Prof. Dr. T. Dohnal
B. Schwager, M. Hanisch, Dr. M. Schäffner

Institut für Mathematik
MLU Halle

4. Übungsblatt zu „Analysis I“
Wintersemester 2022/23

Abgabetermin: Sonntag, 13.11.2022, 24.00 Uhr

Aufgabe 1: (3+3=6 Punkte)

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit

$$a_n \;\leq\; b_n \;\leq\; c_n \quad \text{für alle } n \geq N$$

und gegebenem $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2: (2+2=4 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ werde rekursiv definiert durch $a_0 := \dfrac{3}{4}$ und

$$a_{n+1} \;:=\; \sqrt{a_n + \frac{3}{4}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend und nach oben durch $K = 2$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert, und berechnen Sie $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hinweis: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Betrachten Sie die Zahlenfolgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ mit $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_n$ monoton wachsend und $(b_n)_n$ monoton fallend sind, und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Es seien $C > 0$, $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass

$$|a_{n+1} - a_n| \;\leq\; Cq^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Dreiecksungleichung und geometrische Summenformel