Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

8. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 11.12.2022, 24.00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge $F := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$, also die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$, überabzählbar ist.

Hinweis: Versuchen Sie einen Widerspruchsbeweis, d.h. nehmen Sie an, dass F abzählbar ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergent;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k)$ konvergent.
Hinweis: Benutzen Sie den Fakt $0 \leq (a-b)^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 + 2 = 6 Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3^k a_{3^k} \text{ konvergent}$$

b) Verwenden Sie **a)** für einen weiteren Beweis für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(a_k)_k$ eine Folge mit $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Zeigen Sie,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(a_k) - 1}{a_k} \;=\; 1$$