作弊

自

西安交通大学 2020-2021 学年 第 一 学期 工科数学分析 I 试卷(B 卷)

试卷卷面成绩						课程考 核成绩	平时成 绩占%	课程考核成绩
题号	_		三	四	小计	占 %	切白 %	核风级
得分								

得分

一、填空题 (共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

- 1. 函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中 x^{2021} 的系数为 _____.
- 2. 极限 $\lim_{x\to 0} \left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] =$ ____.
- 3. 反常积分 $\int_{1}^{3} \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} \, \mathrm{d}x = \underline{\qquad}$.
- 4. 设 $\left\{ \begin{array}{l} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t y + 1 = 0 \end{array} \right., 则 \left. \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{1cm}}.$
- 5. 极限 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{n}\right)^2 \tan \frac{1}{n^3} =$ ____.

得分

二、单选题(共5小题,每小题3分,共15分)

1. 函数
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & , x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}$$
 在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取极大值

(B) 凑数选项

(C) 可导且导数不为 0

(D) 可导且导数为 0

2. 函数
$$f(x)$$
 在 $x = 0$ 的某邻域内连续且 $f(0) = 0$,已知 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

(A) 不可导

(B) 可导且导数不为 0

(C) 取得极大值

(D) 取得极小值

3. 微分方程
$$y'' - y = e^x + 1$$
 的一个特解可设为 (a, b) 为常数)

- (A) $a e^x + b$
- (B) $ax e^x + b$
- (C) $a e^x + bx$ (D) $ax e^x + bx$

4. 函数
$$y = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$$
 的间断点个数是

- (D) 4

$$5.$$
 当 $x \to 0$ 时,函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是
 (A) 无界的但不是无穷大量
 (B) 无穷大量
 (C) 有界的但不是无穷小量
 (D) 无穷小量

1

1

1

三、计算题 (共 8 小题,每小题 6 分,共 48 分)

- 1. 计算极限 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t \sin t + \tan^3 t \cdot \ln t) dt}{\cos x \int_0^x \ln^2 (1+t) dt}$ 的值.
- 2. 讨论函数 $f(x) = |x|^{\frac{1}{20}} + |x|^{\frac{1}{21}} 2\cos x$ 的零点个数.
- 3. 求微分方程 $(y+1)y'' + (y')^2 = (1+2y+\ln y)y'$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$ 的解.
- 4. 计算积分 $\int_{1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 x^2}} dx$.
- 5. 将圆周 $x^2 + y^2 = 4x 3$ 绕 y 轴旋转一周,求所得旋转体的体积.
- 6. 已知函数 $f(x)= \begin{cases} a\sin^2x+b\sin x+c &, x<0 \\ 0 &, x=0 \text{ 在 } (-\infty,\infty) \text{ 上连续可微, 讨论 } x^k\sin\frac{1}{-} &, x>0 \end{cases}$

常数 a,b,c 以及 k 的取值.

- 7. 求函数 $f(x) = \int_{1}^{x^2} (x^2 t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.
- 8.(10 分) 求微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\, \boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\, t} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的单调区间与极值.

作

得分

四、证明题 (共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分)

- 1. 已知等式两端的两个积分都收敛,且 a,b>0,求证: $\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right) \mathrm{d}t.$
- 2. 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n (3 x_n)} \ (n = 1, 2, \cdots)$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限.
- 3. 设函数 f(x) 在 [0,1] 上二阶可导,且 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$.
 - (1) 求证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 0$;
 - (2) 求证: $\exists \eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$.