# 彭·葛毅

期末试题集(2021版)



彭康书院学业辅导与发展中心

#### 一、填空题(每题3分,共15分)

1. 函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中 $x^{2021}$ 的系数为\_\_\_\_\_.

2. 极限
$$\lim_{x\to 0} \left[ \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin}{|x|} \right] = \underline{\hspace{1cm}}.$$

3. 反常积分 
$$\int_{1}^{3} \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx = _____.$$

4. 设
$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$$
,则 $\frac{d_y^2}{dx^2}\Big|_{t=0} =$ \_\_\_\_\_.

#### 二、单选题(每题3分,共15分)

1. 函数
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x}-1}{2x}, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, x = 0 \end{cases}$$
,在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取极大值

- (B) 凑数选项
- (C) 可导且导数不为 0
- (D) 可导用导数为0
- 2. 函数f(x)在x = 0的某领域内连续且f(0) = 0,已知 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1 \cos x} = 2$ ,则f(x)在x = 0处
  - (A) 不可导

(B) 可导且导数不为 0

(C) 取得极大值

(D) 取得极小值

3. 微分方程
$$y'' - y = e^x + 1$$
 的一个特解可设为 (a,b 为常数)

(A)  $ae^x + b$ 

(B)  $axe^x + b$ 

(C)  $ae^x + bx$ 

(D)  $axe^x + bx$ 

4. 函数
$$y = \frac{e^{\frac{1}{x-1}\ln|1+x|}}{(e^x-1)(x-2)}$$
的间断点个数是

(A) 1

- (C) 3
- (D) 4

( )

5. 当
$$x \to 0$$
 时,函数 $y = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$ 是

- (A) 有界的但不是无穷大量
- (B) 无穷大量
- (C) 有界的但不是无穷小量
- (D)无穷小量

# 三、计算题

1. 计算极限 
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t\sin t + \tan^3 t \cdot \ln t) dt}{\cos x \int_0^x \ln^2 (1+t) dt}$$
 的值.

2. 讨论函数  $f(x) = |x|^{\frac{1}{20}} + |x|^{\frac{1}{21}} - 2\cos x$  的零点个数.

3. 求微分方程  $(y+1)y'' + (y')^2 = (1+2y+\ln y)y'$  满足  $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$  的解.

4. 计算积分  $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} dx$ .

5. 将圆周 $x^2 + y^2 = 4x - 3$ 绕y轴旋转一周,求所得旋转体体积.

6. 已知函数 
$$f(x) = \begin{cases} a \sin^2 x + b \sin x + c , x < 0 \\ 0 , x = 0 在 (-\infty, +\infty) 上连续可微,讨论常数  $a, b, c$  以及  $k$  的取值. 
$$x^k \sin \frac{1}{k} , x > 0 \end{cases}$$$$

7. 求函数 
$$f(x) = \int_{1}^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$$
 的单调区间与极值.

8. 求线性微分方程组
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
的通解.

#### 四、证明题

1.已知等式两端的两个积分都收敛,且 a, b > 0,求证:  $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$ .

2.设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n=1,2,...)$ .求证:数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求其极限.

- 3.设函数 f(x) 在[0, 1]上二阶可导,且  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ,  $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ .求证:
  - (1) 日 $\xi \in (0,1)$ ,使得 $f(\xi) = 0$ ;
  - (2)  $\exists \eta \in (0,1)$ ,使得  $f''(\eta) = f(\eta)$ .

#### 一、填空题

2. 极限 
$$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) =$$
\_\_\_\_\_\_\_

3. 设函数 
$$f(x) = (x^2 + x + 2)\sin x$$
,则  $f^{10}(0) =$ \_\_\_\_\_\_

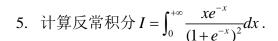
- 4. 若当  $x \to 0$  时,两个函数  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$  与  $g(x) = x^k (e^x 1)$  是同阶的无穷小量,则常数 k 的值为\_\_\_\_\_.
- 5. 曲线  $y = x + \frac{1}{e^x 1}$  的渐近线有\_\_\_\_\_条.

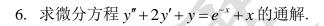
#### 二、计算题

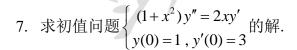
1. 求极限 
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\ln(1+x^2)}$$
.

3. 设曲线 
$$L$$
的参数方程为 
$$\begin{cases} x = t^2 - t \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$$
, 求该曲线在  $t = 0$ 处的切线方程.

- 4. 设函数 f(x) 连续,且满足  $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x(x-2)e^x + 2x$ ,求:
- (1) f(x) 的表达式. (2) f(x) 的单调区间与极值.



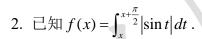




8. 求线性微分方程组
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} x$$
的通解.

#### 三、解答题

- 1. 设函数 f(x) 在 [0,1] 连续,在 (0,1) 内大于 0,并满足  $xf'(x) = f(x) 3x^2$ ,曲线 y = f(x) 与直线 x = 1, y = 0 所围图形 D 的面积为 2,求:
- (1) 函数 f(x). (2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.



- (1) 证明: f(x) 是以 $\pi$ 为周期的函数.
- (2) 求函数 f(x) 的值域.
- (3) 求由 y = f(x), x = 0,  $x = \pi$ , y = 0所围图形的面积.

3. 设函数 f(x) 在 [0,2] 上具有二阶连续导数,且 f(1)=0.

试证: 存在 $\xi \in [0,2]$ , 使得 $f''(\xi) = 3 \int_0^2 f(x) dx$ .



- 4. (1) 设n是正整数,计算 $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$ .
  - (2) 证明对任意正实数 p , 函数极限  $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x t \left| \sin t \right|^p dt$  存在.



#### 一、选择题

1. 若
$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + 2}{x^2 + 2} = 1$$
 (其中 $a,b$ 为常数),则(

A.  $a = 0, b \in \mathbb{R}$ 

B. a = 0, b = 1

C.  $a \in \mathbb{R}, b = 1$ 

D.  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ 

2. 若函数 
$$f(x)$$
 与  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上皆可导,且  $f(x) < g(x)$ ,则必有(

A. f(-x) > g(-x)

- B. f'(x) < g'(x)
- C.  $\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$
- D.  $\int_0^x f(t)dt < \int_0^x g(t)dt$

3. 若函数 
$$f(x)$$
 的一个原函数是  $(x-2)e^x$ ,则  $f'(x+1) =$ 

A.  $xe^x$ 

B.  $xe^{x+1}$ 

C.  $(x+1)e^{x+1}$ 

D.  $(x+1)e^{x}$ 

A.  $\int_0^1 \ln x dx$ 

B.  $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{2} x}$ 

 $C. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ 

D.  $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x \cos x}$ 

5. 设 
$$f(t) = \begin{cases} \sin\frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$
,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则  $F(x)$  在  $x = 0$  处 (

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导且 F′(0) ≠ 0

D. 可导且F'(0) = 0

6. 微分方程 
$$y'' + 3y' + 2y = (ax + b)e^{-x}$$
 的特解形式为( )

A.  $y = Axe^{-x}$ 

 $B. \quad y = (Ax + B)e^{-x}$ 

- C.  $y = (Ax + B)xe^{-x}$
- $D. \quad y = Ax^2 e^{-x}$

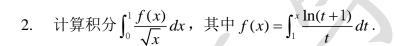
# 二、填空题

1. 已知函数 
$$y = f(x)$$
 由参数方程 
$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$
 所确定,则曲线  $y = f(x)$  在  $t = 2$  处的切线方程为

- 2. 设[x]表示不超过x的最大整数,则定积分 $\int_0^{2018} (x-[x])dx$ 的值是\_\_\_\_\_\_.
- 3. 已知  $y_1 = e^{3x} xe^{2x}$ ,  $y_2 = e^x xe^{2x}$ ,  $y_3 = -xe^{2x}$  是某二阶非齐次线性微分方程的三个解,则该方程的通解是 y =\_\_\_\_\_\_\_.
- 4.  $\mathbb{R} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n}) = \underline{\hspace{1cm}}$
- 5. 设  $f(x) = (x-1)\ln(2-x)$  (x < 2), ,则 f(x) 的最大值点是  $x = _____$ .

# 三、计算积分

1. 计算积分  $\int \frac{1}{\sin^2 x + 9\cos^2 x} dx$ .



3. 
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx.$$

# 四、解答题

1. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(x-3)y^4 = 0$  的通解.

2. 已知  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x + e^x$ ,  $y_3 = 1 + x + e^x$  是  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$  的解,试求此方程的通解.

3. 求曲线  $y = 3(1-x^2)$  与 x 轴围成的封闭图形绕直线 y = 3 旋转一周所得的旋转体的体积.

4. 对t取不同的值,讨论函数  $f(x) = \frac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间  $[t,+\infty)$  上是否有最大值或者最小值?若存在最大值或者最小值,则求出相应的最大值和最大值点,或者最小值和最小值点.

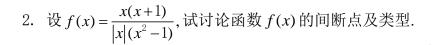
5. 求微分方程  $x'' + 2x' + 2x = te^{-t} \cos t$  的通解.

6. 设 f'(x) 是连续函数,  $F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$ , 证明:  $F(2a) - 2F(a) = f^2(a) - f(0)f(2a)$ .

- 7. 设函数 f(x) 在闭区间[0,1]上具有连续导数,且 f(0) = f(1) = 0,求证:
  - (1)  $\forall t \in \mathbf{R}, \int_0^1 x f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 t) f'(x) dx$ .
  - (2)  $\left(\int_0^1 x f(x) dx\right)^2 \le \frac{1}{45} \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx$ ,等号当且仅当  $f(x) = A(x^3 x)$  时成立, A 为常数.

# 一、计算题

1. 求极限  $\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}$ .



3. 设 
$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2^x, & x \ge 0 \end{cases}$$
, 求导函数  $f'(x)$ .



5. 求不定积分 
$$\int \sqrt{e^x + 1} dx$$
.

6. 设  $f(x) = \int_0^x e^{-t} \cos t dt$ , 试求 f(x) 在  $[0, \pi]$  上的最大值和最小值.

7. 求由曲线  $x^2 + (y-5)^2 = 16$  所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

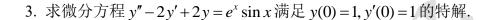
8. 求微分方程 y''' - y'' + 2y' - 2y = 0 的通解.

9. 求微分方程  $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + (\frac{dy}{dx})^2$  的通解.

# 二、解答题

1. 设函数 f(x) 具有连续的一阶导数,且满足  $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$ ,求 f(x) 的表示式.

2. 设函数 f(x) 在点 x = a 在某邻域 U(a) 内有定义,且  $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^k} = l$  (l > 0, k为正整数),试讨论函数 f(x) 在点 x = a处是否取得极值.

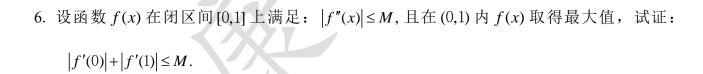


4. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求解微分方程组
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$
.

(2) 设曲线积分  $\int_{(C)} [f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1]ydx+2f'(x)dy$  与路径无关,求 f(x).

- 5. 已知曲线 L 的方程为  $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t t^2 \end{cases}$   $(t \ge 0)$ .
  - (1) 讨论曲线L的凹凸性.
  - (2) 过点(-1,0)引曲线L的切线,求切点坐标 $(x_0,y_0)$ ,并求切线的方程.
  - (3) 求此切线与曲线L (对应于 $x \le x_0$ 的部分)及x轴所围成的平面图形的面积S.



#### 一、填空题

- 1. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^3 dt & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  在 x = 0 处连续,则 a =\_\_\_\_\_\_.
- 2. 设 f(x) 的一个原函数是  $x \ln x$  ,则  $f'(x) = _____.$
- 4. 定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin x}{1+x^4} + \cos^3 x) dx = \underline{\qquad}$
- 5. 微分方程  $x(1+y^2)dx y(1+x^2)dy = 0$  的通解为\_\_\_\_\_\_.
- 6. 微分方程  $xdy + (y \sin x)dx = 0$ 满足  $y|_{x=\pi} = 1$ 的特解  $y = ______$

#### 二、选择题

1. 下列结果中不成立的是(/ )

$$A. \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$$

$$B. \lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$

$$C. \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$D. \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

2. 设 y = f(x)满足 f'(x) > 0, f''(x) > 0,  $\Delta x$  为自变量 x 在  $x_0$  处的增量,  $\Delta y$  与 dy 分别为 f(x) 在

点 $x_0$ 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$ ,则(

A. 
$$0 < dy < \Delta y$$

B. 
$$0 < \Delta y < dy$$

C. 
$$\Delta y < dy < 0$$

D. 
$$dy < \Delta y < 0$$

3. 设函数 f(x) 连续,则下列函数中,必为偶函数的是( )

A. 
$$\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$$

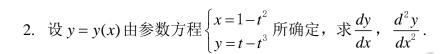
B. 
$$\int_{0}^{x} t[f(t) + f(-t)]dt$$

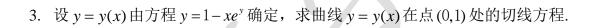
C. 
$$\int_0^x f(t^2)dt$$

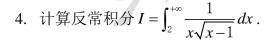
D. 
$$\int_0^x f^2(t)dt$$

# 三、计算题

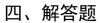
1. 求极限  $l = \lim_{x \to \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

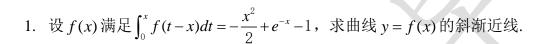






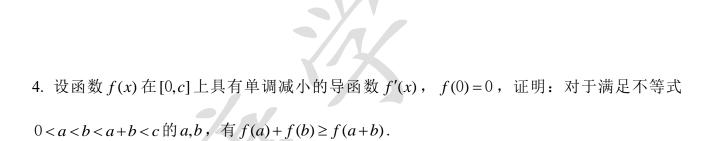
5. 求函数  $f(x) = \frac{x \ln |x|}{|x-1|}$  的间断点,并说明间断点类型.





- 2. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))
- (1) 求解微分方程组  $\frac{dx}{dt} = Ax$  的通解,其中  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (2) 求方程  $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$  的通解.

3. 已知 f(x) 在 [0,1] 上连续且满足  $xf'(x) = f(x) + 3x^2$ ,求 f(x),使由曲线 y = f(x) 与 x = 0,x = 1, y = 0 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.





#### 一、填空题

- 1. 计算  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \ln \frac{2-x}{2+x} + \cos^2 x \right) dx = \underline{\qquad}$
- 2. 设函数  $y = x2^x$  在  $x = x_0$  点处取得极小值,则  $x_0 = _____$ .
- 3. 计算极限  $\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}} \right] = \underline{\hspace{1cm}}.$
- 4. 设函数 y = y(x)满足方程  $\int_0^x xy dx = x^2 + y$ ,则 y(x) =\_\_\_\_\_\_
- 5. 设函数  $y = \varphi(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上有连续的二阶导数, $\varphi(0) = b$ ,a > 0 且  $\varphi(x)$  在 x = a 处取得极大值  $\varphi(a) = 0$ ,则积分  $\int_0^a x \varphi''(x) dx = ______.$

#### 二、选择题

- 1. 设函数 f(x) 连续, F(x) 是 f(x) 的原函数,则(
  - A. 当 f(x) 为奇函数时,F(x) 必为偶函数
  - B. 当 f(x) 为偶函数时,F(x) 必为奇函数
  - C. 当 f(x) 为周期函数时,F(x) 必为周期函数
  - D. 当 f(x) 为单调递增函数时,F(x) 必为单调递增函数
- 2. 曲线  $y = (x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$  的拐点是 (
  - A. (1,0)
- B. (2,0)
- C. (3,0)
- D. (4,0)
- 3. 设函数 f(x) 在 [0,1] 有连续导数,且 f(0) = 0,令  $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ ,则必有( )
  - A.  $M \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq 3M$

B.  $\frac{M}{2} \le \int_0^1 |f(x)| dx \le M$ 

C.  $\int_0^1 |f(x)| dx \le \frac{M}{2}$ 

D.  $\int_0^1 |f(x)| dx \ge 3M$ 

- 4. 设f(x)是以T为周期的函数,下列函数中以T为周期的函数是(
  - A.  $\int_0^x f(t)dt$

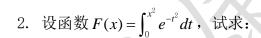
B.  $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$ 

C.  $\int_{-x}^{0} f(t)dt$ 

- D.  $\int_{0}^{x} f(t)dt + \int_{-x}^{0} f(t)dt$
- 5. 设函数  $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$ ,则 f'(x)的零点个数为(
  - A. 0
- B. 2
- C. 1
- D. 4

#### 三、解答题

1. 求曲线  $y = \frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1)$ 的渐近线.



- (1) F(x)的极值.
- (2) 曲线 y = F(x) 的拐点的横坐标. (3) 计算  $\int_{-2}^{3} x^2 F'(x) dx$ .

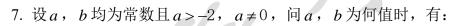
3. 求解初值问题  $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$ 

4. 求一个以四个函数  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = 2xe^x$ ,  $y_3 = \cos 2x$ ,  $y_4 = 3\sin 2x$  为特解的齐次线性微分方程,并求方程的通解.

5. 求微分方程  $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{2x}$  的通解.

6. 过曲线  $y = \sqrt[3]{x} (x \ge 0)$  上点 A 作切线,使该切线与曲线  $y = \sqrt[3]{x}$  及 x 轴所围平面图形 D 的面积  $S = \frac{3}{4}.$ 

- (1) 求点 A 的坐标.
- (2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

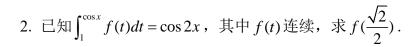


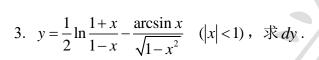
$$\int_{1}^{+\infty} \left[ \frac{2x^{2} + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right] dx = \int_{0}^{1} \ln(1 - x^{2}) dx$$



# 一、计算题

$$1. \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$



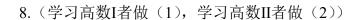


4. 求不定积分 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$
.

5. 求定积分 
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$
.

6. 求微分方程 $(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$ 的通解.

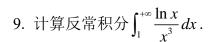
7. 求微分方程  $x'' + 3x' + 2x = e^{-2t}$  的通解.



(1) 验证微分方程组 
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2}\sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2}\sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
 通解

$$\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in R.$$

(2) 验证  $y_1 = e^x$ ,  $y_2 = e^x \ln |x|$  是微分方程 xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0的解,并求其通解.



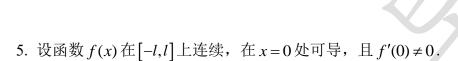
#### 二、解答题

1. 当  $x \in [-1,1]$ 时,确定函数  $f(x) = \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2-1)}$  的间断点及其类型.

2. 设函数 
$$f(x) = \begin{cases} (\sin\frac{1}{x}) \int_0^x \sin t^2 dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
, 求  $f'(x)$ , 并讨论  $f'(x)$  在  $x = 0$  点的连续性.

- 3. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))
- (1) 求线性微分方程组 $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 的通解,其中 $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ .
- (2)已知函数  $y=e^{2x}+(x+1)e^x$  是二阶常系数非齐次线性微分方程  $y''+ay'+by=ce^x$  的一个特解,试确定 a,b,c,并求该方程的通解.

- 4. 设曲线 $l_1$ 的方程为 $y = a \ln x$  (其中常数a > 0),曲线 $l_1$ 的一条切线 $l_2$ 过原点.
  - (1) 求曲线 $l_1$ , 切线 $l_2$ 以及x轴围成的平面图形的面积.
  - (2) 求此平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

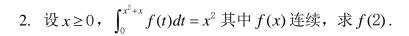


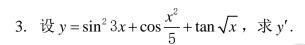
- (1) 证明:对  $\forall x \in (0,l)$ ,  $\exists \theta \in (0,1)$ ,  $(t)dt + \int_0^x f(t)dt = x[f(\theta x) f(-\theta x)].$
- (2) 求极限  $\lim_{x\to 0^+} \theta$ .

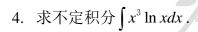


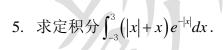
# 一、计算题

1. 求极限 
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{1-\cos x}$$
.







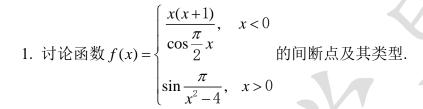


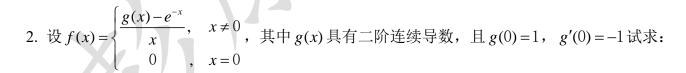
6. 求微分方程  $xy'-y=x^3\cos x$  的通解.

7. 求微分方程 y'' - 2y' + 5y = 0 的通解.

8. 计算反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ .

# 二、解答题





(1) f'(x).

(2) 讨论 f'(x)在( $-\infty$ ,+ $\infty$ ) 处的连续性.

- 3. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))
- (1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解,其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .
- (2) 设函数 u 的全微分  $du = [3f(x) + e^x]ydx + [2f'(x) + f(x)]dy$ ,其中  $f(x) \in C^{(2)}$ ,且 f(0) = 1,  $f'(0) = \frac{1}{5}, \quad \Re f(x).$

4. 以椭圆  $x = a\cos t$ , $y = b\sin t (0 \le t \le 2\pi, 0 < b < a)$  的长轴为底,作一个与上半椭圆内接的等腰 梯形,试求它的面积的最大值.

5. 设函数  $f \in C^{(1)}[a,b]$ , 且  $f'(x) \le M$  (M为常数), 且 f(a) = 0, 证明:

(1) 
$$\int_{a}^{b} f(x)dx \le \frac{1}{2}M(b-a)^{2}$$
. (2)  $\int_{a}^{b} f^{2}(x)dx \le \frac{(b-a)^{2}}{2} \int_{a}^{b} [f'(x)]^{2} dx$ .

#### 一、填空题

- 1. 函数  $F(x) = \int_{1}^{x} (2 \frac{1}{\sqrt{t}}) dt \ (x > 0)$  的单调递减区间为\_\_\_\_\_\_.
- 2. 若 f(x) 在 x = 0 处连续且  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ ,则  $f(0) = ______, f'(0) = ______,$
- 3. 若  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x+2} & x \ge 0 \\ \frac{\sqrt{a+x} \sqrt{a}}{x} & x < 0 \end{cases}$  有可去间断点 x = 0,则 a =\_\_\_\_\_.
- 5. 设 $x \to 0$ 时, $f(x) = \ln(1 + ax^2)$ 与 $g(x) = \sin^2 3x$ 是等价无穷小,则 $a = \underline{\qquad}$ .

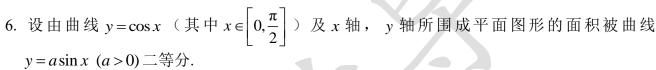
#### 二、计算题

1. 求极限  $\lim_{x\to 1} \frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ .

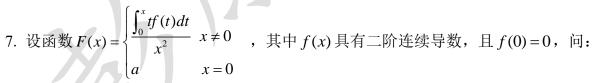
- 2. 求函数  $f(x) = \frac{x^2 5}{x 3} + \int_{-1}^{1} (\sqrt{1 x^2} + x)^2 dx$  的单调性和极值.
- 3. 求定积分  $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ .

4. 求微分方程  $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$  的通解.

5. 求微分方程 $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$ 的通解.



- (1) 确定 a 的值.
- (2) 求曲线  $y = \cos x$ ,  $y = a \sin x$  及 x = 0 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的立体的体积.



- (1) a为何值时,F(x)在x=0处连续.
- (2) 讨论 F'(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  上的连续性.

- 8. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))
- (1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解,其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ .
- (2) 求微分方程  $\ddot{x} 3\dot{x} + 2x = 4e^{t}$  的通解.

9. 设 f(x) 在 [a,b] 上可导 (a>0,b>0) ,且满足方程  $2\int_a^{\frac{a+b}{2}}e^{\lambda(x^2-b^2)}f(x)dx = (b-a)f(b)$  . 证明:存在  $\xi \in (a,b)$  ,使  $2\lambda \xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$  .

- 10. 设微分方程 y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.
- (1) 证明: 若1+P(x)+Q(x)=0,则方程有一特解 $y=e^x$ ;若P(x)+xQ(x)=0则方程有一特解y=x.
- (2) 根据(1) 的结论,求(x-1)y''-xy'+y=0的通解和满足初始条件y(0)=2,y'(0)=1的特解.
- (3) 求 (x-1)y'' xy' + y = 1 满足初始条件  $\lim_{x\to 0} \frac{\ln[y(x)-1]}{x} = -1$  的特解.

#### 一、填空题

1. 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 3x^2 - 2x + k & x \ge 0 \end{cases}$$
 在  $x = 0$  处连续,则常数  $k =$ \_\_\_\_\_.

- 2.  $\int_{-2}^{2} (1+x)\sqrt{4-x^2} \, dx = \underline{\hspace{1cm}}$
- 3. 微分方程  $y^{(3)} + y = 0$  的通解是
- 4.  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \underline{\hspace{1cm}}$

#### 二、单选题

1. 设周期函数 f(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  内可导,其周期为 4,且  $\lim_{x\to 0} \frac{f(1)-f(1-x)}{2x} = -1$ ,则曲线

y = f(x)在点(5, f(5))处的切线的斜率为(

- B. -2
- D. -1

2. 微分方程  $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应有形式(a,b)常数)( )

- A.  $ae^x + b$  B.  $axe^x + bx$  C.  $ae^x + bx$  D.  $axe^x + b$

3.  $f(x) = \frac{(x^2 + x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2 - 1}$ 的可去间断点的个数是( ) A. 0 B. 1 C. 2 D.

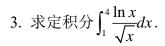
- D. 3

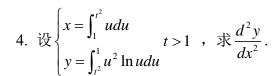
- A.  $I_1 > I_2 > 1$  B.  $1 > I_1 > I_2$  C.  $I_2 > I_1 > 1$  D.  $1 > I_2 > I_1$

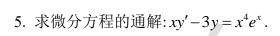
# 三、计算题

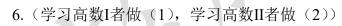
1. 求极限  $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$ 

2. 计算积分  $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$ .





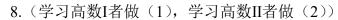




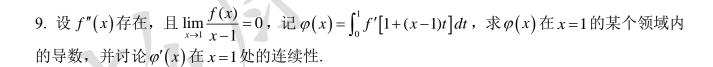
(1) 求微分方程组
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$$
的通解,其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

(2) 求  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$  的通解.

7. 在抛物线  $y=x^2(0 \le x \le 8)$  上求一点,使得过此点所做切线与直线 x=8 及 x 轴所围图形面积最大.



- (1) 设广义积分  $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$  收敛,证明广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  绝对收敛.
- (2) 计算  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$ .



# 一、填空题

1. 在抛物线  $y=x^2$  上与直线 x+2y=0 垂直的切线方程是

3. 设 f(x) 的定义域为 $(0,+\infty)$ ,已知  $f(1)=1, f'(x^2)=x^3$ 则 f(4)=\_\_\_\_\_\_.

#### 二、选择题

1. 设 f(x) 在 x = a 处取得极值且满足  $f''(x) + 2f'(x) = \int_a^{x+1} e^{f(t)} dt$ ,则 f(x) 在 x = a 处(

A. 必取极大值

B. 必取极小值

C. 不可能取极值

D. 是否取极值不能确定

2. 设  $f(x) = 2x \ln(1-x)$ ,  $g(x) = \sin^2 x$ , 则当  $x \to 0$  时 f(x) 是 g(x) 的( )

A. 同阶但非等价无穷小

B. 等价无穷小

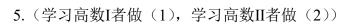
C. 高阶无穷小

D. 低阶无穷小

# 三、解答题

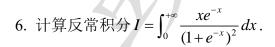
3. 求不定积分  $\int e^x \ln(e^x + 1) dx$ .

4. 求微分方程  $2xy' = y + 2x^2$  的通解.

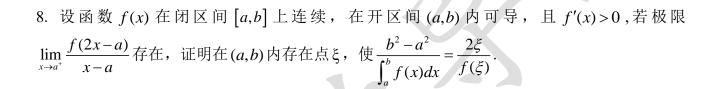


(1) 求微分方程组 
$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$$
 的通解.其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 

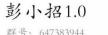
(2) 求微分方程  $y'' + y' - 2y = e^x$  的通解.



7. 抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  通过 (0,0) ,(1,2) 两点,且 a < 0,确定 a,b,c 的值与 x 轴所围图形 D 的面积最小值,并求此图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.



彭康学导团持续招募中,搜索微信公众号"彭康书院学导 团"或扫描下方二维码,关注我们,了解更多学业动态,掌握 更新学习资料。





PKSTU 微信公众号

