Selbststudium/Übung

Aufgabe 5.1. Finden Sie den Fehler! (Aus: Beutelspacher, Lineare Algebra, 2014)

> **Gnutpuaheb** Wenn eine Relation symmetrisch und transitiv ist, ist sie auch reflexiv, also eine Äquivalenzrelation.
>
> **Sieweb**. Sei $\sim$ eine symmetrische und transitive Relation auf einer Menge X. Sei $x \in X$ beliebig, und sei $x \sim y$. Wegen der Symmetrie ist dann auch $y \sim x$ und aufgrund der Transitivität folgt dann auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.

Aufgabe 5.2. Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und seien e_G und e_H die neutralen Elemente der Gruppen G und H. Setze $\mathrm{Kern}(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$. Zeigen Sie:

(a) $\varphi(e_G) = e_H$

(b) φ ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{e_G\}$

Aufgabe 5.3. Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k, l \in \mathbb{N}_0 \colon n = 2^k 5^l\}$. Dann ist $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in M\} \subset \mathbb{Q}$ die Menge der abbrechenden Dezimalbrüche (warum?).

(a) Ist $(A, +, *)$ ein Ring?

(b) Ist $(\mathbb{Q} \setminus A, +, *)$ ein Ring?

Aufgabe 5.4. Sei $R := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Define für alle $a, b \in R$ die Operationen $a \oplus b = \max\{a, b\}$ und $a \otimes b = a + b$. Für alle $a \in R$ gelte $-\infty \leq a$ und $-\infty + a = -\infty = a + (-\infty)$.
Welche Eigenschaften eines kommutativen Rings mit Eins erfüllt $(R, \oplus, \otimes)$?

Zum Abgeben bis zum 21. November 2022, 12:00 Uhr

Aufgabe 5.5. Beweisen Sie Satz III.5 aus der Vorlesung:

$(H, *)$ ist genau dann eine Untergruppe von $(G, *)$, wenn folgendes gilt:

(1) $\emptyset \neq H$ und $H \subseteq G$

(2) $\forall a, b \in H\colon a * b \in H$

(3) $\forall a \in H\colon a^{-1} \in H$

Aufgabe 5.6. (a) Sei $G := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ und

$$*\colon G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y - x - y + 2.$$

Zeigen Sie, dass $*$ wohldefiniert ist, und beweisen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist.

(b) Beweisen Sie: Eine Gruppe $(G, *)$ mit $\forall g \in G\colon g = g^{-1}$ ist abelsch.

Aufgabe 5.7. Zeigen Sie, dass

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = 2^k \right\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ ist.

Aufgabe 5.8. Definiere für zwei Mengen X, Y die symmetrische Differenz $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Sei M eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(M), \triangle, \cap)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Bemerkung: Es handelt sich um einen *Booleschen Ring*, in dem jedes Element a idempotent ist, d. h. $a^2 = a$ erfüllt.