总复习例题选讲

数学与统计学院　李换琴

例1 设$D=\begin{vmatrix}8&9&10&11\\1&2&2&1\\9&10&11&8\\10&11&8&9\end{vmatrix}$，$A_{4j}$为$D$中第4行第$j$列元素的代数余子式，求$A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}$.

解 因A_{ij}与a_{ij}的取值无关，

$$A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}8&9&10&11\\1&2&2&1\\9&10&11&8\\1&2&2&1\end{vmatrix}=0$$

例2 求方程$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4+x\\a_1&a_2&a_3+x&a_4\\a_1&a_2+x&a_3&a_4\\a_1+x&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}=0$的根。

"行和相等"

解 方程左端$\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}(x+\sum_{k=1}^{4}a_k)\cdot x^3$

$\Rightarrow x_1=-\sum_{k=1}^{4}a_k, x_{2,3,4}=0$（三重根）

例3 求3阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2+3\cos\alpha&2+3\cos\beta&2+3\cos\gamma\\4\cos\alpha+5\cos^2\alpha&4\cos\beta+5\cos^2\beta&4\cos\gamma+5\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$

解 $r_2+(-2)r_1$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\3\cos\alpha&3\cos\beta&3\cos\gamma\\4\cos\alpha+5\cos^2\alpha&4\cos\beta+5\cos^2\beta&4\cos\gamma+5\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$

$r_3+(-\frac{4}{3})r_2$

$$=15\begin{vmatrix}1&1&1\\\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\cos^2\alpha&\cos^2\beta&\cos^2\gamma\end{vmatrix}$$

"范德蒙行列式"

$$=15(\cos\beta-\cos\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha)(\cos\gamma-\cos\beta)$$

例4 设A为n阶可逆方阵($n\geq 2$)，求$[(A^*)^*]^{-1}$.

解 $AA^*=|A|I$，　$|A|\cdot|A^*|=|A|^n \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}$

$\Rightarrow A^*=|A|A^{-1}$，$\Rightarrow (A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}$

$\Rightarrow [(A^*)^*]^{-1}=\frac{1}{|A^*|}A^*=\frac{1}{|A|^{n-1}}|A|A^{-1}$

$=\frac{1}{|A|^{n-2}}A^{-1}$

例5 若方阵A满足$A^2-3A-2I=O$，其中I是与A同阶的单位矩阵，求A^{-1}.

解 $A(A-3I)=2I \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3I)$

例6 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$均为3维列向量，方阵$A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$，$B=[\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+3\alpha_3, -\alpha_3]$，已知$|A|=a$，求$|B|$.

（2015期中题）

解 $B=[\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+3\alpha_3, -\alpha_3]$

$$=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix}=AP,\quad P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\0&3&-1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |B|=|A|\cdot|P|=-2a$

变形1：若A可逆，证明B可逆。**变形2**：证明$r(A)=r(B)$

变形3：设A的列组是$\mathbb{R}^3$的一个基，证明B列组也是$\mathbb{R}^3$的基。

变形4：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，判定$\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+3\alpha_3, -\alpha_3$的线性相关性。

例7 设A,B是两个n阶实方阵，$M=\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}$是一个分块矩阵，证明：$r(M)=r(A+B)+r(A-B)$.　2018.12.

证 $\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\xrightarrow[i=1,\cdots,n]{c_{n+i,i}(-1)}\begin{pmatrix}A-B&B\\B-A&A\end{pmatrix}$

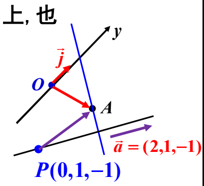
$\xrightarrow[i=1,\cdots,n]{r_{i,n+i}(1)}\begin{pmatrix}A-B&B\\O&A+B\end{pmatrix}\xrightarrow[i=1,\cdots,n]{c_{i,n+i}(\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}A-B&\frac{A+B}{2}\\O&A+B\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[i=1,\cdots,n]{r_{n+i,i}(-\frac{1}{2})}\begin{pmatrix}A-B&O\\O&A+B\end{pmatrix}\Rightarrow r(M)=r(A+B)+r(A-B)$

若$M\rightarrow\begin{pmatrix}A-B&O\\O&A+B\end{pmatrix}\Rightarrow r(M)=r(A+B)+r(A-B)$

例8 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴与直线 $\frac{x}{2}=y-1=\frac{z+1}{-1}$ 都相交，求其方程.

解 所求直线在点 A 和 y 轴确定的平面 Π_1 上, 也在点 A 与已知直线确定的平面 Π_2 上.



在y轴上取坐标原点O，则Π_1的法向量为

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{OA}\times\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&4\\0&1&0\end{vmatrix}=-4\vec{i}+2\vec{k}$$

Π_1的方程为 $-4(x-2)+2(z-4)=0$，即 $2x-z=0$；

同理求得Π_2的方程：$x-12y-10z+2=0$.

故所求直线方程 $\begin{cases}2x-z=0,\\x-12y-10z+2=0.\end{cases}$

例9 证明三个平面：$x+y-2z-1=0, x+2y-z+1=0, 4x+5y-7z-2=0$ 相交于一条直线

解 由 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&1\\1&2&-1&-1\\4&5&-7&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&3\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$

得 $\begin{cases}x+y-2z-1=0\\x+2y-z+1=0\\4x+5y-7z-2=0\end{cases}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$

所以三个平面的交点坐标满足关系式

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-0}{1}$$

故三个平面相交于一条直线.

第4章 向量与线性方程组

1、线性方程组有解判定定理

$A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$

当有解时，解的情形分为两种：

(1)有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$;

(2)有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$.

2、与齐次方程组Ax=0解有关的几个等价命题

$Ax=0$只有零解 $\Longleftrightarrow$ A的列向量组线性无关

$\Longleftrightarrow$ $r(A)=n$

$Ax=0$有非零解 $\Longleftrightarrow$ A的列向量组线性相关

$\Longleftrightarrow$ $r(A)<n$

3、非齐次线性方程组有解的几个等价命题

线性方程组 $Ax=b$有解 记$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$

$\Leftrightarrow$向量 b 可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示.

$\Leftrightarrow$向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b$等价.

$\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b)\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})$

4、 非齐次线性方程组 $Ax=b$的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*.$$

其中 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为其导出组的通解，

η^* 为非齐次线性方程组的任意一个特解.

5、向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关(线性无关)

$\Longleftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=0$有非零解 (只有零解)

$\Longleftrightarrow$ 矩阵$[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_s]$的秩小于 s(等于 s)

6、有关秩的问题

(1) $r(A)=A$的列秩$=A$的行秩

(2) 若向量组(I)可由(II)线性表示,则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$.

(3) 若向量组(I)与(II)等价,则$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

(4) $r(A^*)=\begin{cases}n, r(A)=n\\1, r(A)=n-1\\0, r(A)<n-1\end{cases}$ (5) $r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$

(6)$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$; (7) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$;

(8) 若$A_{m\times n}B=O$,则$r(A)+r(B)\le n$.

例10 设3元非齐次线性方程组$Ax=b$ 的三个解向量 η_1,η_2,η_3满足 $\eta_1+2\eta_2=(3,0,-6)^{\mathrm{T}},2\eta_2+\eta_3=(2,-2,-3)^{\mathrm{T}}$ 且$\mathrm{r(A)}=2$,则该方程组的通解是__________.（2016. 12）

解 $r(A)=2$，$Ax=0$的基础解系所含向量的个数为1.

$A\eta_1=b, A\eta_2=b, A\eta_3=b$

$\Rightarrow A(\eta_1+2\eta_2)-A(2\eta_2+\eta_3)=3b-3b=0$

故$\xi_1=(\eta_1+2\eta_2)-(2\eta_2+\eta_3)=(1,2-3)^T$是$Ax=0$的基础解系.

又$\frac{1}{3}(\eta_1+2\eta_2)$是$Ax=b$的解，所以$Ax=b$的通解为

$$x=k(1,2-3)^T+(1,0,-2)^T\quad(k为任意).$$

例11 已知齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为$(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$，则$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4]$的列向量组的一个极大线性无关组是[　]

$(A)\alpha_1,\alpha_2\quad(B)\alpha_2,\alpha_3\quad(C)\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\quad(D)\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

解　$4-r(A)=1,\quad r(A)=3.$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=0,\ \Rightarrow\ \alpha_1-\alpha_3=0,\ \Rightarrow\alpha_1,\ \alpha_3\text{线性相关}.$$

故α_2，α_3，α_4是极大无关组.

例12 设$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$可逆，则方程组$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2=a_3\\b_1x_1+b_2x_2=b_3\\c_1x_1+c_2x_2=c_3\end{cases}$

（A）无解（B）有唯一解（C）有无穷多解（D）不能确定

（2016.1）

解

方程组的增广矩阵$\left(\begin{array}{cc:c}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{array}\right)$的秩$=3$,

系数矩阵的秩$=2$,　故方程组无解.

例13　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶矩阵，$\det(A)=0$，A_{ij}为a_{ij}对应的代数余子式，$A_{21}\neq0$，证明$Ax=0$的通解为$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$.

（2011.1）

解　$A_{21}\neq0,\quad\det(A)=0,$

$\Rightarrow r(A)=n-1$，基础解系所含向量的个数为1.

$\xi=(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T\neq0,$

$$A\xi=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{21}\\A_{22}\\\vdots\\A_{2n}\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow\xi$是方程组$Ax=0$的非零解.

故$Ax=0$的通解为$x=k(A_{21},A_{22},\cdots,A_{2n})^T$.

例14 已知向量组　2019考研题

I: $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$;

II: $\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$;

若向量组I与II等价，求a，并将β_3由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

解：

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3]=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right)=B$$

当$a=-1$时，$B=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&-2&-2&0\end{array}\right)$

β_1不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线表，$\Rightarrow$向量组I与II不等价.

例14 已知向量组　2019考研题

I: $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$;

II: $\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$;

若向量组I与II等价，求a，并将β_3由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

解

当$a=1$时，$B=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$

α_1,α_2为I的极大无关组，β_1,β_2为II的极大无关组.

且$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$，又$\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$可逆，

α_1,α_2与β_1,β_2等价，$\Rightarrow$向量组I与II等价.

且$\beta_3=3\alpha_1-2\alpha_2$.

例14 已知向量组　2019考研题

I: $\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$;

II: $\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$;

若向量组I与II等价，求a，并将β_3由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示.

解：$A\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right)$

当$a\neq\pm1$时，$\det[\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3]\neq0$，$\det[\beta_1\,\beta_2\,\beta_3]\neq0$，

$\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价

又$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \beta_3)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

所以$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

例15 设A为n阶矩阵,证明$\mathrm{r}(A^n)=\mathrm{r}(A^{n+1})$.

$\boxed{n+1\text{个}n\text{维向量线性相关}}$

证 若x_0是$A^n x=0$的解, 即$A^n x_0=0$,

$\Longrightarrow$ $A^{n+1}x_0=0$, 则x_0也是$A^{n+1}x=0$的解。

若x_0是$A^{n+1}x=0$的解, 即$A^{n+1}x_0=0$, 则$A^n x_0=0$.?

假设$A^n x_0\neq 0$, 则$x_0, Ax_0, A^2x_0,\cdots,A^{n-1}x_0$都不等于0.

设$k_0x_0+k_1Ax_0+k_2A^2x_0+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}x_0+k_nA^nx_0=0$,

上式两端左乘A^n, 得 $k_0A^nx_0=0$, $\Longrightarrow$ $k_0=0$

$k_1Ax_0+k_2A^2x_0+\cdots+k_{n-1}A^{n-1}x_0+k_nA^nx_0=0$,

$\Longrightarrow$ $k_1A^nx_0=0$, $\Longrightarrow$ $k_1=0$ $\Longrightarrow$ $k_2=k_3=\cdots=k_n=0$

$\Longrightarrow$ 向量组$x_0,Ax_0,A^2x_0,\cdots,A^{n-1}x_0,A^nx_0$线性无关, 矛盾!

所以 齐次方程组$A^nx=0$与$A^{n+1}x=0$同解,

$\Longrightarrow$ $n-r(A^n)=n-r(A^{n+1})$ $\Longrightarrow$ $r(A^n)=r(A^{n+1})$ □

例16 记$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&2\\-1&3&0&2&-2\\0&1&1&3&4\\1&2&5&13&5\end{pmatrix}$的第$j$列为$\alpha_j(j=1,\cdots,5)$, (2015.1)

(1)证明$W=\{Ax|x\in\mathrm{R}^5\}$为线性空间$\mathrm{R}^4$的子空间;

(2)求W的基和维数;(3)求α_3,α_4在该基下的坐标.

解(1) $W=\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_5\}$, 它对$R^4$的线性运算封闭, 故构成$R^4$的子空间. $\boxed{Ax=x_1\alpha_1+\cdots+x_5\alpha_5}$

(2) $\mathrm{A}\to\begin{pmatrix}1&0&3&7&0\\0&1&1&3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ W的一个基为: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$

$\dim W=3$

(3) $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=7\alpha_1+3\alpha_2$,

所以 α_3,α_4 在该基下的坐标分别为 $(3,1,0)^{\mathrm T},(7,3,0)^{\mathrm T}$.

例17 设4×5矩阵 A按列分块为$A=[\alpha_1\cdots\alpha_5]$,已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关, 且$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$, $\alpha_5=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_4$,求齐次线性方程组$Ax=0$的解空间的标准正交基. 第5章习题1(2)

解 $r(A)=3$, $Ax=0$的基础解系所含向量的个数为2.

$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ $\Longrightarrow$ $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5]\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}=0$

知$\xi_1=(1,2,-1,0,0)^T$是$Ax=0$的解;

由$\alpha_5=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_4$ 知$\xi_2=(2,-1,0,3,-1)^T$是$Ax=0$的解.

因为ξ_1, ξ_2线性无关, 且$\xi_1^{\mathrm T}\xi_2=0$, 故

$\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6},0,0)^T$, $\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=(\frac{2}{\sqrt{15}},-\frac{1}{\sqrt{15}},0,\frac{3}{\sqrt{15}},-\frac{1}{\sqrt{15}})^T$

就是$Ax=0$的解空间的一个标准正交 交基.

例18 设T是n维线性空间V上的线性变换, $\xi\in V$, 如果$T^{n-1}\xi\neq0, T^n\xi=0$,证明$\xi,T\xi,\cdots,T^{n-1}\xi$是$V$的一组基, 并求$T$在这组基下的矩阵.

证 $\xi,T\xi,\cdots,T^{n-1}\xi$是$n$维线性空间$V$中的$n$个向量.

设$k_1\xi+k_2T\xi+\cdots+k_nT^{n-1}\xi=0$

$\Rightarrow T^{n-1}(k_1\xi+k_2T\xi+\cdots+k_nT^{n-1}\xi)=0 \Rightarrow k_1T^{n-1}\xi=0$

$\Rightarrow k_1=0$. 同理可得$k_i=0,(i=2,\cdots,n)$

所以$\xi,T\xi,\cdots,T^{n-1}\xi$线性无关, 故是$V$的一个基.

又$T(\xi,T\xi,\cdots,T^{n-1}\xi)=(\xi,T\xi,\cdots,T^{n-1}\xi)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

所以T在该基下的矩阵为A. 记为A

例19已知$R^{2\times2}$的一组基$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,

$E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$,线性算子$T$:

$T(X)=XM-MX,\forall X\in R^{2\times2},M=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$.

(1)求$R(T)$的维数和一个基;(2)求 $\ker(T)$的维数和一个 基;

(3)写出$R(T)$和$\ker(T)$.

解(1) $T(E_{11})=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}=0E_{11}-E_{12}+0E_{21}+0E_{22}$

$T(E_{12})=E_{12},T(E_{21})=E_{11}-E_{21}-E_{22}$, $T(E_{22})=E_{12}$

T在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵

$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\-1&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow \mathrm{rank}(T)=r(A)=2$

例19已知$R^{2\times2}$的一组基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$,

$T(X)=XM-MX,\forall X\in R^{2\times2},M=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$.

(1)求$R(T)$的维数和一个基;(2)求 $\ker(T)$的维数和一个 基;

(3)写出$R(T)$和$\ker(T)$.

解(1) T在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵

$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\-1&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ $\Rightarrow \mathrm{rank}(T)=r(A)=2$

$A_1=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(0,-1,0,0)^{\mathrm T}=E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,

$A_2=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(1,0,-1,-1)^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}$

是$R(T)$一个基。 $R(T)=span\{A_1,A_2\}$

例19 已知$R^{2\times2}$的一组基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$,

$T(X)=XM-MX,\forall X\in R^{2\times2},M=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$.

(1)求$R(T)$的维数和一个基;(2)求$\ker(T)$的维数和一个 基;
(3)写出$R(T)$和$\ker(T)$.

解(2) T在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\-1&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$Ax=0$的基础解系为$(1,1,0,0)^T,(1,0,0,1)^T\Rightarrow$ unllity$(T)=2$

$B_1=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(1,1,0,0)^T=E_{12}+E_{12}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$

$B_2=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})(1,0,0,1)^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$是一个基.

$\ker(T)=span\{B_1,B_2\}$

例20 设A为3阶实对称阵, $\mathrm{tr}(A)=1,B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$, $AB=O$.

(1)证明$r(A)=1$;(2)求A的全部特征值和特征向量.

解(1) $AB=O\Rightarrow r(A)+r(B)\le 3$. （2016.1 ）

又$r(B)=2$, $\mathrm{tr}(A)=1\Rightarrow r(A)=1$.

(2) A是实对称矩阵, 且$r(0I\text{-}A)=r(A)=1$,

故0是A的二重特征值.记$B=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]$,

由$AB=[A\beta_1\ A\beta_2\ A\beta_3]=O\Rightarrow A\beta_1=0, A\beta_2=0$

$\therefore \beta_1=(1,0,1)^T,\beta_2=(0,1,0)^T$是0特征值对应的特征向量.

特征值0对应的全部特征向量为$k_1\beta_1+k_2\beta_2(k_1,k_2$不全为 0).

A的另一特征值$\lambda=\mathrm{tr}(A)-0=1$, 设对应特征向量$\xi=(x_1\ x_2\ x_3)^T$

则ξ与β_1,β_2正交, $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases}\Rightarrow\xi=k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $(k\ne0$任意$)$

例21 设 α,β 均为3维实单位列向量，且 α 与 β 正交，令$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$,问矩阵$A$是否可相似对角化？为什么？若可对角化，求与$A$相似的对角矩阵$D$. （2015.1 ）

解 因$A^T=A$，A为实对称矩阵, 故A可对角 化.

由题设$\alpha^T\alpha=1,\beta^T\beta=1,\alpha^T\beta=0,\beta^T\alpha=0$,

故$A\alpha=\alpha\beta^T\alpha+\beta\alpha^T\alpha=\beta$, 同理$A\beta=\alpha$.

$A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$, $A(\alpha-\beta)=(-1)(\alpha-\beta)$

因α,β正交, 从而线性无关. 故$\alpha+\beta\ne0,\alpha-\beta\ne0$.

所以A有特征值 1,–1. 又$r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2$,

故A的另一特征值为 0. $A\sim D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

例22 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵$(n\ge2)$, 且$r(A)=1$, 证明:

(1) 存在非零向量α,β, 使得 $A=\alpha\beta^T$;
(2) 存在常数k, 满足 $A^2=kA$;
(3) 求A的所有特征值;
(4) A能否对角化？请说明理由.

解(1) 由$r(A)=1$知，$\exists$可逆矩阵P,Q使得

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)Q=\alpha\beta^{\mathrm T}$$

(2) $A^2=\alpha\beta^{\mathrm T}\alpha\beta^{\mathrm T}=\beta^{\mathrm T}\alpha\ \alpha\beta^{\mathrm T}$, 故$\exists k=\beta^{\mathrm T}\alpha$,满足$A^2=kA$.

例22 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵$(n\ge2)$, 且$r(A)=1$, 证明:

(1) 存在非零向量α,β, 使得 $A=\alpha\beta^T$;
(2) 存在常数k, 满足 $A^2=kA$;
(3) 求A的所有特征值; $k=\beta^{\mathrm T}\alpha$
(4) A能否对角化？请说明理由.

解(3) 设λ是A的特征值, 则$\lambda^2-k\lambda$是A^2-kA的特征值,

$A^2-kA=O\Rightarrow\lambda^2-k\lambda=0\ \Rightarrow\lambda=0$或$\lambda=k=\beta^{\mathrm T}\alpha$.

由$r(A)=1$知,0是A的特征值,且几何重数 $=n-1$.

故A的所有特征值为$\beta^{\mathrm T}\alpha,0,0,\cdots0$.

(4) 若$\beta^T\alpha\ne0$, 则A的所有特征值的几何重 数等于代数重数，故A可对角化.

故A不可对角化.

若$\beta^T\alpha=0$,则特征值 0的代数重数为n,几何重数为$n-1$,

例23 设A为$n(n>1)$阶实方阵, 且$\det(A)=0$,证明:
A的伴随矩阵A^*的非零特征值(若存在)等于$\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$,
其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式. (2018.12最后一题)

证: $\det(A)=0\Rightarrow r(A)<n\Rightarrow r(A^*)=0$或$r(A^*)=1$

当$r(A^*)=0$时，$A^*=O$, 此时A^*无非零特征值.

当$r(A^*)=1$时,$\Rightarrow$0是A^*的特征值, 且几何重数为$n-1$.

$\Rightarrow$0是A^*的至少$n-1$重特征值, 即$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$

若另一个特征值$\lambda_n=0$,则A^*无非零特征值.

若另一个特征值$\lambda_n\ne0$,则$\lambda_n+(n-1)\times0=\mathrm{tr}(A^*)$

即非零特征值 $\lambda_n=A_{11}+\cdots+A_{nn}$ ∎

例24（1）请给出判断实对称矩阵A是正定矩阵的三个充要条件。

（2）试举例说明两个同阶正定阵的乘积未必是正定阵.

（3）设实对称矩阵A,B均是正定矩阵，且满足$AB=BA$,证明AB也是正定矩阵.（2014.1最后一题）

解（1）A正定 $\Leftrightarrow$ 对任意的非零列向量 $x, f=x^TAx>0$.

$\Leftrightarrow$ f的正惯性指数为n; $\Leftrightarrow$ A的特征值全为正数；

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵M,使得$A=M^TM$;

$\Leftrightarrow$ A与单位矩阵合同

$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式都大于零.

例24（1）请给出判断实对称矩阵A是正定矩阵的三个充要条件。

（2）试举例说明两个同阶正定阵的乘积未必是正定阵.

（3）设实对称矩阵A,B均是正定矩阵，且满足$AB=BA$,证明AB也是正定矩阵.（2014.1最后一题）

解（2）

例如$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$都是正定矩阵，

但$AB=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&6\end{pmatrix}$不是对称矩阵，因此不正定.

例24（3）设实对称矩阵A,B均是正定矩阵，且满足$AB=BA$,证明AB也是正定矩阵.（2014.1最后一题）

解（3） 证法1

$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$, AB是对称矩阵.

设λ是AB的任一特征值， x是对应的特征向量，

则有 $ABx=\lambda x$

$$\Rightarrow Bx=\lambda A^{-1}x \Rightarrow x^TBx=\lambda x^TA^{-1}x$$

由于A,B是正定矩阵，

故$\forall x\in R^n, x\neq 0, x^TA^{-1}x>0, x^TBx>0,$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{x^TA^{-1}x}{x^TBx}>0$$

所以AB为正定矩阵.

例24（3）设实对称矩阵A,B均是正定矩阵，且满足$AB=BA$,证明AB也是正定矩阵.（2014.1最后一题）

解（3） 证法2

$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$, AB是实对称矩阵.

因为A，B正定，存在可逆矩阵M,N使

$$A=M^TM,\quad B=N^TN$$

$$\Longrightarrow AB=M^TMN^TN=N^{-1}(NM^TMN^T)N$$

$$=N^{-1}((MN^T)^T(MN^T))N$$

即AB与实对称阵$(MN^T)^T(MN^T)$相似.

从而AB与$(MN^T)^T(MN^T)$合同.

故AB为正定矩阵.

例25 设A,B为实对称矩阵,A的特征值大于a,B的特征值大于b,$(a,b\in R)$,证明：$A+B$的特征值大于$a+b$.

证 设λ是$A+B$的任一特征值，

则$\lambda-(a+b)$是$A+B-(a+b)I$的特征值，

$(A-aI)$的特征值均大于0, $\Longrightarrow$ $(A-aI)$正定；

$(B-bI)$的特征值均大于0, $\Longrightarrow$ $(B-bI)$正定；

所以 $A+B-(a+b)I$正定，

$$\Longrightarrow \lambda>(a+b).$$

例26 设A,B均为n阶正定矩阵，证明关于λ的方程$\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.（2006.1）

证 因A正定，故$|A|>0$,且有可逆矩阵P,使$A=P^TP$.

$$|\lambda A-B|=|\lambda P^TP-B|=|P^T(\lambda I-(P^{-1})^TBP^{-1})P|$$

$$=|P^T|\cdot|P|\cdot|\lambda I-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$$=|A||\lambda I-(P^{-1})^TBP^{-1}|$$

$$|\lambda A-B|=0 \Leftrightarrow |\lambda I-(P^{-1})^TBP^{-1}|=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda是(P^{-1})^TBP^{-1}的特征值$$

由B正定，知$(P^{-1})^TBP^{-1}$也正定，

因此其特征值均大于零.

故方程$\det(\lambda A-B)=0$的根全大于零.

考前答疑

1月12日上午 9:00-12:00

1月12日下午 3:00-6:00

地点：数学楼415（腾飞塔正北方向）

祝同学们取得好成绩！