Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

13. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 29.01.2023, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (2+2=4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -|x|^\alpha & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche α die Funktion f_α im Nullpunkt

a) stetig, **b)** differenzierbar ist.

Aufgabe 2: ($2 + 2 + 1 = 5$ Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgende Aussagen.

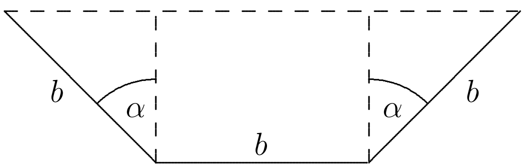
a) Es gilt $\sin x \leq x$ für alle $x \geq 0$.

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a, b]) \subset [a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) \neq 1$ für alle $x \in (a, b)$. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt (vgl. Aufgabe 2 **a)** von Blatt 9).

c) Zeigen Sie, dass $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Aus drei Brettern, die alle die Breite b haben, soll eine Rinne mit maximalem Fassungsvermögen gebaut werden. Bestimmen Sie dazu den Winkel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ so, dass die in der Skizze dargestellte Fläche maximal wird.



Hinweis: Sie dürfen die geometrische Deutung von Sinus und Cosinus im rechtwinkligen Dreieck verwenden und ebenso die folgende Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Bitte Wenden!

Aufgabe 4: $(2 + 5 = 7$ Punkte)

a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist f konstant.

b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\textbf{i)}\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1 + x)}, \quad \textbf{ii)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} \quad \textbf{(iii)}\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$$