\text{Bsp.1}}{=} 2.$$

Da $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, existiert $f'(0)$ nicht.

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ x+1, & x > 0. \end{cases}$.

Hier gilt $f'_-(0) = 1$, aber $f'_+(0)$ und $f'(0)$ existieren nicht. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

7. Für $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$ und $\cos'(x_0) = -\sin(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sin'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &\overset{\text{Kor.9.9}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x_0+h/2)\sin(h/2)}{h} \\ = \lim_{h\to 0}\cos(x_0+h/2)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} &= \cos(x_0),\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit von cos und Proposition 9.11 benutzt wurden. Der Beweis für cos ist analog.

Satz 10.1 (Lineare Approximierbarkeit) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, falls $m \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$$

wobei $\varphi : I \to \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

erfüllt. In diesem Fall ist $f'(x_0) = m$.

Beweis. „$\Rightarrow$“:
Sei also f differenzierbar in x_0 und $m := f'(x_0)$. Dann

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$$

für

$$\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$$

und

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m.$$

Da $m = f'(x_0)$, folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

„$\Leftarrow$“:
Gelte umgekehrt

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$$

mit

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \left(m + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \right) \\ &= m. \end{aligned}$$

Also f ist differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = m$. □

Bemerkung. Differenzierbarkeit in einem Punkt x_0 ist also gleichbedeutend mit der Approximierbarkeit durch eine affin-lineare Funktion, nämlich durch $L(x) := f(x_0) + m(x - x_0)$.

Korollar 10.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f stetig in x_0.

Beweis. Nach Satz 10.1 gilt $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \varphi(x)$, wobei $\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$. Es muss also gelten $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} (m(x - x_0) + \varphi(x)) = f(x_0).$$

□

Bemerkung. Die Rückrichtung gilt nicht! Stetige aber nicht differenzierbare Funktionen sind z.B. die Betrag-Funktion oder Bsp 5 oben.

10.2 Differentiations-Regeln

Satz 10.3 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\lambda f,\ f+g,\ f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gelten

1. Linearität:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0) \end{aligned}$$

2. Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3. Quotientenregel:
   Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist

$$\frac{f}{g} : \{x \in I : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R},$$

   differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. 1. folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte, da die Ableitung auch einfach nur ein Grenzwert ist.

2. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\Big(f(x) - f(x_0)\Big)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

   Damit

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ = \ & \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ = \ & f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

3. Zunächst betrachten wir den Spezialfall:

$$f(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in I$$

   Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} = -\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Da $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} = \frac{1}{g(x_0)^2}$, folgt

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0)$$

Für beliebige f schreiben wir den Quotienten als Produkt um und wenden die Produktregel an.

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

Damit ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) \\
&= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel.

- Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ mit fest gewähltem $n \in \mathbb{N}$ ist $f'(x) = nx^{n-1}$.

  Beweis. (Induktion.)
  Induktionsanfang: Die Fälle $n = 1, 2$, haben wir schon vorher besprochen.

  Induktionsschritt ($n \to n + 1$):
  Mit Hilfe der Produktregel bekommen wir

  $$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x'x^n + x(x^n)' \overset{\text{I.V.}}{=} x^n + xnx^{n-1} = (n + 1)x^n.$$

  □

- Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ist $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

  Beweis. Die Quotientenregel ergibt

  $$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

  □

- Für $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x$.

  Beweis.

  $$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)^2 - (\sin x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

  □

Bemerkung. Aus den ersten zwei Beispielen und aus $1' = 0$ folgt, dass $(x^k)' = kx^{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ auf dem Definitionsbereich von x^k.

Satz 10.4 (Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall,

$$f : I \to \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend (oder fallend). Sei dann

$$g = f^{-1} : J \to \mathbb{R},\ J = f(I).$$

Ist dann f differenzierbar in $x_0 \in I$ und ist $f'(x_0) \neq 0$, so ist g im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

Beweis. Sei also (y_n) eine Folge in J mit

$$y_n \to y_0,\ y_n \neq y_0,$$

dann existieren $x_n \in I$ mit $y_n = f(x_n)$ und $x_n \neq x_0$. Dann ist

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}}.$$

Mit $y_n \to y_0$, $g(y_n) = x_n$, und da g stetig nach Korollar 10.2, folgt

$$x_n = g(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(y_0) = x_0.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Beispiel.

- Für $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$.
  $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist nämlich die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$. Da $(\exp)' = \exp$ nichtnegativ ist, folgt mit Satz 10.4, dass log differenzierbar ist in jedem $x \in (0,\infty)$ mit

$$(\log)'(x) = \frac{1}{(\exp)'\big(\log(x)\big)} = \frac{1}{\exp\big(\log(x)\big)} = \frac{1}{x}.$$

- $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist auf $(-1,1)$ differenzierbar und $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in (-1,1)$.
  sin ist differenzierbar für alle $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und wir erhalten

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'\big(\arcsin x\big)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

  Setze $y := \arcsin x$. Damit ist $\sin y = x$ und $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$. Also

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Da cos nicht-negativ auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ist, folgt

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

und damit

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- Mit ähnlichen Rechnungen zeigt man

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für $x \in (-1, 1)$.

- Für $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Mit Hilfe der Ableitung von log kann man zeigen:

Proposition 10.5

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Beweis. Wir betrachten erst den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim \frac{\log(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log 1}{\frac{1}{n}} = \log'(1) = 1.$$

Da nun $(1 + \frac{1}{n})^n = \exp(n \log(1 + \frac{1}{n}))$ und das Argument der Exponentialfunktion gegen 1 strebt, erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e^1 = e \quad (n \to \infty).$$

□

Satz 10.6 (Kettenregel) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$. f sei differenzierbar in einem $x_0 \in I$ und g sei differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$. Dann ist

$$g \circ f : I \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

differenzierbar in x_0 mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Für $x \in I$ mit $x \neq x_0$ möchten wir den Grenzwert von $\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0}$ betrachten. Dafür definiere

$$g^* : J \to \mathbb{R},\ g^*(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0, \\ g'(y_0) & \text{für } y = y_0. \end{cases}$$

Dann ist

$$\lim_{y \to y_0} g^*(y) = g'(y_0) = g^*(y_0),$$

da g differenzierbar in y_0. Weiterhin ist

$$g(y) - g(y_0) = g^*(y) \cdot (y - y_0) \quad \forall y \in J.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{g^*\big(f(x)\big)\big(f(x)-f(x_0)\big)}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0} g^*\big(f(x)\big)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= g^*(y_0)\cdot f'(x_0)\\ &= g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0).\end{aligned}$$

□

Beispiel.

- Für eine beliebige differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $a,b\in\mathbb{R}$ und $F(x):=f(ax+b)$ gilt $F'(x)=f'(ax+b)(ax+b)'=af'(ax+b)$.
- Für $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, x\mapsto x^a$ mit $a\in\mathbb{R}$ gilt $f'(x)=ax^{a-1}$.

  Wir haben nämlich $f(x)=\exp(a\log x)$, also

  $$f'(x)=\exp'(a\log x)\frac{d}{dx}(a\log x)=\exp(a\log x)\frac{a}{x}=x^a\frac{a}{x}=ax^{a-1}.$$

- Für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto a^x$ mit $a>0$ gilt $f'(x)=a^x\log a$ (Übunsgaufgabe).

Definition. (Höhere Ableitungen) Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar in I mit Ableitungen

$$f':I\to\mathbb{R}.$$

Falls die Ableitung

$$f''(x_0):=(f')'(x_0)$$

in $x_0\in I$ existiert, so nennen wir f zweimal differenzierbar in x_0 und $f''(x_0)$ die zweite Ableitung von f in x_0.

Induktiv definieren wir dann k - te Ableitungen von f, $k\in\mathbb{N}$. Notation: $\frac{d^kf}{dx^k}(x_0)$ oder $f^{(k)}(x_0)$.

f heißt k-mal stetig differenzierbar in I, falls $f^{(k)}(x)$ existiert in jedem $x\in I$ und $f^{(k)}$ stetig ist in I. Wir schreiben

$$f\in C^k(I).$$

Falls $f\in C^k(I)\ \forall k\in\mathbb{N}$, dann schreibt man $f\in C^\infty(I)$.

Beispiel. Wir zeigen, dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^n$ in $C^\infty(\mathbb{R})$ liegt.

Die Ableitungen haben die Form

$$f'(x)=nx^{n-1},\ f''(x)=n(n-1)x^{n-2},\dots,f^{(k)}(x)=n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}\ \forall k\le n$$

und

$$f^{(k)}(x)=0\ \forall k>n.$$

Alle diese Ableitungen sind stetig, also gilt $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.

10.3 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Definition. Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < b$, hat in $x_0 \in (a, b)$

1. ein *lokales Maximum*, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - x_0| < \epsilon$ gilt,
$$f(x) \leq f(x_0)$$
2. ein *striktes lokales Maximum*, falls sie da eine lokales Maximum hat und es gibt $\varepsilon > 0$, sodass
$$f(x) = f(x_0), |x - x_0| < \varepsilon$$
nur für $x = x_0$ gilt.

Ein *lokales und striktes lokales Minimum* wird analog (mit $f(x) \geq f(x_0)$) definiert. Ein *Extremum* ist ein Oberbegriff für Maximum und Minimum.

Satz 10.7 Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ besitze in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und sei differenzierbar in x_0. Dann gilt
$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur den Fall des lokalen Maximums in x_0. Es gibt also $\varepsilon > 0$, sodass
$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b) \text{ mi } |x - x_0| < \varepsilon.$$
Damit gilt für $x_0 - \varepsilon < x < x_0$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$
Da f differenzierbar in x_0 ist, haben wir
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$
Für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$
und damit auch
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$
also $f'(x_0) \leq 0$ und $f'(x_0) \geq 0$. Daraus folgt $f'(x_0) = 0$. □

Bemerkung. 1. Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein Extremum in $x_0 = a$ bzw. $x_0 = b$ hat, so folgt nicht, dass $f'_-(x_0) = 0$ bzw. $f'_+(x_0) = 0$, auch wenn $f'_-(x_0)$ bzw. $f'_+(x_0)$ existiert. Betrachte, z.B. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

2. Falls $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so ist $f'(x_0) = 0$ notwendig für lokales Extremum an x_0, aber nicht hinreichend. Ein Beispiel ist $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3, x_0 = 0$. Es gilt $f'(0) = 0$, aber f hat kein lokales Extremum in $x_0 = 0$.

3. $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ hat lokales Minimum in $x = 0$, ist aber nicht differenzierbar in $x = 0$, das Kriterium aus Satz 10.7 ist also nicht anwendbar.

Definition. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f differenzierbar an x_0. Dann heißt x_0 *stationärer Punkt* von f, falls $f'(x_0) = 0$. Ein stationärer Punkt, der kein lokales Extremum ist, heißt *Sattelpunkt*.

Satz 10.8 (Rolle) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und sei

$$f(a) = f(b).$$

Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis.

1. Falls f konstant ist, dann ist die Aussage trivial.
2. Sonst gibt es $x_* \in (a, b)$ mit $f(x_*) > f(a)$ oder $f(x_*) < f(a)$. Im ersteren Fall nimmt f sein Maximum in einem $x_0 \in (a, b)$ an (siehe Satz 8.11). Im letzteren Fall nimmt f sein Minimum in einem $x_0 \in (a, b)$ an.

   Aus der Differenzierbarkeit von f und Satz 10.7 folgt $f'(x_0) = 0$.

□

Satz 10.9 (Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Sei

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann gilt $F(a) = F(b) = f(a)$. Außerdem ist F stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Mit dem Satz von Rolle folgt $F'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.

Also

$$0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Bemerkung. Der Mittelwertsatz sagt also, dass die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer gewissen Zwischenstelle $(x_0, f(x_0))$ ist.

Korollar 10.10 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Fall es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in (a, b),$$

dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$

$$m(x_2 - x_1) \ \leq \ f(x_2) - f(x_1) \ \leq \ M(x_2 - x_1).$$

Insbesondere is f Lipschitz-stetig mit

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \max\{M, -m\}|x_2 - x_1| \ \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Beweis. Sei $x_1 < x_2$ wie im Satz. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Damit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1) \begin{cases} \leq M(x_2 - x_1) \\ \geq m(x_2 - x_1) \end{cases}.$$

Die Lipschitz-Stetigkeit folgt aus

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \max\{f(x_2) - f(x_1), f(x_1) - f(x_2)\} \leq \max\{M, -m\}(x_2 - x_1) = \max\{M, -m\}|x_2 - x_1|.$$

□

Bemerkung. In den Voraussetzungen von Satz 10.8 und 10.9 ist f stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dies ist natürlich allgemeiner als die Differenzierbarkeit auf $[a, b]$ (wobei die Ableitungen in a und b einseitig sind). Zum Beispiel, gilt der Mittelwertsatz für die Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$, die in $x = 0$ nicht rechtsseitig-differenzierbar ist.

Korollar 10.11 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt

1. $f'(x) = 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f konstant.
2. $f'(x) \geq 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f monoton wachsend.
3. Falls $f'(x) > 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f strikt monoton wachsend.
4. $f'(x) \leq 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f monoton fallend.
5. Falls $f'(x) < 0 \quad$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f strikt monoton fallend.

Bemerkung. In 3. und 5. oben gilt keine Äquivalenz wegen Sattelpunkten. Zum Beispiel ist $f(x) = x^3$ in $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsend obwohl $f'(0) = 0$.

Beweis.

1. Sei $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, dann folgt aus Korollar 10.10 mit $m = M = 0$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &\leq 0(x_2 - x_1) = 0 \\ f(x_2) - f(x_1) &\geq 0(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}$$

   Damit $f(x_1) = f(x_2)$ und es folgt f konstant. Das zeigt die Hinrichtung.

   Die Rückrichtung folgt sofort.

2. Hinrichtung:
   Sei also

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b),$$

   mit Korollar 10.10 und $m = 0$ folgt für $x_1 < x_2$, dass

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

   also $f(x_1) \leq f(x_2)$ und es folgt f monoton wachsend.

   Rückrichtung:
   Sei f monoton wachsend, $x_0 \in (a, b)$. Dann

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

   denn $f(x) \leq f(x_0)$ für $x < x_0$.

3. Mit 2. folgt f monoton wachsend. Angenommen
$$f(x_1) = f(x_2) \text{ für } x_1 < x_2.$$
Satz 10.8 angewendet auf das Intervall $[x_1, x_2]$ liefert:
Es existiert $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x_0) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
4. und 5. gehen analog zu 2. und 3.

□

Satz 10.12 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema) (i) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig auf (a,b). Sei $x_0 \in (a,b)$ und f differenzierbar auf $(a,b) \setminus \{x_0\}$. Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
$$f'(x) < 0 \;\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \qquad f'(x) > 0 \;\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$
dann hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.
Falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass
$$f'(x) > 0 \;\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \qquad f'(x) < 0 \;\forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon),$$
dann hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

(ii) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b), $x_0 \in (a,b)$, f zweimal differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$). Dann hat f ein striktes lokales Minimum (bzw. striktes lokales Maximum) in x_0.

Beweis. (i) Wir betrachten o.B.d.A. nur den ersten Fall. Mit Korollar 10.11 5. angewendet auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ folgt f streng monoton fallend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$. Mit Korolloar 10.11 3. angewendet auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ folgt f streng monoton steigend auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$.
Damit folgt
$$f(x_0) < f(x) \quad \text{für alle } x \neq x_0$$

(ii)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0$$
Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass für alle $x \in (a,b)$, $|x - x_0| < \varepsilon,\ x \neq x_0$:
$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0.$$
Dann gilt für alle solche x mit $x > x_0$:
$$f'(x) - f'(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f'(x) > f'(x_0) = 0 \quad \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$
Für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ folgt entsprechend
$$f'(x) < f'(x_0) = 0.$$
Mit (i) angewandt auf das Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ folgt die Behauptung.

□

Satz 10.13 (Zweiter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $x_0 \in (a,b)$ mit
$$g'(x_0)(f(b) - f(a)) = f'(x_0)(g(b) - g(a)).$$

Beweis. Die Funktion

$$h(x) := (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

ist differenzierbar auf $(a, b))$ und erfüllt $h(a) = h(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, sodass $h'(x_0) = 0$. Also

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) - (g(b) - g(a))f'(x_0) = 0.$$

□

Satz 10.14 (de l'Hospital-I) Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) mit

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0.$$

Es gelte weiter $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es existiere der Grenzwert

$$q := \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es gilt

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$\widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \in (a, b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Als erstes zeigen wir, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Sonst wäre nämlich $g(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Wegen $\widetilde{g}(a) = \widetilde{g}(x_0) = 0$ folgt dann aus dem Satz von Rolle, dass $g'(\zeta) = 0$ für ein $\zeta \in (a, x_0)$, welches ein Widerspruch ist.

Aus Satz 10.13 erhalten wir nun für jedes $x \in (a, b)$ ein $x_0 \in (a, x)$, sodass

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(a)}{\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(a)} = \frac{\widetilde{f}'(x_0)}{\widetilde{g}'(x_0)}.$$

Die linke Seit ist aber gleich $f(x)/g(x)$ und die rechte Seite ist gleich $f'(x_0)/g'(x_0)$. Für $x \to a+$ gilt auch $x_0 \to a+$, also ist

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to a+} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = q.$$

□

Bemerkung.

- Satz 10.14 gilt auch für $a = -\infty$ sowie für $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b-} g(x) = 0$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- Satz 10.14 gilt auch für den beidseitigen Grenzwert in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$, wobei $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, $f(x), g(x) \to 0$ für $x \to x_0$, $g'(x) \neq 0$ auf (a, b) und $f'(x)/g'(x) \to q \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$. Dies kann man entweder durch die Anwendung des Satzes auf die Fälle $x \to x_0-$ und $x \to x_0+$ beweisen oder man modifiziert den Beweis des Satzes für den Fall des beidseitigen Grenzwerts.

Beispiel.
- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^\alpha - 1}{\log x} = \alpha$.

  Wir setzen hier $f(x) := x^\alpha - 1$, $g(x) := \log x$. Offenbar gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = \lim_{x\to 1} g(x)$. Außerdem $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0 \ \forall x > 0$ und
$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{x^{-1}} = \lim_{x\to 1} \alpha x^\alpha = \alpha.$$
  Mit der l'Hospital-Regel erhalten wir
$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Satz 10.15 (de l'Hospital-II) Seien $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) mit
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \infty.$$
Es gelte weiter $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und es existiere der Grenzwert
$$q := \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Dann gilt
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = q.$$

Beweis. Sei $(x_n) \subset ()a, b]$ eine Folge mit $x_n \to a$ und wähle ein $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $\delta > 0$, sodass $a + \delta \in (a, b)$ und
$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - q \right| \leq \varepsilon \ \forall x \in (a, a + \delta),$$
da $f'(x)/g'(x) \to q$ für $x \to a+$.

Wegen $f(x_n), g(x_n) \to \infty$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f(x_n) > 0$ und $g(x_n) \geq \max\{0, q(a + \delta)\} \ \forall n \geq n_0$. Wir haben
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a+\delta)}{g(x_n) - g(a+\delta)} \frac{\frac{g(x_n)-g(a+\delta)}{g(x_n)}}{\frac{f(x_n)-f(a+\delta)}{f(x_n)}} = \frac{f(x_n) - f(a+\delta)}{g(x_n) - g(a+\delta)} \frac{1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x_n)}}{1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x_n)}} \quad \forall n \geq n_0. \tag{10.1}$$
Nun gilt erstens
$$1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x_n)} \to 1, \ 1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x_n)} \to 1 \text{ für } n \to \infty, \tag{10.2}$$
da $f(x_n), g(x_n) \to \infty$. Mit dem zweiten Mittelwertssatz ist für jedes n
$$\frac{f(x_n) - f(a+\delta)}{g(x_n) - g(a+\delta)} = \frac{f'(\zeta_n)}{g'(\zeta_n)} \text{ für ein } \zeta_n \in (x_n, a + \delta).$$
Mit (10.1) folgt nun
$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - q \right| = \left| \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \frac{1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x_n)}}{1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x_n)}} - q \right|.$$
Wir definieren
$$\varphi_n := \frac{1 - \frac{g(a+\delta)}{g(x_n)}}{1 - \frac{f(a+\delta)}{f(x_n)}}.$$

Dann gilt nach (10.2) $\varphi_n \to 1 (n \to \infty)$. Da außerdem

$$\left|\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} - q\right| < \varepsilon \ \forall n,$$

folgt mit der Dreiecksungleichung, dass es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - q\right| = \left|\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}\varphi_n - q\right| < 2\varepsilon \ \forall n \geq n_1.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist folgt $f(x_n)/g(x_n) \to q \quad (n \to \infty)$. □

Bemerkung. Satz 10.15 gilt auch für

- $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a+} g(x) = \pm\infty$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
- $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ und $\lim_{x\to b-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to b-} g(x) = \pm\infty$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beispiel. Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$.

10.4 Konvexität

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex (auf D), falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und für alle $t \in (0, 1)$

$$f\Big(tx_1 + (1-t)x_2\Big) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Bemerkung. Geometrisch bedeutet Konvexität, dass für beliebige zwei Punkte des Graphen der Graph von f für alle x - Werte zwischen diesen Punkten immer unterhalb der Sekante durch diese Punkte liegt.
Um dies zu zeigen, schreiben wir die Gleichung der Sekante

$$s(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Punkte $x \in (x_1, x_2)$ kann man schreiben als

$$x(t) = tx_1 + (1-t)x_2$$

mit $t \in (0, 1)$.

Der Wert der Sekantenfunktion in $x(t)$ ist

$$\begin{aligned}
s\big(x(t)\big) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\underbrace{\big(x(t) - x_1\big)}_{(1-t)(x_2-x_1)} \\
&= f(x_1) + (1-t)\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \\
&= tf(x_1) + (1-t)\cdot f(x_2) \\
&\geq f\big(x(t)\big),
\end{aligned}$$

falls f konvex ist.

Satz 10.16 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf I. Dann is f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

Beweis. Gelte erst $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Es folgt, dass f' monoton wachsend auf I ist. Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und setze $x := tx_1 + (1-t)x_2$. Da $x \in (x_1, x_2)$, folgt aus dem Mittelwertssatz (und der Monotonie von f'), dass es $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ gibt mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Aus $x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), x_2 - x = t(x_2 - x_1)$ folgt

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - t} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{t},$$

also

$$f(x) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \text{ d.h. } f \text{ ist konvex.}$$

Sei nun f konvex und zweimal differenzierbar auf I. Angenommen es gibt ein $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c := f'(x_0)$ und $\varphi(x) := f(x) - c(x - x_0)$ für alle $x \in I$. φ ist ebenso zweimal differenzierbar und es gilt $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Also hat φ ein striktes lokales Maximum in x_0. Deswegen gibt es ein $h > 0$, sodass

$$[x_0 - h, x_0 + h] \subset I, \ \varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0), \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0).$$

Für f erhalten wir

$$f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0 + h) + \varphi(x_0 - h)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 + h) + f(x_0 - h)\right). \tag{10.3}$$

Mit $t = 1/2$ ist $x_0 = t(x_0 - h) + (1-t)(x_0 + h) =: tx_1 + (1-t)x_2$ und aus (10.3) folgt

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

also ein Widerspruch mit der Konvexität. □

Lemma 10.17 (Youngsche Ungleichung) Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $x, y > 0$

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Beweis. Wir verwenden die Funktion $f(x) := -\log(x)$ auf $(0, \infty)$. Da $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, ist f konvex. Also folgt

$$f\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \leq \frac{1}{p}f(a) + \frac{1}{q}f(b) \quad \forall a, b > 0,$$

wobei die Voraussetzung $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ verwendet wurde (etwa mit $t := \frac{1}{p}$). Das heißt

$$\log\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \geq \frac{1}{p}\log(a) + \frac{1}{q}\log(b) \quad \forall a, b > 0$$

und nach der Anwendung der (streng monotonen) Exponentialfunktion

$$\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \geq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \quad \forall a, b > 0.$$

Mit $x := a^{\frac{1}{p}}, y := b^{\frac{1}{q}}$ folgt $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ $\forall x, y > 0$. □

Bemerkung. Für $p = q = 2$ folgt die Youngsche Ungleichung sofort aus $(x - y)^2 \geq 0$ für alle $x, y > 0$.

11 Das Riemann Integral

Der letzte zentrale Begriff der Vorlesung Analysis I ist das Integral.

Sei $a < b$.

Definition. 1. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ is eine endliche Teilmenge

$$Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$$

mit $x_0 = a, x_n = b$ und $x_{j-1} < x_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

2. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt eine *Treppenkfunktion*, falls es eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, sodass f konstant auf jedem Teilintervall (x_{j-1}, x_j), $j = 1, \ldots, n$.

3. Die Menge aller möglichen Treppenfunktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $T[a, b]$.

Bemerkung. Die Werte einer Treppenfunktion in den Zerlegungspunkten $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ können beliebig sein. Diese Werte spielen in der Definition des Integrals keine Rolle, wie wir als nächstes sehen werden.

Definition. (Integral für Treppenfunktionen) Sei $f \in T[a, b]$ mit der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und für jedes $k = 1, \ldots, n$ sei $f(x) = c_k \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

heißt das Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkung. Eine einzige Treppenfunktion f kann bezüglich mehrerer Zerlegungen definiert werden. Zum Beispiel kann jedes Teilintervall in beliebig viele kleinere Teilintervalle unterteilt werden. Damit das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wohldefiniert ist, muss geezeigt werden, dass der Wert des Integrals von der Zerlegung unabhängig ist.

Behauptung. Sei $f \in T[a, b]$. Dann ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung Z, d.h. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist wohl-definiert.

Beweis. Seien $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ und $Z' := \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ zwei Zerlegungen von $[a, b]$ mit

$$f|_{(x_{j-1}, x_j)} = c_j, \;\; f|_{(t_{j-1}, t_j)} = c'_j.$$

Sei

$$\int_Z f := \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - x_{j-1}), \qquad \int_{Z'} f := \sum_{j=1}^{m} c'_j(t_j - t_{j-1}).$$

Zu zeigen ist $\int_Z f = \int_{Z'} f$.

Wir beginnen mit dem Spezialfall $Z \subset Z'$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $x_i = t_{k_i}$ für ein $k_i \in \{1, \ldots, m\}$. Also

$$x_{i-1} = t_{k_{i-1}} < t_{k_{i-1}+1} < \cdots < t_{k_i} = x_i$$

und $c'_j = c_i$ für $k_{i-1} < j \leq k_i$. Deswegen

$$\int_{Z'} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i(t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_Z f.$$

Nun betrachte allgemeine Z, Z'. Für $Z^* := Z \cup Z'$ erhalten wir $Z \subset Z^*, Z' \subset Z^*$, also folgt mit dem Vorherigen $\int_{Z'} f = \int_{Z*} f = \int_Z f$. $\square$

Lemma 11.1 Seien $f, g \in T[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gelten

(i) $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $f \leq g \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis. Sei Z eine Zerlegung zu f und Z' eine zu g. Sei $Z \cup Z' = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Dies ist eine Zerlegung zu f sowie g. Es gilt $f(x) = c_j, g(x) = d_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Für (i) sieht man, dass $(f+g)(x) = c_j + d_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Also

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n (c_j + d_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^n d_j(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) folgt, da $(\lambda f)(x) = \lambda c_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Für (iii) bekommt man erst wegen $f \leq g$, dass $c_j \leq d_j$, $j = 1, \ldots, n$. Also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^n d_j(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

Nun möchten wir allgemeinere (erstmal nur beschränkte) Funktionen als nur Treppenfunktionen integrieren. Dafür definieren erst die untere und obere Integrale. In Abschnitt 11.3 werden wir auch unbeschränkte Funktionen integrieren.

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Das *untere (Riemann) Integral* ist

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x := \sup\Big\{ \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \ :\ g \in T[a,b],\ g \leq f \text{ auf } [a,b]\Big\}$$

und das *obere (Riemann) Integral* ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x := \inf\Big\{ \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \ :\ g \in T[a,b],\ g \geq f \text{ auf } [a,b]\Big\}.$$

Bemerkung. 1) Für jede Treppenfunktion $f \in T[a,b]$ ist $\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, da man im Supremum für $\underline{\int_a^b}$ sowie im Infimum für $\overline{\int_a^b}$ die Wahl $g = f$ treffen kann.

2) Offensichtlich gilt wegen Lemma 11.1 (iii) für jedes $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x,$$

da für alle $g_1, g_2 \in T[a,b]$ mit $g_1 \leq f \leq g_2$ auf $[a,b]$ gilt $\int_a^b g_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g_2(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Wir betrachten die Funktion $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, d.h. $f(x) := 1$ für $x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ und $f(x) := 0$ für $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Hier gilt
$$\underline{\int_0^1} f(x)\ \mathrm{d}x = 0, \quad \overline{\int_0^1} f(x)\ \mathrm{d}x = 1,$$
weil jede Treppenfunktion $g \in T[0,1]$ mit $g \le f$ erfüllt $g \le 0$ und jede Treppenfunktion $g \in T[0,1]$ mit $g \ge f$ erfüllt $g \ge 1$ (bis auf ggf. in den Zerlegungspunkten).

Definition. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-intergrierbar*, falls
$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x =: \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$
Dann heißt $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ *das Integral* von f über $[a,b]$.

Beispiel. Nach der obigen Bemerkung gilt:

1) jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar,
2) $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar.

Satz 11.2 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

1. f ist integrierbar.
2. Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \le f \le \psi$ auf $[a,b]$, sodass
$$\int_a^b \psi(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x \le \varepsilon.$$

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.:
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert nach Definition von Supremum eine Treppenfunktion $\varphi \le f$ mit
$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Genauso existiert eine Treppenfunktion ψ mit $f \le \psi$, sodass
$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \overset{1.}{=} \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \le \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
Damit gilt 2.

2. $\Rightarrow$ 1.:
Sei $\varepsilon > 0$ und seien φ, ψ wie in 2. Dann folgt
$$0 \le \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\le \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x} - \underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\ge \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x} \le \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon.$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Gleichheit, also 1. $\square$

Satz 11.3 Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Nach Satz 8.11 und Satz 8.12 ist f beschränkt und gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit existiert $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$:

$$\big|f(x) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Wir betrachten nun eine Zerlegung $Z = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $x_0 = a, x_n = b$ und $|x_j - x_{j-1}| < \varepsilon$ für alle j. Wir wählen Treppenfunktionen φ, ψ definiert durch

$$\varphi(x) := \inf_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y), \;\; \psi(x) := \sup_{y \in [x_{j-1}, x_j]} f(y), \quad x \in (x_{j-1}, x_j).$$

Es folgt

$$\psi(x) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in (x_{j-1}, x_j), j = 1, \dots, n.$$

Aus Lemma 11.1 (i) und (iii) folgt

$$\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Mit Satz 11.2 erhalten wir die Integrierbarkeit von f. $\square$

Satz 11.4 Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Betrachte den Fall f monoton steigend. Es gilt insbesondere $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, also ist f beschränkt.

Wir konstruieren eine Folge von Treppenfunktionen (φ_n) und (ψ_n) mit $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ auf $[a,b]$ und sodass $\int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Sei dafür $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen die Zerlegung

$$x_j := a + j\frac{b-a}{n}, \;\; j = 0, \dots, n$$

und setzen

$$\varphi_n(x) := f(x_{j-1}), \;\; \psi_n(x) := f(x_j) \quad \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j).$$

Aus der Monotonie von f folgt $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Außerdem

$$\begin{aligned}\int_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^n f(x_j)\frac{b-a}{n} - \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt eine Teleskop-Summe ausgenutzt wurde. Nach Satz 11.2 ist f integrierbar. $\square$

Bemerkung. Der Beweis impliziert auch, dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ergibt ein Verfahren, wie man das Integral von monotonen Funktionen berechnen kann.

Beispiel. Wir möchten für ein $b > 0$ das Integral $\int_0^b x \,\mathrm{d}x$ berechnen.

Sei dafür für $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung gegeben durch $x_j := \frac{jb}{n}$, $j = 0, \dots, n$. Damit ergibt sich

$$\int_0^b x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \sum_{j=1}^n j = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2(1+\frac{1}{n})}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

Riemannsche Summen

Die Riemannsche Summe ist eine Approximation des Integrals einer Funktion über $[a, b]$ mit Hilfe von Treppenfunktionen auf einer genügend feinen Zerlegung von $[a, b]$. Die Treppenfunktion muss nur in einem beliebigen Punkt auf jedem Teilintervall den gleichen Wert wie f haben.

Definition. Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

1. Die *Feinheit* von Z ist
$$\mu(Z) := \max_{1\le j\le n} (x_j - x_{j-1}).$$
2. Seien $\xi_j, j = 1, \dots, n$ beliebige Punkte in den Teilintervallen, d.h. $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j), j = 1 \dots, n$ (so genannte *Stützpunkte*). Die *Riemannsche Summe* von f bezüglich Z und $(\xi_j)_{j=1}^n$ ist
$$S(f, Z, (\xi_j)_{j=1}^n) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Satz 11.5 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z mit Feinheit $\mu(Z) < \delta$ und für jede Wahl von Stützpunkten $(\xi_j)_{j=1}^n$ in Z gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x - S(f, Z, (\xi_j)_{j=1}^n) \right| < \varepsilon.$$

Bemerkung. Satz 11.5 gilt eigentlich allgemeiner. Es gilt sogar, dass für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt die Riemann-Integrierbarkeit *äquivalent* ist zur Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\mu(Z)\to 0} S(f, Z, (\xi_j))$$

mit beliebigen Stützpunkten ξ_j. Es gilt dann $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{\mu(Z)\to 0} S(f, Z, (\xi_j))$.

Den Beweis findet man in [4], siehe Satz 5.5.2.

11.1 Integrationsregeln und Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 11.6 (Linearität und Monotonie) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $\lambda f, f + b : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b (\lambda f)(x) \, dx &= \lambda \int_a^b f(x) \, dx, \\ \int_a^b (f+g)(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx. \end{aligned}$$

Falls $f \le g$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \le \int_a^b g(x) \, dx.$$

Definition. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren wir den positive Teil f_+ und den negativen Teil f_-:

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist also $f_+, f_- \geq 0$, $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.

Satz 11.7 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind f_+, f_- und $|f|$ integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die obige Ungleichung heißt die *Dreiecksungleichung für das Riemann-Integral.*

Satz 11.8 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $\varphi : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \ = \ f(x_0) \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Insbesondere (mit $\varphi = 1$) existiert ein $x_0 \in [a, b]$, sodass

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ f(x_0)(b - a).$$

Bemerkung. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung sagt, dass der Flächeninhalt unter dem Graphen von f gleich ist dem Flächeninhalt des Rechteckes mit Seitenlängen $b - a$ und $f(x_0)$ für ein $x_0 \in [a, b]$.

Satz 11.9 (Gebietsadditivität) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in (a, b)$. f ist integrierbar über $[a, b]$ genau dann, wenn f über $[a, x_0]$ und über $[x_0, b]$ integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \int_a^{x_0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Definition. Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 > x_2$ definieren wir

$$\int\limits_{x_1}^{x_1} f(x)\ \mathrm{d}x := 0, \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x := -\int\limits_{x_2}^{x_1} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

11.2 Integration und Differentiation

Satz 11.10 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in [a, b]$ sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann ist $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Bemerkung. Das obige Integral $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ heißt manchmal das *unbestimmte Integral* von f. Es ist „unbestimmt“ wegen der Variable x als eine Integrationsgrenze.

Definition. Eine differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, falls

$$F' = f.$$

Bemerkung. Das unbestimmte Integral von f ist also eine Stammfunktion von f. Satz 11.10 sagt außerdem, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat!

Satz 11.11 Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann sind für eine Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ äquivalent:

1. G ist eine Stammfunktion von f.
2. $F - G$ ist konstant auf $[a, b]$.

Bemerkung.
- Alle Stammfunktionen einer Funktion f sind also bis auf eine Konstante gleich.
- Wir bezeichnen mit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (kurz mit $\int f$) die Menge aller Stammfunktionen von f. Also, falls $F' = f$, dann

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Kurz schreibt man $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F + c$. Oft wird sogar c weggelassen, wie z.B. in [5].

Satz 11.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ F(x_2) - F(x_1) =: F(x)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Bemerkung. Insbesondere ist also $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ F(b) - F(a)$.

Beispiel.
1. $\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x$ mit $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Es gilt

$$\int_a^b x^s\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s+1} x^{s+1}\Big|_a^b \text{ für } \begin{cases} a, b \in \mathbb{R}, & \text{falls } s \in \mathbb{N}_0, \\ a, b > 0 \text{ oder } a, b < 0, & \text{falls } s \in \{-2, -3, \dots\}, \\ a, b > 0, & \text{falls } s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2. $\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|\Big|_a^b \text{ für } a, b > 0 \text{ oder } a, b < 0.$$

   Es darf aber nicht 0 im Integrationsintervall liegen, da $1/x$ in $x = 0$ nicht stetig ist und wir Satz 11.12 nicht benutzen dürfen.

3. $\int_a^b \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_a^b$, $\int_a^b \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_a^b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $\int_a^b \exp(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)\Big|_a^b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $\int_a^b \tan(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x))\Big|_a^b$ für alle $a, b \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Es ist nicht immer einfach die Stammfunktion zum gegebenen f zu finden. Oft hilft es eine Transformation (Substitution) der Integrationsvariablen durchzuführen. Diese basiert auf der Kettenregel der Differentiation.

Satz 11.13 (Substitutionsregel) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. differenzierbar in $[c,d]$ und die Ableitung $\varphi' : [c,d] \to \mathbb{R}$ ist stetig). Gelte weiter $\varphi([c,d]) \subset [a,b]$. Dann gilt

$$\int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Die Substitutionsregel hat zwei Anwendungen (links nach rechts, bzw. rechts nach links):

(A) Die Aufgabe ist $I := \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y$ zu berechnen und es scheint schwierig die Stammfunktion von $f(\varphi(y))\varphi'(y)$ direkt zu finden. Mit der Substitution $x = \varphi(y)$ gilt aber

$$I = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(B) Die Aufgabe ist $I := \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen und es scheint schwierig die Stammfunktion von $f(x)$ direkt zu finden. Man sucht eine passende Funktion φ, sodass nach der Transformation $x = \varphi(y)$ die Stammfunktion einfacher zu finden ist. Es ist

$$I = \int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y, \text{ wobei } \varphi(c) = \alpha, \varphi(d) = \beta.$$

Falls φ invertierbar (streng monoton) ist, dann ist

$$I = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Beispiel. Im Folgenden kann man 1. und 2. als Beispiele der Anwendung A und 3. als ein Beispiel der Anwendung B interpretieren.

1. Für ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt
   - $\int_a^b f(y+c)\,\mathrm{d}y = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \varphi(y) := y + c$)
   - $\int_a^b f(cy)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \varphi(y) := cy$)
   - $\int_a^b y f(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ (Substitution $x = \varphi(y) := y^2$)
2. Für $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi(y) \neq 0$ für alle $y \in [a,b]$ gilt

   $$\int_a^b \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

   (Substitution $x = \varphi(y)$)

   Eine Anwendung von diesem Beispiel ist das Integral $\int_a^b \tan(x)\,\mathrm{d}x$, welches wir oben berechnet haben ohne die formale Anwendung der Substitutionsregel.
3. Für $[a,b] \subset [-1,1]$ ist

   $$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2})\Big|_a^b.$$

   Dies folgt mit der Substitution $x = \sin(y)$ und mit der Anwendung der Identitäten $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ und $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Eine weitere Integrationstechnik (vielleicht die nützlichste überhaupt) ist die partielle Integration. Diese basiert auf der Produktregel der Differentiation.

Satz 11.14 (Partielle Integration) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; (fg)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $(fg)\big|_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Bemerkung. Für die Stammfunktionen gilt also $\int fg' = fg - \int f'g$.

Beispiel.

1. $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x$
2. $\int \log(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x(\log x - 1)$
3. $$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x\,\mathrm{d}x &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+y) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$
4. $\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$

11.3 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir nur über kompakte Intervalle integriert. Nun werden wir das Integral verallgemeinern: auf unbeschränkte Intervalle bzw. auf offene Intervalle, wenn z.B. f in einem Randpunkt von (a, b) nicht definiert ist, wie z.B. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0, 1)$. Wir werden das Intregral also auch auf (manche) unbeschränkte Funktionen erweitern können.

Definition.

1. Sei $I = [a, b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar über* I, falls f für jedes $z \in I$ integrierbar über $[a, z]$ ist und der Limes
$$\lim_{z \to b-} \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$
existiert.
2. Sei $I = (a, b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar über* I, falls f für jedes $z \in I$ integrierbar über $[z, b]$ ist und der Limes
$$\lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$
existiert.
3. Sei $I = (a, b)$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Dann heißt f *uneigentlich integrierbar über* I, falls f für ein $x_0 \in I$ uneigentlich integrierbar über $(a, x_0]$ und über $[x_0, b)$ ist. Dann definieren wir
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung. Für I wie in 3. ist f uneigentlich integrierbar über $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ für ein $x_0 \in I$ genau dann, wenn es uneigentlich integrierbar über $(a, x_0]$ und $[x_0, b)$ für alle $x_0 \in I$ ist.

Beispiel. 1. $f(x) := x^\alpha$ ist uneigentlich integrierbar über $[1, \infty)$ genau dann, wenn $\alpha < -1$.

2. $f(x) := x^\alpha$ ist uneigentlich integrierbar über $(0, 1]$ genau dann, wenn $\alpha > -1$.

3. $f(x) := x^\alpha$ ist für kein $\alpha \in \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar über $\mathbb{R}$. Dies folgt aus 1. und 2.

4. $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ ist uneigentlich integrierbar über $\mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \pi$.

Literatur

[1] S. Abbott. Understanding Analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

[2] H. Amann and J. Escher. Analysis 1. Analysis. Birkhäuser, 2002.

[3] A. Deitmar. Analysis. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2014.

[4] K. Endl and W. Luh. Analysis: eine integrierte Darstellung; Studienbuch f. Studierende d. Mathematik, Physik u. anderer Naturwiss. ab 1. Semester. Number v. 1 in Studien-Texte : Mathematik. Akademische Verlagsgesellschaft, 1977.

[5] O. Forster. Analysis 1. Springer-Spektrum, 2016.

[6] W. Kaballo. Einführung in die Analysis I. Spektrum, Akad. Verl., 2000.