دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن ۱۱ خرداد ۱۳۹۷

گزارش پروژه اول

مدرّس: دکتر شهرام خزائی
نگارنده: سید علی عمادی – ۹۵۱۰۰۱۹۱

در تمامی سوالات فرض کنید out خروجی کد $Snow۳G$ است.

سؤال ۱

سؤال ۲ نتایج به دست آمده از اجرای کد به صورت زیر است:

0 : 4837	1 : 5163
00 : 2284	01 : 2553
10 : 2552	11 : 2610
000 : 1071	001 : 1213
010 : 1268	011 : 1284
100 : 1213	101 : 1339
110 : 1284	111 : 1326
0000 : 508	0001 : 563
0010 : 583	0011 : 630
0100 : 599	0101 : 669
0110 : 623	0111 : 661
1000 : 563	1001 : 650
1010 : 684	1011 : 654
1100 : 614	1101 : 670
1110 : 661	1111 : 665
00000 : 252	00001 : 256
00010 : 273	00011 : 290
00100 : 265	00101 : 318
00110 : 292	00111 : 338
01000 : 279	01001 : 320
01010 : 332	01011 : 337
01100 : 299	01101 : 324
01110 : 326	01111 : 335
10000 : 256	10001 : 307
10010 : 310	10011 : 340
10100 : 33	10101 : 350
10110 : 331	10111 : 323
11000 : 284	11001 : 330
11010 : 352	11011 : 317
11100 : 315	11101 : 346
11110 : 335	11111 : 330

می‌توان نتیجه گرفت که تقریبا احتمال آمدن هر رشته با رشته‌ی دیگر با طول یکسان،برابر است.اما در بعضی از این موارد اینگونه نیست.درواقع می‌توان نتیجه گرفت که این رشته تولید شده کاملا تصادفی نیست و احتمال آمدن بعضی رشته ها کمتر از بقیه است.

سؤال ۳ ابتدا $x = \lg n$ را محاسبه می‌کنیم.سپس به تعداد x بیت از out می‌خوانیم.اگر عدد خوانده شده عددی بین ۱ و n بود آنگاه آن را به عنوان خروجی چاپ می‌کنیم،اما اگر عدد بزرگتر از n بود به سراغ x بیت بعدی می رویم.در کد این سوال صد بار این روند اجرا می‌شود و صد نمونه خروجی تولید می‌شود.واضح است که احتمال آمدن هر یک از اعداد ۱ تا n با هم برابر است.

سؤال ٤ برای تولید نمونه‌ای از متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p ابتدا p را در ۱۰۰۰ ضرب کرده و جز صحیح آن را در نظر می‌گیریم.دقت کنید که حالا p عددی یک یا دو یا سه رقمی است.ده بیت از out می‌خوانیم.اگر عددی که این ده بیت نشان می دهند عددی کوچکتر از p بود آنگاه یک را به عنوان خروجی می‌دهیم و اگر بزرگتر از آن بود صفر را به عنوان خروجی چاپ می‌کنیم.دقت کنید اگر این عدد بزرگتر از ۱۰۰۰ باشد لازم است که به سراغ ۱۰ بیت بعدی برویم و چیزی به عنوان خروجی چاپ نکنیم.
با این روش با تقریب بسیار خوبی متغیر تصادفی برنولی با احتمال p تولید می‌شود.می‌توان برای دقیق تر شدن این عمل به جای ۱۰ بیت،بیت های بیشتری خواند.

سؤال ۵ الف
برای این قسمت ۵ بیت از out می‌خوانیم.مطابق با عدد این پنج بیت خوانده شده خروجی را چاپ می‌کنیم.تنها نکته مهم در این سوال این است که مثلا احتمال تولید $(۱, ۳)$ چهار برابر $(-۱, -۱)$ باشد.بنابراین مطابق با احتمال های آمده در سوال تعداد عدد به هر خروجی نسبت می‌دهیم.مثلا برای $(-۱, -۱)$ یک عدد و برای $(۱, ۳)$ چهار عدد نسبت می دهیم.با توجه بی کد برای تولید $(-۱, -۱)$ باید عدد پنج بیت خوانده شده ۰ باشد و برای تولید $(۱, ۳)$ اگر عدد پنج بیت خوانده شده ۱۳ یا ۱۴ یا ۱۵ یا ۱۶ باشد ، این خروجی تولید می شود.اما اگر عدد این پنج بیت بزرگتر از ۲۲ باشد لازم است که به سراغ پنج بیت بعدی برویم.
ب
برای به دست آوردن $E[Z]$ میانگین ۱۰۰۰۰ داده را حساب می‌کنیم.با اجرای کد داریم:

$$E[Z] = 3.2422$$

ج
تعداد فراخوانی ها تقریبا برابر است با ۳۲۷۱۲.که این عدد تقریبا $\frac{۲۳}{۱۱}$ عدد ۱۰۰۰۰ است.از طرفی احتمال وقوع شرط $X + Y \overset{۳}{\equiv} ۲$ برابر با $\frac{۱۱}{۲۳}$ است.که این همان دلیل تعداد فراخوانی است.
د

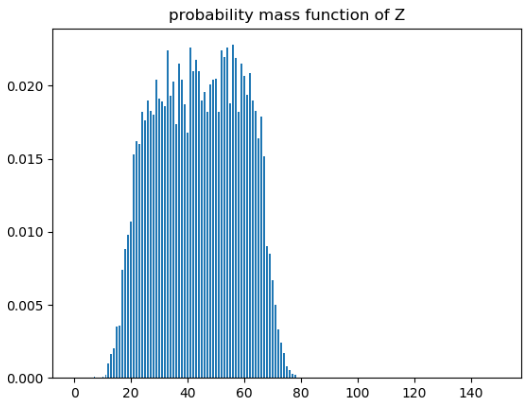
$$E[Z] = -۱ \times \frac{۲}{۱۱} + ۲ \times \frac{۵}{۱۱} + ۴ \times \frac{۱}{۱۱} + ۷ \times \frac{۳}{۱۱} = ۳$$

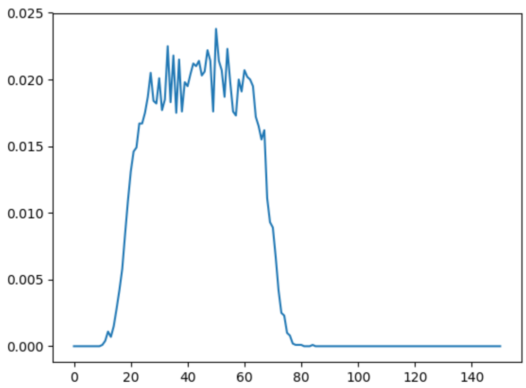
که این مقدار تقریبا برابر مقدار به دست آمده در قسمت ب است.

سؤال ٦ الف
برای تولید متغیر تصادفی دوجمله‌ای،همان روش تولید برنولی را n بار اجرا می‌کنیم و تعداد موفقیت ها را چاپ می‌کنیم.
ب با استفاده از ۱۰۰۰۰ نمونه تولید شده از Z امید و واریانس به دست آمده برابر است با :

$$E[Z] = 44.1584$$
$$Var(Z) = 221.604$$

هم‌چنین برای نمودار تابع جرم احتمال زیر به طور تقریبی داریم:





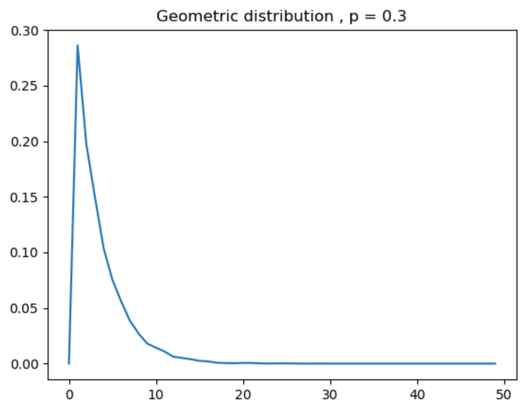
ج

سؤال ۷ الف

برای تولید نمونه از متغیر تصادفی هندسی با پارامتر p مانند برنولی با پارامتر p عمل می‌کنیم و هرگاه موفقیت حاصل شد تعداد تلاش ها تا رسیدن به موفقیت را چاپ می‌کنیم.

ب

نمودار خواسته شده در سوال به صورت زیر است :



ج

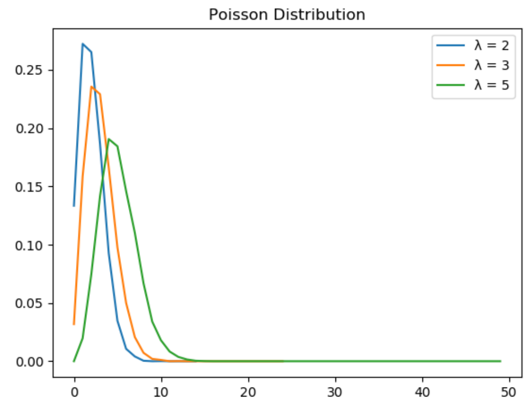
برای تولید متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ از الگوریتم $Knuth$ استفاده می‌کنیم.

algorithm *poisson random number (Knuth):*
init:
Let $L \leftarrow e^{-\lambda}$,$k \leftarrow 0$ *and* $p \leftarrow 1$
do:
$k \leftarrow k + 1$
Generate uniform random number u in [0,1] and let $p \leftarrow p \times u$
while $p > L$
return *k -1*

برای تولید عدد رندوم بین ۰ و ۱ با استفاده از out از تابع rnd استفاده می‌کنیم.این تابع ابتدا ۱۰ بیت از out می‌خواند . فرض کنید این عدد x باشد.سپس اگر این عدد از ۱۰۰۰ کوچکتر بود ، $\frac{x}{۱۰۰۰}$ را به عنوان خروجی می‌دهد و اگر x از ۱۰۰۰ بزرگتر بود $\frac{x}{۱۰۰۰۰}$ را به عنوان خروجی می‌دهد.

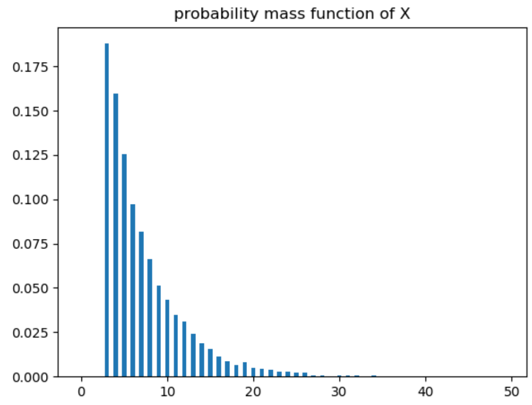
د

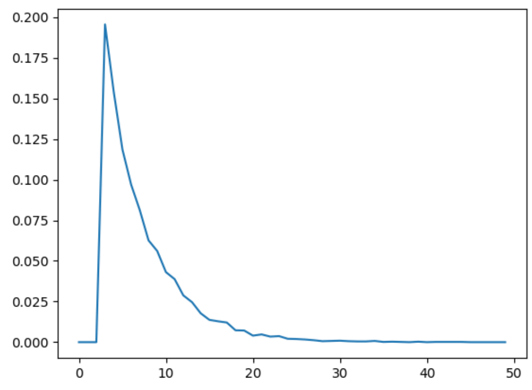
نمودار خواسته شده به شکل زیر است:



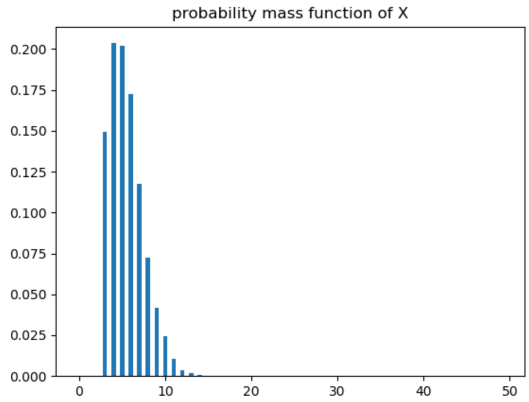
ه

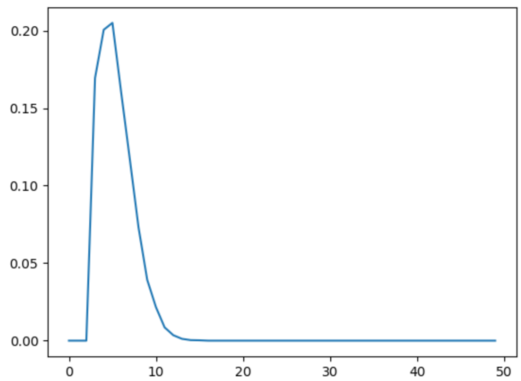
نمودار خواسته شده به شکل زیر است :





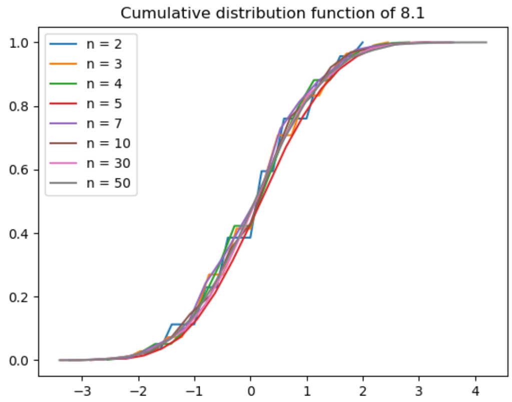
و
نمودار خواسته شده به شکل زیر است :





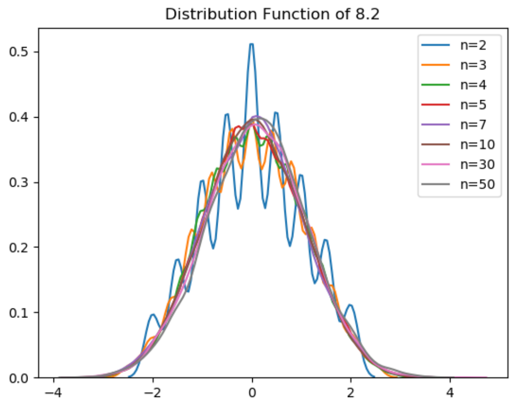
مشاهده می شود که دو تابع قسمت ه و و تقریبا یکی هستند.یعنی توزیع متغیر تصادفی پواسون با پارامتر ۵ ، تقریبا برابر توزیع متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\frac{۲}{۱۰}$ است.

سؤال ۸ الف
نمودار خواسته شده به شکل زیر است:(برای رسم این نمودار برای هر n متفاوت ۱۰۰۰۰ نمونه تولید شده است)



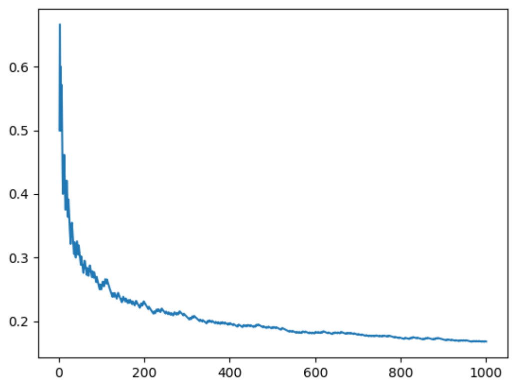
ب

نمودار خواسته شده به شکل زیر است:(برای رسم این نمودار برای هر n متفاوت ۱۰۰۰۰ نمونه تولید شده است)



سؤال ۹ الف

برای این سوال دو تابع نوشته شده که تابع is_prime چک می کند که عدد ورودی اول است یا خیر و تابع $count_primes$ تعداد اعداد اول از ۱ تا n را می‌شمارد.نمودار P_N بر حسب N را مشاهده می‌کنید:



رفتار این تابع شبیه به رفتار تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ است. **ب** فرض کنید P پیشامد انتخاب دو عدد نسبت به هم اول و A_i پیشامد انتخاب عدد i در انتخاب اول است.بنابراین داریم:

$$p(P) = \Sigma p(P|A_i)P(A_i)$$

طبق فرمول بالا احتمال و نمودار خواسته شده را به دست می‌آوریم.