Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

1. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

(a) Da f stetig ist nimmt es auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ mit Satz 4.31 [Meh22, S. 109] ein Minimum und ein Maximum an. Es gibt also $m \leq f \leq M$ mit $m, M \in [0, 1]$. Da $f(x) \geq 0$ gilt außerdem $0 \leq m \leq f$. Es ergibt (siehe Gleichung 7.5 [Meh22, S. 180])

$$m(1-0) \leq \int\limits_0^1 f(x)dx \leq M(1-0)$$

und dann per Voraussetzung

$$0 \leq m \leq 0 \leq M.$$

Hier folgt aus dem Einschließungssatz $m = 0$. Angenommen $M > 0$, dann muss $\int\limits_0^1 f(x)dx > 0$, da keine negativen aber nun mindestens ein positiver Wert vorliegen. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Voraussetzung und damit muss also gelten $m = M = 0$ und hiermit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

(b) **Pos. Def.** Sei $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Aus $||f||_1 = 0$ folgt $\int\limits_0^1 |f(x)|dx = 0$ per Definition. Damit wissen wir mit (a) $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Aus $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ ergibt sich mit der Definition $\int\limits_0^1 |f(x)|dx = \int\limits_0^1 |0|dx = 0$. Es gilt also $||f||_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$, wobei $||f||_1$ stets positiv ist, was sich, wie in der Vorlesung gezeigt, aus den anderen Eigenschaften ableiten lässt.

Abs. Hom. Seien $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ||\lambda f||_1 &= \int\limits_0^1 |\lambda f(x)|dx \\ &= \int\limits_0^1 |\lambda| \cdot |f(x)|dx \qquad \text{(abs. Homogenität der Betragsnorm)} \end{aligned}$$

$$= |\lambda| \cdot \int_0^1 |f(x)|dx \qquad \text{(Satz 7.14 (1) [Meh22, S. 176])}$$
$$= |\lambda| \cdot ||f||_1$$

DUG. Seien $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$.

$$\begin{aligned} ||f+g||_1 &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| + |g(x)|dx \qquad \text{(DUG der Betragsnorm)} \\ &= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx \qquad \text{(Satz 7.14 (2) [Meh22, S. 176])} \\ &= ||f||_1 + ||g||_1 \end{aligned}$$

Damit erfüllt $||f||_1$ alle nötigen Eigenschaften um eine Norm auf $\mathcal{C}([0,1])$ zu definieren. $\square$

Lösung 2. Aufgabe:

Seien $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $x_{\max} := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$. Wir können nun $||x||_1$ abschätzen, d.h. es gilt

$$|x_{\max}| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \cdot |x_{\max}|$$

Diese Relation bleibt erhalten wenn wir die Einträge mit einem $p \geq 1$ potenzieren und danach die p-ten Wurzeln ziehen.

$$\begin{aligned} & (|x_{\max}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq && (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} && \leq (n \cdot |x_{\max}|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \Leftrightarrow \quad & |x_{\max}| \leq && (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} && \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}| \end{aligned}$$

Bilden wir nun den Grenzwert, erhalten wir die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned} & \lim_{p\to\infty} |x_{\max}| \leq && \lim_{p\to\infty} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} && \leq \lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}| \\ \Leftrightarrow \quad & |x_{\max}| \leq && \lim_{p\to\infty} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} && \leq |x_{\max}| \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Einschließungssatzes stellen wir also nun fest, dass

$$||x||_\infty = |x_{\max}| = \lim_{p\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to\infty} ||x||_p$$

$\square$

Lösung 3. Aufgabe:

(a)

$$\begin{aligned}(A^\circ)^\circ &= A^\circ \setminus \partial(A^\circ) && \text{(Korollar 1.24 2) [Meh22, S. 228])}\\ &= A^\circ \setminus \emptyset && \text{(Das Innere besitzt keine Randpunkte)}\\ &= A^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{B})} &= \overline{B} \cup \partial(\overline{B}) && \text{(Korollar 1.24 3) [Meh22, S. 228])}\\ &= \overline{B} \cup \partial(B) && \text{(Der Rand des Abschlusses ist gleich dem Rand der Menge selbst)}\\ &= B \cup \partial(B) \cup \partial(B) && \text{(Korollar 1.24 3) [Meh22, S. 228])}\\ &= B \cup \partial(B)\\ &= \overline{B}\end{aligned}$$

(b)

- Nach der Definition des offenen KernsQT°: (Bemerkung 1.21 6) [Meh22, S. 227]

  Der Alternativname Inneres für den offenen Kern T° rührt daher, dass er mit der Menge der inneren Punkte von T übereinstimmt, d.h. es gilt

  $$T^\circ = \{x \in T | \text{x ist innerer Punkt von T}\}. \tag{1}$$

  $$\forall x \in A^\circ \cap B^\circ, \exists d_1, d_2 > 0 \tag{1}$$

  $s.d.\mathrm{U}_{d_1}(x) \subseteq A, U_{d_2}(x) \subseteq B$ Dass $\exists d_3 = min(d_1, d_2)$, s.d. $U_{d_3}(x) \subseteq A$ und $U_{d_3}(x) \subseteq B$
  $\Rightarrow U_{d_3}(x, d) \subseteq (A \cap B)^\circ$
  $\Rightarrow x \in (A \cap B)^\circ$

  $$\Rightarrow (A^\circ \cap B^\circ) \subseteq (A \cap B)^\circ \tag{2}$$

  $\forall x \in (A \cap B)^\circ, \exists d_1$, s.d. $U_{d_1}(x) \subseteq A \cap B$
  $\Rightarrow U_{d_1}(x) \subseteq A, U_{d_1}(x) \subseteq B$
  $\Rightarrow$ x ist eine innerer Punkt von A, und x ist auch eine innerer Punkt von B

$\Rightarrow x \in A^\circ \cap B^\circ$ (Nach (1))

$$\Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq (A^\circ \cap B^\circ) \tag{3}$$

Nach (2) und (3), $(A^\circ \cap B^\circ) = (A \cap B)^\circ$

- Wir erheben zunächst eine äquivalente Definition(4) von Abschluss Nach der Äquivalente Definition von Abschluss,

  $\overline{T} = \cap\{A \subseteq X | A \supseteq \text{T abgeschlossen}\}$

  Weil $\overline{T}$ der Durchschnitten abgeschlossener Mengen ist, die A enthalten. Das $\overline{T}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält (Der Durchschnitten abgeschlossener Mengen ist noch geschlossen). Also enthält die offene Nachbarschaft jedes Elements in $\overline{T}$ mindestens ein Element in A, ansonsten wir können die offene Nachbarschaft, die kein Element in A enthält, aus $\overline{T}$ löschen, um eine neue Menge T' zu erhalten, die kleiner ist als $\overline{T}$ und enthält immer noch A, was der Notation widerspricht, dass $\overline{T}$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält. (Eine abgeschlossene Menge, die eine offene Menge löscht, ist immer noch eine abgeschlossene Menge)
  Eine abgeschlossene Menge, die eine offene Menge löscht, ist immer noch eine abgeschlossene Menge:

  $$\begin{aligned}
  &(abgeschlossen) \setminus (offen)\\
  &\Rightarrow (abeschlossen) \cap (Grundmengen \setminus (offen))\\
  &\Rightarrow (abeschlossen) \cap (abeschlossen)\\
  &\Rightarrow (abeschlossen)
  \end{aligned}$$

  Dass $\overline{T} = \cap\{A \subseteq X | A \supseteq \text{T abgeschlossen}\}$

  $\Leftrightarrow \forall x \in \overline{T}, \forall d, \exists y \in T$ s.d. $y \in$ Kugel $U_d(x)$

  $$\Leftrightarrow \{x \in X | \forall d \in \mathbb{R}, U_d(x) \cap T \neq \emptyset\} \tag{4}$$

  Wir werden die Definition (4) für alle Beweis verwenden
  Seien $\forall x \in \overline{A} \cup \overline{B}, \forall d$ s.d. $U_d(x) \cap A \neq \emptyset$ oder $U_d(x) \cap B \neq \emptyset$
  $\Rightarrow U_d(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
  $\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$

  $$\Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)} \tag{5}$$

Seien $\forall x \in \overline{(A \cup B)}, \forall d$, s.d. $U_d(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
$\Rightarrow (U_d(x) \cap A) \cup (U_d(x) \cap B) \neq \emptyset$
$\Rightarrow U_d(x) \cap A \neq \emptyset$ oder $U_d(x) \cap B \neq \emptyset$
$\Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

$$\Rightarrow \overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \tag{6}$$

Nach (5) und (6), $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(c)
- 1. $\forall x \in A^\circ \cup B^\circ, \exists d_1$ **s.d.** $U_{d_1}(x) \in A$ **oder** $\exists d_2$ **s.d.** $U_{d_2}(x) \in B$
  $\Rightarrow$ **Seien** $d_3 = \mathbf{min}(d_1, d_2),$ **dass** $U_{d_3}(x) \subseteq A \cup B$
  $\Rightarrow x \in (A \cup B)^\circ$

  $$\Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ \tag{7}$$

  2.Beweisen$(A \cup B)^\circ \not\subset A^\circ \cup B^\circ$ .Beispiel für eine Situation, $(A \cup B)^\circ \not\subset A^\circ \cup B^\circ$. Seien
  A=$\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$(Menge rationaler Zahlen),
  B=$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$(Menge irrationaler Zahlen),
  $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$,(R $\setminus \mathbb{Q}))^\circ = \emptyset$
  $\Rightarrow (\mathbb{Q} \cup$(R $\setminus \mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} \not\subset \emptyset = \mathbb{Q}^\circ \cup$(R $\setminus \mathbb{Q})^\circ$ (8)

  Nach (7) und (8), $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$
- 1. $\overline{A \cap B} = \{x \in \mathbb{R} | \forall d, U(x, d) \cap (A \cap B) \neq \emptyset\}$
  Seien $\forall x \in \overline{(A \cap B)}, \forall d, U(x, d) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$
  $\Rightarrow U(x, d) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$
  $\Rightarrow U(x, d) \cap A \neq \emptyset$,und $U(x, d) \cap B \neq \emptyset$
  $\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
  $\Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (9)
  2. Beweisen$\overline{A} \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$. Beispiel für eine Situation, $\overline{A} \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

  Seien A=$\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$, B=$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$
  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R}, \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{Q} \cap (\text{R} \setminus \mathbb{Q})} = \emptyset$
  $\Rightarrow \overline{\mathbb{Q} \cap mathbbR \setminus \mathbb{Q})} \not\subset \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ (10)
  Nach (9) und (10), $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

$\square$

Lösung 4. Aufgabe:

(a) Die Umgebung um eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist mit der gegebenen Metrik d definiert als

$$U_\varepsilon(A) = \{X \subseteq \mathbb{R}^{n,n} \mid d(A, X) < \varepsilon\}$$

$$= \{X \subseteq \mathbb{R}^{n,n} \mid \operatorname{rang}(A - X) < \varepsilon\}.$$

Wir wählen nun $0 < \varepsilon < 1$, dann enthält $U_\varepsilon(A)$ nun alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{n,n}$, s.d.

$$\operatorname{rang}(A - X) = 0,$$

da der Rang nur auf natürliche Zahlen abbildet.

Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix, daher muss gelten $A = X$. Die Umgebung enthält also nur die Menge selbst, die per Voraussetzung Teilmenge der allgemeinen lineare Gruppe ist.

$$U_\varepsilon(A) = \{A\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Das heißt, wir haben ein ε gefunden für das die Umgebungen U_ε aller Elemente der Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ wieder in dieser Menge enthalten sind. Damit sind alle Elemente innere Punkte und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist offen in $(\mathbb{R}^{n,n}, d)$.

Betrachten wir nun das Komplement $\mathbb{R}^{n,n} \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Analog wählen wir hier ein $\varepsilon < 1$, s.d. für alle $B \in \mathbb{R}^{n,n} \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$U_\varepsilon(B) = \{B\} \subseteq \mathbb{R}^{n,n} \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Damit ist also $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ auch abgeschlossen, da das Komplement offen ist (siehe Definition 1.12 4) [Meh22, S. 223]).

(b) Die Umgebung um einen Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ ist mit der gegebenen Metrik d_p definiert als

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d_p(x, a) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x - a||_2 < \varepsilon, \text{ wobei } x, a \text{ linear abhängig}\} \\ &\quad \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x||_2 + ||a||_2 < \varepsilon, \text{ wobei } x, a \text{ linear unabhängig}\}. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\varepsilon = ||x||_2$. Angenommen die Umgebungen U_ε um a enthalten ein Element x, das linear unabhängig zu a ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} & ||x||_2 + ||a||_2 < \varepsilon = ||x||_2 \\ \Leftrightarrow\quad & ||x||_2 + |a| < ||x||_2 \qquad \text{(da } a_2 = 0 \text{ p. Vor. mit } a := (a_1, a_2)) \\ \Leftrightarrow\quad & |a| < 0 \end{aligned}$$

Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch, also enthalten die Umgebungen um $a := (a_1, a_2)$ nur Elemente die linear abhängig sind. Für diese Elemente $x := (x_1, x_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} ||x - a||_2 &= ||(x_1 - a_1, x_2 - a_2)||_2 \\ &= ||(x_1 - a_1, x_2)||_2 \qquad \text{(da } a_2 = 0 \text{ p. Vor.)} \\ &< ||(x_1, x_2)||_2 = ||x||_2 \qquad \text{(da } a_1 \neq 0 \text{ p. Vor.)} \end{aligned}$$

Da nun alle $u \in U_\varepsilon(a)$ linear abhängig zu a sind, gilt $\lambda u = a$ für ein λ aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. λu ist offensichtlich in M_2, also sind alle Umgebungen um alle Punkte

$a \in M_2$ wieder in M_2 enthalten. Daher sind alle Punkte innere Punkte und die Menge ist offen.

Betrachten wir nun analog das Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus M_2 = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ so stellen wir mit dem gleichen Beweis fest, dass diese Menge offen ist. Damit ist also $\mathbb{R}^{n,n}$ als Komplement einer offenen Menge auch abgeschlossen (siehe Definition 1.12 4) [Meh22, S. 223]).

$\square$

Literatur

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung.* 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

2. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

(a) Nach der Definition des metrischer Raum,

- Positive Definitheit

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| \geq 0, \arctan(x) \text{ } \textbf{ist eine monotone funktion}$$
$$\Rightarrow (x = y \Leftrightarrow (\arctan(x) = \arctan(y)) \Leftrightarrow (d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| = 0))$$

- Symmetrie

$$d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$$
$$d(y,x) = |\arctan(y) - \arctan(x)| = |\arctan(x) - \arctan(y)| = d(y,x)$$

- Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\forall x, y, z \in \mathbb{R} \\
&d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y) \\
&= |\arctan(x) + \arctan(z) - \arctan(z) - \arctan(y)| \\
&\leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(y) - \arctan(y)| \\
&= d(x,z) + d(y,z)
\end{aligned}$$

(b) Nach der Definition des Standardmetrik,
$U_\epsilon^{d1}(x) = \{U_\epsilon(x) | \textbf{Unter der Definition von d1 Abstand }, d_1 = ||x-y||_2\}$
$U_\epsilon^{d2}(x) = \{U_\epsilon(x) | \textbf{Unter der Definition von d2 Abstand }, d_2 = |\arctan(x) - \arctan(y)|\}$
$f(x) = \arctan(x)$

U offen in der Standardmetrik $\Leftrightarrow \forall x \in U, \exists \epsilon > 0$ **s.d.** $U_\epsilon^{d1}(x) \subseteq U$

$\Leftrightarrow \forall y \in U_{\epsilon^2}^{d_1}, d_2(x,y) = ||x-y||_2 = (x-y)^2 < \epsilon^2, y \in U$

$\Leftrightarrow \arctan(x)$ **ist eine stetig funktion, und die erste Ableitung von** $\arctan(x)$ **ist gleich** $\frac{1}{1+x^2}$, **eine monoton fallende Funktion**

$\Rightarrow$ **Die erste Ableitung ist immer größer als Null, was bedeutet, dass arctan(x) eine monoton steigende Funktion ist.**

$\Leftrightarrow |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\int_x^y f^{(1)}(\sigma)d\sigma| \leq [\max_{\sigma\in[x,y]} f^{(1)}(\sigma)] \cdot \epsilon = \frac{1}{1+x^2} \cdot \epsilon < \epsilon$

$\Leftrightarrow d_2(x,y) < \epsilon, y \in U$

$\Leftrightarrow U_\epsilon^{d_2}(x) \subseteq U$

$\Leftrightarrow$ **U offen in**$(\mathbb{R}, d_2)$

(c) Wenn wir eine Cauchy-Folge x_n auf $(\mathbb{R}, d)$ finden, die existiert und keinen Grenzwert hatte, können wir zeigen, dass $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.

Seien x_n=n, Wir können zeigen, dass x_n eine Cauchy-Folge auf $(\mathbb{R}, d)$ ist

$d(x_{n+1}, x_n) = |\arctan(x_{n+1}) - \arctan(x_n)| = |\int_n^{n+1} f(\sigma)d\sigma| \leq \frac{1}{1+n^2} \cdot \Delta\sigma = \frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) <= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \{x_n\}$ **eine Cauchy-Folge auf** $(\mathbb{R}, d)$ **ist**.

Und weil die $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, x_n$ **Grenze nicht existiert**.

$\Rightarrow x_n$ **eine Cauchy-Folge nicht Grenzwert auf** $(\mathbb{R},)$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, d)$ **nicht vollständig ist**.

$\square$

Lösung 2. Aufgabe:

Theorem 1:Sei X eine metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abschlossen, wenn gilt: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n \in A$, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, so liegt schon in A(Siehe Satz 2 [For17, S. 16])).

Theorem 2: Die Multiplikationsmatrix aus nichtnegativen reellen Zahlen und positiver semidefiniter Matrix ist immer noch positive semidefinite Matrix

Sei der Frobeniusnorm$||\cdot||_F$ **versehen die für A** $= ([a_{ij}])_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ **durch**

$$||A||_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Ziel: Zeige, dass $X = \{A \in \mathbb{R} : x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$ abgeschlossen in $(\mathbb{R}^{n,n}, || \cdot ||_F)$ ist.
Wenn wir für jedes Element A $\in$ X eine Folge A_n finden, die gegen x konvergiert, dann kann bewiesen werden, dass A abgeschlossen ist (nach Theorem 1)
Per Definition ist A eine positive semidefinite Matrix über $(\mathbb{R}, d)$.
$A = ([a_{ij}])_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$
$B = ([b_{ij}])_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$A \in X, ||A||_F = M, \forall \epsilon > 0, \text{ \textbf{Seien} } B_n = \{B | b_{ij} = (1 - \frac{\epsilon}{M} + \frac{1}{n}) \cdot a_{ij}\}$$
$$\text{\textbf{Nach (Theorem 2) ist} } B_n \text{ \textbf{eine positive semidefinite Matrix}} \in X,$$
$$\text{\textbf{Zeige: Gleichzeitig konvergiert} } B_n \text{ \textbf{gegen} } A:$$
$$\lim_{n\to\infty} d(A, B_n) = \lim_{n\to\infty} ||A - B_n||_F = 0$$
$$\Leftrightarrow d(A, B_n) = ||A - B_n||_F = \sum_{i,j}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2 = (\frac{\epsilon}{M} - \frac{1}{n}) \sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2$$
$$= (\frac{\epsilon}{M} - \frac{1}{n}) \cdot M = \epsilon - \frac{M}{n} < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \{B_n\} \text{ \textbf{konvergiert gegen A}}$$

Für jedes Element A in X gibt es eine solche Folge $\{B_n\}$, also ist X eine abgeschlossene Menge.(Nach Theorem 1)

□

Lösung 3. Aufgabe:

(a) Zunächst betrachten wir die Definitonen und Voraussetzungen im Detail. Die Epsilon Umgebung um $x \in X$ ist gegeben als

$$U_\varepsilon(x) := \{u \in X \mid d_X(x, u) < \varepsilon\}.$$

Damit gilt für $s_f(x)$

$$\begin{aligned} s_f(x) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} S_f(U_\varepsilon(x)) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup\{d_Y(f(u_1), f(u_2)) \mid u_1, u_2 \in U_\varepsilon(x)\} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup\{d_Y(f(u_1), f(u_2)) \mid u_1, u_2 \in X \text{ mit } d_X(x, u_1) < \varepsilon, d_X(x, u_2) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Nullfolge $u_n = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, wobei insbesondere gilt $u_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so können wir mit Hilfe der Definition des Limes nach Punkt a die obige Gleichung schreiben als

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{d_Y(f(u_1), f(u_2)) \mid u_1, u_2 \in X \text{ mit } d_X(x, u_1) < \frac{1}{n}, d_X(x, u_2) < \frac{1}{n}\}$$

$$\Leftrightarrow \sup\{d_Y(f(u_1), f(u_2)) \mid u_1, u_2 \in X \text{ mit } d_X(x, u_1) < 0, d_X(x, u_2) < 0\}$$

Da nun die Metrik d_X per Definition stets größer als 0 ist enthält also die Menge des Supremums keine Elemente. Das Supremum für die leere Menge ist mit Definition 1.61 1) [Meh22, S. 221] gleich 0. Damit existiert also ein Grenzwert für alle $x \in X$.

(b) Erneut wissen wir mit Definition 1.61 [Meh22, S. 221], dass das Supremum genau dann 0 ist, wenn die Menge leer ist oder nur 0 enthält.

$$\begin{aligned} s_f(x_0) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} S_f(U_\varepsilon(x_0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(U_\varepsilon(x_0)) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} U_\varepsilon(x_0) = \emptyset \end{aligned}$$

Die leere Menge, sowie die Epsilon Umgebung um x_0 sind offen. Wie in der Vorlesung gezeigt ist f daher stetig, da das Urbild der offenen Mengen von f wieder offen ist.

(c) Wir wissen, dass $S_f(x) < \infty$, da f beschränkt ist, d.h. dass der Durchmesser des Bildes von f endlich ist.

□

Lösung 4. Aufgabe:

Satz 1: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, sowie $a \in X$. Ist f stetig in a und g stetig in f(a), dann ist $g \circ f$ stetig in a. (vgl. Satz 1.42 [Meh22, S. 236]).

Wir betrachten die Stetigkeit von $f(x, y)$ fallweise.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $\forall x, y > 0, x, y < 0$

$$f(x,y) = \frac{xy^\alpha}{x^2 + y^2}$$

Nach Satz 1 ist $f(x, y)$ eine zusammengesetzte Funktion aus Elementarfunktionen und damit stetig.

- $\forall (x > 0, y < 0)(x < 0, y > 0)$

$$f(x,y) = \frac{-xy^\alpha}{x^2 + y^2}$$

Auch hier ist $f(x,y)$ eine zusammengesetzte Funktion aus Elementarfunktionen und damit stetig.

- $(x = 0, \forall y), (y = 0, \forall x))$

$$f(x,y) = 0$$

$f(x,y)$ ist in diesem Fall konstant, also offensichtlich auch stetig.

- $x, y = 0$

$$f(x,y) = \frac{xy^\alpha}{x^2 + y^2}$$

Da der Nenner eines Bruchs nicht 0 sein kann, können wir den Grenzwert nicht direkt berechnen, wenn sich die Funktion f(x,y) 0 nähert.

Seien

$$x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi$$

mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Dann ist

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2}{2^\alpha} \cdot (\sin 2\varphi)^\alpha$$

Wenn $x \to 0, y \to 0$ und entsprechend $r \to 0, \varphi \to 0$, dann ergibt sich

$$\lim_{r,\varphi \to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 = \lim_{x,y\to 0} f(x,y) = f(0,0).$$

Damit ist $f(x,y)$ stetig in $(0,0)$.

□

Literatur

[For17] Otto Forster. *Analysis 2: Differentialrechnung im IRn, gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, 2017.

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung.* 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

3. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

a) Sei $\mathcal{D}_i$ definiert als

$$\mathcal{D}_i := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : |\det\ A| < i\}$$

für $i \in \mathbb{R}$.

Zunächst zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{D}_i$ offen ist.
Das Bild der Determinantenfunktion für die Elemente $A \in \mathcal{D}_i$ ist das offensichtlich offene Intervall $]-i, i[$.
Die Determinante ist eine stetige Funktion (als Summe von stetigen Funktionen (siehe Satz 4.8 [Meh22, S. 108]), die als Polynom in n^2 Variablen aufgefasst werden kann, siehe Definiton 7.4 [LM21, S. 96] und Beispiel 7.5 [LM21, S. 97]).

Wir wissen mit Satz 1.45 [Meh22, S. 238], dass die Urbilder offener Mengen wieder offen sind, genau dann wenn det stetig ist. Damit ist das Urbild des offenen Intervalls $]-i, i[$ ebenso offen. Die Menge des Urbilds ist nun genau die Menge aller Matrizen die unsere Bedingung $|\det\ A| < i$ erfüllt, also die Menge $\mathcal{D}_i$. Daher ist $\mathcal{D}_i$ offen.

Mit der unendlichen Indexmenge $I = \mathbb{R}$ gilt dann

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_i = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \lim_{r \to \infty} |\det A| < r\} = \mathbb{R}^{n,n},$$

da die Determinante stets auf eine reelle Zahl abbildet (und damit insbesondere nicht auf ∞ oder $-\infty$). Da eine beliebige Vereinigung offener Mengen wieder offen ist (siehe Satz 1.16 [Meh22, S. 225]), ist also die Vereinigung aller offenen Mengen $\mathcal{D}_i$ eine offene Überdeckung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Betrachten wir aber nun eine endliche, nicht-leere Teilmenge $E \subseteq I$. Da E endlich ist, ist sie auch kompakt (siehe Beispiel 1.60 3) [Meh22, S. 244]). Da sie auch nicht-leer ist, können wir mit Satz 1.70 [Meh22, S. 249] stets ein Maximum und ein Minimum in E finden s.d. für alle $i \in E$ gilt

$$\min(E) := m \leq i \leq M =: \max(E).$$

Dies bedeutet, dass die Vereinigung aller Mengen $\mathcal{D}_i$ über die Indexmenge E nur noch alle Matrizen A enthält für die gilt:

$$|\mathrm{det}A| < \max(|m|, |M|) =: \hat{M}$$

also

$$\bigcup_{i \in E} \mathcal{D}_i = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : |\det\ A| < \hat{M}\}.$$

Da aber $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ auch die Matrizen A' mit $|\det\ A'| = \hat{M} + 1$ enthält, muss also gelten

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \not\subseteq \bigcup_{i \in E} \mathcal{D}_i = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : |\mathrm{det}A| < \hat{M}\}.$$

Damit gibt es für die offene Überdeckung $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{D}_i$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ keine endliche Teilüberdeckung. Mit Definition 1.59 [Meh22, S. 243] kann also $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ nicht kompakt sein.

$\square$

b) Wie im Tutorium besprochen, können wir den metrischen Raum $(\mathbb{R}^{n,n}, \|\cdot\|_\mathrm{F})$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n'}$ auffassen. Damit ist eine Teilmenge dieses Raumes genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist (siehe Satz 1.67 [Meh22, S. 248]).

Analog zur Argumentation in a) zeigen wir zunächst, dass die Menge $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Das Bild der stetigen (siehe a)) Determinantenfunktion für die Elemente $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist das offensichtlich abgeschlossene Intervall $[1, 1]$. Damit ist das Urbild, also die Menge $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, abgeschlossen (siehe Satz 1.45 [Meh22, S. 238]).

Wir zeigen nun, dass die Menge $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ nicht beschränkt in $(\mathbb{R}^{n,n}, \|\cdot\|_\mathrm{F})$ ist und daher nicht kompakt sein kann.
Angenommen $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ wäre beschränkt, dann existiert, da $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ zudem abgeschlossen ist, ein $A_{\max} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ für das gilt

$$\|A_{\max}\|_\mathrm{F} \geq \|A\|_\mathrm{F} \text{ für alle } A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

, also ein Maximum der Menge.
Wir wissen aus der linearen Algebra aber bereits, dass die Addition eines λ-fachen, mit $\lambda \in \mathbb{R}$, einer Zeile von $A_{\max}$ zu einer anderen Zeile von $A_{\max}$ nichts an der Determinanten von $A_{\max}$ ändert (siehe Lemma 7.13 [LM21, S. 103]). Daher können wir nun die Matrix $A'_{\max}$ konstruieren als

$$A'_{\max} = \{a'_{i,j} \in A'_{\max} |\ i, j \in \{1, \ldots, n\}\} \text{ mit}$$
$$a'_{i,j} := \begin{cases} 2 \cdot a_{i,j}, & \text{für } i = 1 \\ a_{i,j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $a_{i,j}$ die Einträge von $A_{\max}$ darstellen, und wissen, dass

$$\det A'_{\max} = \det A_{\max} = 1$$

gilt. D.h. $A'_{\max} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ gilt. Außerdem wissen wir, dass mindestens für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gelten muss

$$a_{1,j} \neq 0$$

denn die Determinante $\det A_{\max}$ ist ungleich 0 (siehe Lemma 7.10 3) [LM21, S. 99]).
Damit stellen wir aber nun fest, dass

$$\begin{aligned}
\|A_{\max}\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2} \\
&< \sqrt{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 + \sum_{j=1}^{n} |2 \cdot a_{1,j}|^2} = \|A'_{\max}\|_{\mathrm{F}}
\end{aligned}$$

was uns zu einem Widerspruch gegenüber unserer Annahme (1) führt. Damit kann $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ nicht beschränkt sein und mit dem Satz von Heine auch nicht kompakt.

□

c) Wie in b) gilt auch für $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n,n}$, dass die Menge kompakt ist, genau dann wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Wir zeigen zunächst, dass für alle $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$|\det A| = 1. \tag{2}$$

Wir sehen dies sofort, da für ein beliebiges $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
(\det A)^2 &\overset{*1}{=} \det A \cdot \det A^T \\
&\overset{*2}{=} \det AA^T \\
&\overset{*3}{=} \det I_n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$*_1$: $\det A = \det A^T$, siehe Lemma 7.10 5) [LM21, S. 99]
$*_2$: $\det A \cdot \det B = \det AB$, siehe Lemma 7.15 [LM21, S. 105]
$*_3$: $AA^T = I_n$, per Voraussetzung

Analog zur Argumentation in a) zeigen wir jetzt, dass die Menge $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist. Das Bild der stetigen (siehe a)) Determinantenfunktion für die Elemente $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ist die Menge $\{-1\} \cup \{1\}$. Als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist diese Menge ebenfalls abgeschlossen (siehe Korollar 1.18 2) [Meh22, S. 226]). Damit ist das Urbild, also die Menge $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, abgeschlossen (siehe Satz 1.45 [Meh22, S. 238]).

Wir zeigen jetzt, dass für alle $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$\|A\|_{\mathrm{F}} \leq \sqrt{n}. \tag{3}$$

Wir sehen dies sofort, da für ein beliebiges $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}\|A\|_{\mathrm{F}} &\overset{*_4}{=} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2} \\ &\overset{*_5}{=} \sqrt{\operatorname{spur}(AA^T)} \\ &\overset{*_6}{=} \sqrt{\operatorname{spur}(I_n)} \\ &= \sqrt{n}.\end{aligned}$$

$*_4$: per Definition, siehe Beispiel 1.43 3) [Meh22, S. 237]
$*_5$: siehe Beispiel 12.4 (3) [LM21, S. 204]
$*_6$: $AA^T = I_n$, per Voraussetzung

Damit ist $\sqrt{n}$ eine obere Schranke von $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ und es gilt mit Hilfe des Satzes von Heine-Borel, dass $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ kompakt in $(\mathbb{R}^{n,n}, \|\cdot\|_{\mathrm{F}})$ ist.

□

Lösung 2. Aufgabe:

(a) Wir wählen den metrischen Raum $([0,1], |\cdot|)$, wobei $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Der Raum $([0,1], |\cdot|)$ ist kompakt, da er abgeschlossen und beschränkt, sowie Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist (siehe Satz 1.67 [Meh22, S. 248]). Dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= (A_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}, \text{ mit} \\ A_n &:= \left]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right[\cup \partial A_n \text{ wobei} \\ \partial A_n &= \begin{cases} \{\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\}, & \text{falls } n \in \mathbb{N} \text{ endlich} \\ \{0,1\}, & \text{falls } n \text{ unendlich} \end{cases}\end{aligned}$$

eine abgeschlossene Überdeckung von $[0,1]$, denn

- $[0,1] \subseteq \mathcal{A}$ gilt, sowie
- A_n, als Vereinigung einer offenen Menge mit ihrem Rand, ist abgeschlossen (siehe Korollar 1.24 3) [Meh22, S. 228]).

Wie in der Vorlesung gezeigt gilt aber für ein endliches $E \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass ein $m := \max E$ existiert. Dann gilt aber

$$]0,1[\not\subseteq \left]\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}\right[,$$

da es stets ein Element $\frac{1}{m+1} \not\in \left]\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right[$ aber mit $\frac{1}{m+1} \in]0,1[$ gibt. In der Folge gilt also

$$[0,1] =]0,1[\cup \{0,1\} \not\subseteq \left]\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right[\cup \left\{\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{m}\right\} \subseteq \mathcal{A}.$$

und damit hat $\mathcal{A}$ keine endliche Teilüberdeckung.

(b) Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit der Eigenschaft, dass $\bigcap\limits_{j\in J} A_j \neq \emptyset$ für alle nicht-leeren, endlichen $J \subseteq I$ gilt.

Angenommen es gilt auch $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Wir wählen zu jedem $I' \subseteq I$ ein $a_{I'} \in \bigcap\limits_{i\in I'} A_i$. Dann ist $(a_{I'})_{I'\subseteq I}$ eine Cauchy-Folge in X, denn sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein endliches $E_\varepsilon \subseteq I$ mit

$$\operatorname{diam}(\bigcap_{i\in E_\varepsilon} A_i) < \varepsilon.$$

Dann gilt aber für alle $I \supseteq E_\varepsilon, J \supseteq E_\varepsilon$, dass

$$d(a_I, a_J) \leq \operatorname{diam}(\bigcap_{i\in E_\varepsilon} A_i) < \varepsilon,$$

da $a_I, a_J \subseteq \bigcap\limits_{i\in E_\varepsilon} A_i$ wegen $\bigcap\limits_{i\in I} A_i, \bigcap\limits_{j\in J} A_j \subseteq \bigcap\limits_{i\in E_\varepsilon} A_i$ gilt.

Falls die Cauchy-Folge konvergent ist, so muss auch ihr Grenzwert wieder in $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ liegen (siehe Satz 1.34 [Meh22, S. 232]), da alle A_i per Voraussetzung abgeschlossen sind und ein beliebiger Schnitt abgeschlossener Mengen ebenso abgeschlossen sein muss (siehe Korollar 1.18 1) [Meh22, S. 226]).
Da dies nun für alle Familien $\mathcal{A}$ in X gilt, also auch insbesondere für $A_{i_0} := X$ (die Grundmenge ist stets abgeschlossen in sich selbst), so muss also für jede Folge die in X konvergiert auch ihr Grenzwert wieder in X liegen. Damit ist (X, d) folgenkompakt (siehe Satz 1.72 [Meh22, S. 250]) und wie auf S. 251 [Meh22]) angemerkt, im Fall des metrischen Raums, ist (X, d) dann auch kompakt.

Angenommen (X, d) ist kompakt. Dann wissen wir mit Korollar 1.73 [Meh22, S. 251], dass X vollständig ist. D.h. die oben definierte Cauchy-Folge $a_{I'}$ hat einen Grenzwert und da der beliebige Schnitt abgeschlossener Mengen ebenso abgeschlossen sein muss (siehe Korollar 1.18 1) [Meh22, S. 226]) liegt dieser nun in $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Damit gilt also $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.

$\square$

Lösung 3. Aufgabe:

Angenommen $x^*, \tilde{x}^* \in X$ seien Fixpunkte von f. Dann gelten per Definition

$$f(x^*) = x^*, \qquad f(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*.$$

D.h. aber es muss auch gelten

$$d(x^*, \tilde{x}^*) \overset{\text{Fixp.}}{=} d(f(x^*), f(\tilde{x}^*)) \overset{\text{Vor.}}{<} d(x^*, \tilde{x}^*).$$

Dies führt uns also zu einem Widerspruch und daher muss der Fixpunkt eindeutig sein.

Sei $x_0 \in X$ beliebig und (x_n) rekursiv definiert durch $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) < d(x_{n-1}, x_n).$$

Per Induktion erhalten wir also, dass $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_0, x_1)$ gilt.
Da (X, d) kompakt ist, ist er auch folgenkompakt (siehe S. 251 [Meh22])). D.h. jede Folge in X hat eine in X konvergente Teilfolge, also mindestens einen Häufungspunkt (siehe Satz 1.72 [Meh22, S. 250]). D.h. der Grenzwert

$$x^* := \lim_{n\to\infty} x_n \in X \tag{4}$$

existiert.

Nun zeigen wir noch, dass x^* ein Fixpunkt ist.
Für unsere definierte Folge wissen wir bereits, dass wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. für alle $n \geq N$ gilt $x_{n+1} = x_n$, dann ist x_n ein Fixpunkt. Angenommen es gibt *kein* $N \in \mathbb{N}$, s.d. für alle $n \geq N$ gilt $x_{n+1} = x_n$. Dann gilt mit der Definition unserer rekursiven Folge für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} \neq x_n. \tag{5}$$

Betrachten wir zwei Teilfolgen von x_n mit

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \text{ und}$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_{k+1}} = x'.$$

Im Fall, dass $x = x'$ gilt, ist x ein Fixpunkt. Betrachten wir also den Fall, dass $x \neq x'$ gilt.
Per Voraussetzung gilt

$$d(f(x), f(x')) < d(x, x'). \tag{6}$$

Dann definieren wir

$$\lambda := \frac{d(f(x), f(x'))}{d(x, x')} \overset{(6)}{<} 1$$

Nach Satz 1.44 [Meh22, S. 237] ist f nun genau dann stetig wenn für alle $a \in X$ gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$d(f(x), f(a)) < d(x, a) < \varepsilon$$

D.h. f ist stetig.

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt für ein $\lambda_1 \in (\lambda, 1)$, $d(f(y^{'}), f(y)) \leq \lambda_1 d(y^{'}, y)$ für $y^{'}$ nahe $x^{'}$ und y nahe x.
Sei $d_n = d(x_{n+1}, x_n)$. Dann ist $d_{n+1} < d_n$ für alle n und $d_{n_{k+1}} \leq \lambda_1 d_{n_k}$ unendlich oft. Also $d_n \to 0$, was ein Widerspruch ist. $\square$

Lösung 4. Aufgabe:

Wir zeigen zunächst, dass f^{-1} auch stetig ist.
Da $f : X \to Y$ eine bijektive und stetige Funktion ist, existiert f^{-1}.

Sei $X^{'}$ eine abgeschlossen Menge in X. Da X eine kompakte Menge und $X^{'}$ eine abgeschlossenes Teilmenge ist, ist $X^{'}$ eine kompakte Menge (siehe Satz 1.64 [Meh22, S. 246]).
Da das Bild einer stetigen Abbildung einer kompakten Menge erneut eine kompakte Menge ist, ist $f(X^{'})$ eine kompakte Menge (siehe Satz 1.69, [Meh22, S. 248]). Daraus folgt zudem, dass $f(X^{'})$ abgeschlossen ist (siehe Satz 1.67, [Meh22, S. 248]). Wir können als festhalten, dass das Bild $f(X^{'})$ einer stetigen Abbildung von jeder abgeschlossenen Menge $X^{'}$ in X eine abgeschlossene Menge ist.

Wir können also ableiten, dass das Urbild von $f^{-1}(X)$ abgeschlossen ist. Damit ist f^{-1} stetig, denn für stetige Funktionen auf metrischen Räumen gilt, f ist genau dann stetig wenn das Urbild abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist (siehe Satz 1.45, [Meh22, S. 238]).

Nun zeigen wir, dass $B = \{f \in \mathbb{C}([0, 1]) : ||f||_\infty \leq 1\}$ nicht kompakt ist.

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$. Dann gilt für den Grenzwert der Folge

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Funktion f_n ein Polynom ist, ist sie stetig. Dann gilt $f_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wenn B kompakt wäre, dann hätte jede Folge in B eine konvergente Teilfolge (konvergent bezüglich d), deren Grenzwert in B liegt. Die Folge $f_n(x)$ hat jedoch keine solche Teilfolge, da die Supremumsnorm d der punktweise Grenzwert sein müsste, (Der Liste Funktionen konvergiert über die gesamte Domäne) der nicht stetig ist. Also ist B keine kompakte Menge.

$\square$

Literatur

[LM21] Jörg Liesen und Volker Mehrmann. *Lineare Algebra*. Springer, 2021.

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung*. 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

4. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

Sei A kompakt. Da A kompakt ist, existiert für jede offene Überdeckung eine endl. Teilüberdeckung $Y \supseteq A$ (siehe Definition 1.59 [Meh22, S. 243]). D.h. es existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge s.d. gilt

$$A \subseteq Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} U_\varepsilon(y)$$

Damit ist A per Definition total beschränkt. Mit Satz 1.62 [Meh22, S. 245] ist jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums abgeschlossen. Also ist A abgeschlossen und total beschränkt.

Sei A abgeschlossen und total beschränkt. Mit Satz 1.34 [Meh22, S. 232] wissen wir, da A abgeschlossen ist, ist A auch folgenabgeschlossen. D.h. es gilt für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

$$a \in A.$$

Außerdem wissen wir mit Satz 1.39 [Meh22, S. 234], dass A vollständig bezüglich der Spurmetrik ist. D.h. alle Cauchy-Folgen in A konvergieren in (A, d_A).
Hat A eine Cauchy-Folge so wissen wir also, dass jede Umgebung um deren Grenzwert unendlich viele Folgenglieder enthalten muss. Angenommen dies gilt nicht, dann muss gelten, dass es für jedes $a \in A$ ein offenes $U_a \subseteq X$ mit $a \in U_a$ gibt, s.d. $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_a\}$ endlich ist.
Dann gilt aber

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a,$$

d.h. $(U_a)_{a \in A}$ ist eine offenen Überdeckung von A und wegen der Totalbeschränktheit von A existiert diese Menge und ist endlich. Wir können also schreiben

$$A \subseteq \bigcup_{a \in Y} U_a,$$

mit $Y \subseteq X$ endlich.
Dann erhalten wir allerdings durch

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in \bigcup_{a \in Y} U_a\} = \bigcup_{a \in Y} \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_a\}$$

einen Widerspruch, da eine unendliche Menge ($\mathbb{N}$) nicht Teilmenge einer endlichen Menge ($\bigcup_{a \in Y} \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_a\}$, als endliche Vereinigung endlicher Mengen) sein kann.
Also gibt es $a \in A$, s.d. in jeder offenen Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.
Wir können nun für die (beliebig gewählte) Folge a_n eine gegen a konvergente Teilfolge konstruieren. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und zu jedem $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$, wobei $n_k > n_k - 1$. Dann ist

$$a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a),$$

weil jede Epsilon-Umgebung um a unendlich viele Folgenglieder enthält, also auch $U_{\frac{1}{k}}$. Betrachten wir nun den Grenzwert der Teilfolge so erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \lim_{k \to \infty} U_{\frac{1}{k}}(a) = a.$$

Damit besitzt jede Folge in A eine konvergente Teilfolge und damit ist A kompakt (siehe Hinweis). $\square$

Lösung 2. Aufgabe:

Sei $\alpha < 0$. Wir zeigen nun, dass wir die Menge H_α in zwei nicht-triviale Teilmengen unterteilen können. Seien

$$U := \{u := (x_u, y_u, z_u) \in \mathbb{R}^3 \mid z_u > 0 \text{ und } x_u^2 + y_u^2 - z_u^2 < 0\} \text{ und}$$
$$V := \{v := (x_v, y_v, z_v) \in \mathbb{R}^3 \mid z_v < 0 \text{ und } x_v^2 + y_v^2 - z_v^2 < 0\}$$

zwei Teilmengen von H_α. Wir sehen schnell, dass die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$ keine Elemente enthält, da aus

$$x^2 + y^2 - z^2 < 0 \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 < 0$$

folgt, dass die Menge leer sein muss. D.h. dann aber, dass gilt

$$U \cup V = H_\alpha.$$

Außerdem stellen wir fest, dass $U, V \neq \emptyset$, da wir mindestens ein Element finden können, dass in ihnen liegt. Betrachten wir zum Beispiel

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

dann ist $p \in V$ für $z > 0$ und $p \in U$ für $z < 0$, da

$$\begin{aligned} &x_p^2 + y_p^2 - z_p^2 \\ &= -z_p^2 < 0 \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$.
Die beiden Mengen U und V sind ihr Komplement, also es gilt

$$\begin{aligned} U^C &= H_\alpha \setminus U = V \text{ und} \\ V^C &= H_\alpha \setminus V = U. \end{aligned}$$

Wir wissen außerdem, dass $\{v := (x_v, y_v, z_v) \in \mathbb{R}^3 \mid z_v \leq 0\}$ und $\{u := (x_u, y_u, z_u) \in \mathbb{R}^3 \mid z_u \geq 0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind. Da, wie oben gezeigt, H_α keine Element mit Eintrag $z = 0$ enthält, können wir nun also diese Mengen mit H_α schneiden und erhalten U und V:

$$\begin{aligned} \{v := (x_v, y_v, z_v) \in \mathbb{R}^3 \mid z_v \leq 0\} \cap H_\alpha = V \\ \{u := (x_u, y_u, z_u) \in \mathbb{R}^3 \mid z_u \geq 0\} \cap H_\alpha = U. \end{aligned}$$

Wir wissen dann mit Korollar 1.28 [Meh22, S. 230]), dass diese Schnitte, also U und V, abgeschlossen in H_α sind. Da ihre Komplemente abgeschlossen sind, sind also beide Mengen auch offen.
Damit sind also U und V zwei nicht-leere, disjunkte, offene Teilmengen in die wir H_α zerlegen können. Dann ist H_α nicht zusammenhängend.

Die gleiche Argumentation ist nun für $\alpha = 0$ nicht mehr möglich, da wir die Menge nicht ohne Weiteres in zwei disjunkte Teilmengen unterteilen können. Daher zeigen wir nun, dass H_α zusammenhängend für $\alpha = 0$ und $\alpha > 0$ ist.
Sei also $\alpha \geq 0$. Wir zeigen, dass

$$p_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein Sternpunkt von H_α ist, also dass $[s, p_0] \subseteq H_\alpha$ für alle $s \in H_\alpha$ gilt, wobei

$$[s, p_0] = \{ts + (1-t)p_0 : t \in [0,1]\}.$$

Sei $s \in H_\alpha$ beliebig, also

$$s := \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \in H_\alpha.$$

Da s in H_α liegt, wissen wir das gilt

$$x_s^2 + y_s^2 - z_s^2 = \alpha \geq 0. \tag{1}$$

Setzen wir die Werte für p_0 in die Menge $[s, p_0]$ ein, so erhalten wir

$$[s, p_0] = \{ts + (1-t)p_0 : t \in [0,1]\}$$

$$= \{ts : t \in [0,1]\}, \tag{2}$$

da p_0 in allen Einträgen 0 ist.
Mit Gleichung 1 und Gleichung 2 liegt $[s, p_0] = ts$ für $t \in [0,1]$ nun in H_α denn es gilt

$$(tx_s)^2 + (ty_s)^2 - (tz_s)^2 = \underbrace{t^2}_{\geq 0,\text{ da } t \in [0,1]} \underbrace{(x_s^2 + y_s^2 - z_s^2)}_{\geq 0,\text{ da } s \in H_\alpha} \geq 0.$$

Da s beliebig gewählt war ist p_0 also ein Sternpunkt von H_α. Mit Aufgabe 3 des vierten Tutoriumsblattes ist H_α dann (weg-)zusammenhängend.

$\square$

Lösung 3. Aufgabe:

Sei (X, d) zusammenhängend. Angenommen $\partial A = \emptyset$. Wir wissen dann mit Korollar 1.24 1) [Meh22, S. 228], dass gilt

$$\emptyset = \partial A = \bar{A} \setminus A^\circ.$$

Daraus folgt dann gleich

$$\bar{A} = A^\circ.$$

Da aber mit Bemerkung 1.21 1) [Meh22, S. 227] gilt $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$ folgt

$$A^\circ = \bar{A} \subseteq A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A^\circ = A = \bar{A}.$$

Mit Bemerkung 1.21 4) und 5) [Meh22, S. 227] ist A dann offen und abgeschlossen. Laut Bemerkung 1.77 [Meh22, S. 253] ist X dann nicht zusammenhängend, da A eine nicht-triviale Teilmenge in X ist, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Dies widerspricht aber unsere Voraussetzung, also muss gelten $\partial A \neq \emptyset$.

Sei $\partial A \neq \emptyset$ für jede nicht-triviale Teilmenge A in X. Dann erhalten wir mit Negation der Bemerkung 1.77 [Meh22, S. 252] für alle nicht-trivialen Teilmengen $A \subset X$

$$A \text{ ist nicht abgeschlossen} \qquad \text{oder} \qquad A \text{ ist nicht offen.}$$

D.h. eine nicht-triviale Teilmenge von X kann nicht gleichzeitig offen und abgeschlossen sein.
Ist A abgeschlossen, so besteht A nicht nur aus inneren Punkten, denn $A \supseteq \partial A \neq \emptyset$. Und damit ist A, da es zudem nicht-trivial ist, nicht offen. Ist A allerdings offen, so ist $A^C = X \setminus A$ abgeschlossen. Da A^C aber auch eine nicht-triviale Teilmenge in X ist, kann sie damit nicht gleichzeitig offen sein, also ihr Komplement A nicht abgeschlossen sein. Wir sehen also, dass keine nicht-triviale Teilmenge in X sowohl offen als auch abgeschlossen zugleich sein kann. Wie oben angemerkt ist X also zusammenhängend.

$\square$

Lösung 4. Aufgabe:

Sei f stetig. Wir wissen mit Satz 1.45 [Meh22, S. 238], dass das Urbild einer abgeschlossenen Menge von f wieder abgeschlossen ist. Es ist leicht zu sehen, dass $\{0\} \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ abgeschlossen ist, also muss auch $f^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen sein. Wir halten also fest es gilt

$$\begin{aligned}&\mathrm{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}),\\ &\{0\} \text{ abgeschlossen in } \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Kern}(f) \text{ abgeschlossen in } V,\end{aligned}$$

da f stetig ist.

Zeige: Kern(f) abgeschlossen, f: V $\to \mathbb{R}$ linear $\Rightarrow$ f stetig:

1. Wenn $Kern(f) = V$, f(V)=0 ist null funktionsfähig, was bedeutet, dass f(V) eine konstante Funktion auf dem globalen Bereich ist, in dem f(V)=0. Dass f(V) offensichtlich stetig ist.

2. Wenn $Kern(f) \neq V$.
 Sei $e \in V \backslash Kern(f), \forall x \in V$ **kann eindeutig in** $x = \lambda e - z$ **zerlegt werden**. **s.d.** $\lambda \in \mathbb{R}, z \in Kern(f)$. (Jeder Vektor kann als Linearkombination zweier nichtlinear verwandter Basisvektoren dargestellt werden.Zum einen gehört $z \in Kern(f)$ und $e \in V \backslash Kern(f)$, also sind die beiden Vektoren offensichtlich nicht linear verwandt.Wenn $f(z) = 0$, Wenn $z \in Kern(f)$ gehört, gehört jedes Vielfache auch $z \in Kern(f)$, also ist $\lambda e - z$ äquivalent zu jeder linearen Kombination von zwei Basisvektoren.)

 Wir wählen C, so dass

$$\begin{aligned}
C &= \sup_{x \in V \backslash Kern(f)} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup\{\frac{|f(\lambda e - z)|}{||\lambda e - z||} : \lambda \neq 0, z \in Kern(f)\}\\
&= \sup\{\frac{|f(\lambda e) - f(z)|}{||\lambda e - z||} : \lambda \neq 0, z \in Kern(f)\} = \sup\{\frac{|\lambda| \cdot |f(e)|}{|\lambda| \cdot ||e - \frac{z}{\lambda}||} : \lambda \neq 0, z \in Kern(f)\}\\
&= \sup\{\frac{|f(e)|}{||e - z||} : z \in Kern(f)\}(\frac{z}{\lambda} \textbf{ ist immer noch in Menge Kern(f) weil } f(\frac{z}{\lambda}) = 0)\\
&= \frac{|f(e)|}{d(e, Kern(f))}
\end{aligned}$$

 d ist der Abstand von e zur Menge $Kern(f)$, d. Das heißt, der minimale Abstand von d zu irgendeinem Punkt in $Kern(f)$ macht $d(e, Kern(f))$ zum kleinsten

 Weil Kern(f) eine abgeschlossene Menge ist und $e \notin Kern(f)$, **also d ist eine Konstante größer als Null dass** $d(e, Kern(f)) > 0$, :

wenn $d(e, Kern(f))$=0: Mindestens ein Punkt, der nicht in einer abgeschlossenen Menge enthalten ist, hat einen Nullabstand zur Menge, was bedeutet, dass ein Grenzpunkt der Menge nicht in der Menge vorhanden ist, was der Eigenschaften einer geschlossenen Menge widerspricht. Also ist $d(e, Kern(f))$ eine Konstante größer als 0.

dass $C = \frac{|f(e)|}{d(e,Kern(f))} < \infty$. Dann ist f stetig. (Satz 1.89 5) [Meh22, S. 257])

$\square$

Literatur

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung*. 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

5. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

a) Wir wissen, dass mit Definition Definition 2.1 [Meh22, S. 265 gilt]

$$\partial_v f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

mit $h \in \mathbb{R}$. Setzen wir nun $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, sein direction $v = (v_1, v_2)$ so gilt

$$\begin{aligned}
\partial_v f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3 v_1^3}{h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2} - 0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 v_1^3}{h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2} \\
&= \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2}
\end{aligned}$$

Das Richtungsdifferential des (0,0) Punktes ist das gewünschte

b) Wir wissen, dass mit Definition Definition 2.3 [Meh22, S. 265 gilt]

$$f(0+m) = f(0) + L(0) + R(0+m)$$

R(0+m)=R(m) ist eine infinitesimale Größe über v, dass gilt

$$\text{Sei } v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to 0} \left|\frac{R(m)}{||m||}\right| &= \lim_{h\to 0} \left|\frac{R(hv)}{||hv||}\right| \\
&= \lim \left|\frac{f(hv) - f(0) - L(0)}{||hv||}\right| \\
&= \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{||hv||} - \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot L(0)}{|h| \cdot ||v||}\right|
\end{aligned}$$

$$= 0$$

Wenn $h > 0$, dann gilt, $\lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{||hv||} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{hv}, \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot L(0)}{|h| \cdot ||v||} = \lim_{h\to 0} \frac{L(0)}{||v||}$
Wenn $h < 0$, dann gilt, $\lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{||hv||} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{hv}, \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot L(0)}{|h| \cdot ||v||} = -\lim_{h\to 0} \frac{L(0)}{||v||}$

Also,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{hv} = \lim_{h\to 0} \frac{L(0)}{||v||}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{hv} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{h} \cdot \frac{1}{v} = \lim_{h\to 0} \frac{L(0)}{||v||} = \frac{L(0)}{||v||} = \partial_v f(0) \cdot \frac{1}{v}$$

Und weil das Richtungsdifferential $\partial_v f(0)$ nicht zu verschiedenen Zeiten den Wert von v annehmen kann,$L(0) = \partial_v f(0) \cdot \frac{||v||}{v}$ es gibt keine spezifische Funktion für (0,0), dann L(v) nicht existiert.

$\square$

Lösung 2. Aufgabe:

a) Wir wissen, dass mit Definition 2.1 [Meh22, S. 265 gilt]

$$\partial_v f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

mit $h \in \mathbb{R}$. Setzen wir nun $a = 0 \in \mathcal{V}$, sein direction $v \in \mathcal{V}$ so gilt

$$\begin{aligned} \partial_v f(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{||0 + hv|| - ||0||}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{||hv||}{h} \end{aligned}$$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{||hv||}{h} = ||v||$
$\lim_{h\to 0^-} \frac{||hv||}{h} = -||v||$

Daher existiert die Richtungsableitung nicht, damit nicht differenzierbar.

b) Wir wissen, dass mit Definition 2.1 [Meh22, S. 265 gilt]

$$\partial_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

mit $h \in \mathbb{R}$. Setzen wir nun $a = 0 \in \mathcal{V}$, sein direction $v \in \mathcal{V}$ so gilt

$$\begin{aligned}\partial_v f(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{||0 + hv||(0 + hv) - ||0||0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{||hv||(hv) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} ||hv||v \\ &= 0\end{aligned}$$

dass mit Bemerkung 2.5 [Meh22, S. 267 gilt], $L(v) = \partial_v f(0) = 0 \Rightarrow L = 0$. Dann differenzierbar ist.

□

Lösung 3. Aufgabe:

Wenn Sie die Definition der Determinante (Summe über die Permutation) verwenden, erhalten Sie:
$\det(I + tH) = 1 + t \text{ spur } (H) + o(t)$

a) Wir verwenden direkt die Definition der Richtungsableitung aus der Vorlesung und erhalten dann($o(h)$ ist eine infinitesimale Größe über h)

$$\begin{aligned}\partial_A \det(I_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{\det(I_n + hA) - \det(I_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h \text{ spur } (A) + o(h) - \det(I_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \text{ spur } (A)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} \\ &= \text{ spur } (A).\end{aligned}$$

b) Wir verwenden direkt die Definition der Richtungsableitung aus der Vorlesung und erhalten dann

$$\begin{aligned}\partial_A \det(B) &= \lim_{h \to 0} \frac{\det(B + hA) - \det(B)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\det(B(I_n + hB^{-1}A)) - \det(B)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\det(B) \det(I_n + hB^{-1}A) - \det(B)}{h}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{\det(B)(1 + h \text{ spur } (B^{-1}A) + o(h)) - \det(B)}{h} \\
&= \det(B) \lim_{h\to 0} \frac{1 + h \text{ spur } (B^{-1}A) + o(h) - 1}{h} \\
&= \det(B) \text{ spur } (B^{-1}A).
\end{aligned}
$$

□

Lösung 4. Aufgabe:

Angenommen $v \neq 0$ per Definition haben wir

$$
\begin{aligned}
f(v) - f(tv) =& (1 - t^k) f(v) \\
=& (1 - t) f(v) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \\
=& (1 - t) k f(v) + (1 - t) f(v) \sum_{i=0}^{k-1} t^i - (1 - t) k f(v) \\
=& (1 - t) k f(v) + (1 - t) f(v) \left[(\sum_{i=0}^{k-1} t^i) - k \right]
\end{aligned} \tag{1}
$$

Somit,

$$
L \cdot (v - tv) = L \cdot v \cdot (1 - t) = (1 - t) k f(v) \Rightarrow L \cdot v = k f(v), \qquad R(v) = (1 - t) f(v) \left[(\sum_{i=0}^{k-1} t^i) - k \right], \tag{2}
$$

und wir haben

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 1} \frac{|R(v)|}{|v - tv|} =& \lim_{t\to 1} \frac{|v| \cdot |(1 - t) f(v)|}{|v| \cdot |v - tv|} \left[(\sum_{i=0}^{k-1} t^i) - k \right] \\
=& \lim_{t\to 1} \frac{|v - tv| \cdot |f(v)|}{|v - tv| \cdot |v|} \left[(\sum_{i=0}^{k-1} t^i) - k \right] \\
=& \frac{f(v)}{v} \lim_{t\to 1} \left[(\sum_{i=0}^{k-1} t^i) - k \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Daher können wir für alle $v \neq 0$ sehen, dass $Df(v)v = kf(v)$ ist, und für $v = 0$ ist es so trivial □

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

6. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

a) Wir bestimmen die partiellen Ableitungen in den Komponenten $f_1 := \sin(xy) + y$ und $f_2 := e^{x+y+z}$ von f. Es gilt

$$\partial_x f_1(x,y,z) = \cos(xy)y, \quad \partial_y f_1(x,y,z) = \cos(xy)x + 1, \quad \partial_z f_1(x,y,z) = 0,$$
$$\partial_x f_2(x,y,z) = e^{x+y+z}, \quad \partial_y f_2(x,y,z) = e^{x+y+z}, \quad \partial_z f_2(x,y,z) = e^{x+y+z}.$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar (siehe Satz 2.24 [Meh22, S. 280]) mit Jacobi-Matrix

$$\left[Df(x,y,z)\right] = \begin{bmatrix} \cos(xy)y & \cos(xy)x + 1 & 0 \\ e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \end{bmatrix}$$

b) Wir bestimmen die partiellen Ableitungen von g. Es gilt

$$\partial_x g(x,y) = \cos(x+y^2) - x\sin(x+y^2), \qquad \partial_y g(x,y) = -2xy\sin(x+y^2).$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar (siehe Satz 2.24 [Meh22, S. 280]) mit Jacobi-Matrix

$$\left[Dg(x,y)\right] = \begin{bmatrix} \cos(x+y^2) - x\sin(x+y^2) & -2xy\sin(x+y^2) \end{bmatrix}$$

c) Wir bestimmen die partiellen Ableitungen in den Komponenten $h_1 := xy + y^4$, $h_2 := \ln(1+y^2)$ und $h_3 := \sin(x)y$ von h. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x h_1(x,y) &= y, & \partial_y h_1(x,y) &= x + 4y^3, \\ \partial_x h_2(x,y) &= 0, & \partial_y h_2(x,y) &= \frac{2y}{1+y^2}, \\ \partial_x h_3(x,y) &= \cos(x)y, & \partial_y h_3(x,y) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f stetig differenzierbar (siehe Satz 2.24 [Meh22, S. 280]) mit Jacobi-Matrix

$$\left[Df(x,y,z)\right] = \begin{bmatrix} y & x + 4y^3 \\ 0 & \frac{2y}{1+y^2} \\ \cos(x)y & \sin(x) \end{bmatrix}$$

$\square$

Lösung 2. Aufgabe:

Laut Definition 2.13 [Meh22, S. 273] sollte das L(x,y) so aussehen:

$$L(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0 \cdot x + g(0)y = g(0)y$$

Also dass

$$R(x,y) := f(x,y) - f(0,0) - L(x,y) = yg(x) - 0 - g(0)y = y(g(x) - g(0)).$$

Also müssen wir zeigen, dass dies erfüllt, was es sollte, das heißt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|R(x,y)|}{||(x,y)||_2} = 0.$$

Um dies zu tun, fixiere jedes $\epsilon > 0$ und sei $\delta > 0$(durch Stetigkeit von g bei 0), so dass $|g(x) - g(0)| \leq \epsilon$, wenn $|x| \leq \delta$.
Dann erhalten wir für jedes (x,y) mit $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$, dass $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ und damit:

$$\frac{|R(x,y)|}{||(x,y)||_2} = \frac{|y| \cdot |g(x) - g(0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \epsilon \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \epsilon$$

Die letzte Ungleichung als $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|R(x,y)|}{||(x,y)||_2} = 0$. und damit, dass f bei (0,0) differenzierbar ist.

$\square$

Lösung 3. Aufgabe:

Mit der Kettenregel (siehe Satz 2.10 [Meh22, S. 271]) wissen wir bereits, dass gilt

$$Df(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = D(f \circ \gamma)(t).$$

Wir können nun wie in Analysis I die Stammfunktion als die Funktion bestimmen, deren Ableitung unsere vorliegenden Funktion ist (siehe Satz 7.27 [Meh22, S. 180]). Also gilt

$$F(x) = \int\limits_0^1 Df(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_0^1 D(f \circ \gamma)(t) dt \\
&= \int\limits_0^1 \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial t} dt
\end{aligned}
$$

wobei

$$DF(x) == \int\limits_0^1 \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial t} dt$$

Mit Satz 7.27 3) [Meh22, S. 180] gilt dann für diese Stammfunktion, Integralsatz für zusammengesetzte Funktionen einer Variablen

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^1 Df(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) dt &= \int\limits_0^1 \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial t} dt \\
&= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))
\end{aligned}
$$

$\square$

Lösung 4. Aufgabe:

Nach Definition 2.03 [Meh22, S. 266] ist f genau dann differenzierbar in A wenn es eine Zerlegung der Art

$$f(A+V) = f(A) + Df(A)(V) + R(A+V) \text{ mit } \lim_{V \to 0} \frac{R(A+V)}{||V||} = 0$$

gibt. Dann ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f(A+V) &= (A+V)^3 \\
&= (A+V)(A+V)(A+V) \\
&= (AA + AV + VA + VV)(A+V) \\
&= AAA + AAV + AVA + AVV + VAA + VAV + VVA + VVV \\
&= \underbrace{A^3}_{=f(A)} + \underbrace{A^2V}_{Df(A)(V)} + \underbrace{AVA + AV^2 + VA^2 + VAV + V^2A + V^3}_{R(A+V)},
\end{aligned}
$$

und damit für das Restglied

$$
\begin{aligned}
\lim_{V \to 0} \frac{R(A+V)}{||V||} &= \lim_{V \to 0} \frac{AVA + AV^2 + VA^2 + VAV + V^2A + V^3}{||V||} \\
&= \frac{0}{\lim\limits_{V \to 0} ||V||}
\end{aligned}
$$

$$= 0.$$

Da A beliebig gewählt war ist also f in allen A differenzierbar und für die Ableitung gilt

$$Df(A) = A^2.$$

□

Literatur

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung.* 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

7. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

Es ist zunächst leicht ersichtlich, dass U die 1-Umgebung um 0 ist, also können wir schreiben

$$U_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - 0|| < 1\} = U.$$

Damit ist U offensichtlich offen. Wir haben für $n = 4$ bereits in der Tutoriumsaufgabe 4.2 (a) gezeigt, dass diese Menge zusammenhängend ist. Dies lässt sich leicht verallgemeinern, da, angelehnt an die Argumentation in den Lösungen, stets die Strecke $tu + (1-t)v$ für $u, v \in U$ wieder in U liegt (Mit $||u|| < 1, ||v|| < 1$ folgt $||tu + (1-t)v|| < 1$).
Da ebenfalls aus der Vorlesung klar ist, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ endlich-dimensionale Banachräume sind und f differenzierbar ist, gilt mit dem Schrankensatz (vgl. Satz 2.32 [Meh22, S. 286])

$$||f(b) - f(a)|| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} ||Df(x)|| \cdot ||b - a||$$

für alle $a, b \in U$ (da durch den Zusammenhang der Menge U jede Verbindungsstrecke $\overline{ab}$ in U enthalten ist).
Da f differenzierbar mit glm. beschränkter Ableitung ist, gibt es ein $M > 0$, s.d. $||Df(x)|| \leq M$ für alle $x \in U$. Damit können wir nun die vorherige Aussage weiter abschätzen. Also gilt

$$||f(b) - f(a)|| \leq \sup_{x \in \overline{ab}} ||Df(x)|| \cdot ||b - a|| \leq M \cdot ||b - a||.$$

Da für die Standardmetrik p. Def. die Dreiecksungleichung gilt erhalten wir nun eine weitere Abschätzung.

$$||f(b) - f(a)|| \leq M \cdot ||b - a|| \leq M \cdot (||b|| + || - a||) = M \cdot (||b|| + |-1| \cdot ||a||)$$

Mit unserer Voraussetzung $||a|| < 1, ||b|| < 1$, da $a, b \in U$ gilt also

$$||f(b) - f(a)|| \leq M \cdot (||b|| + ||a||) < 2M.$$

Da a, b beliebig in U gewählt sind gibt es also ein $M' := 2M$, so dass

$$\operatorname{diam}(f(U)) := \sup\{||f(b) - f(a)|| \mid f(a), f(b) \in f(U)\} \leq M' \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $\operatorname{diam}(f(U)) < \infty$ und $f(U)$ mit Definition 1.6. 2) [Meh22, S. 221] beschränkt.

□

Lösung 2. Aufgabe:

Wir bestimmen zunächst die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}u$ und $\frac{\partial}{\partial y}u$. Es gilt (mit Ketten- und Quotientenregel)

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\partial_y u(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Ableitungen folgt also (wieder mit Ketten- und Quotientenregel)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x \partial x} u(x,y) &= \frac{(x^2+y^2) - (x \cdot 2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial y \partial x} u(x,y) &= \frac{-x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial x \partial y} u(x,y) &= \frac{-y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial}{\partial y \partial y} u(x,y) &= \frac{(x^2+y^2) - (y \cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Also können wir die Hesse Matrix für u angeben als

$$H_u = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{bmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{bmatrix}.$$

□

Lösung 3. Aufgabe:

Nach Differenzierbarkeitssatz mit mehreren Variablen, Wenn alle 2 partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existieren und über einer offenen konvexen Menge K stetig sind, dann ist f(x,y) nach obigem Satz über K differenzierbar.(Satz 2.24, [Meh22, S. 280])

Nun ist für beliebige zwei Punkte $\vec{v_1} = (x_1, y_1), \vec{v_2} = (x_2, y_2) \in K$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ so dass:

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

die Strecke zwischen v_1 und $v_2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$t \in [0,1] \rightarrowtail (x, y) = \vec{v}(t) = \vec{v_1} + (\vec{v_2} - \vec{v_1})t$$

liegt vollständig in K. Betrachten Sie die folgenden zwei Funktionen, die auf [0,1] definiert sind:

$$\begin{cases} F(t) = f(\vec{v}(t)) \\ g(t) = \dfrac{\partial f(\vec{v}(t))}{\partial x} = \dfrac{\partial f(\vec{v}(t))}{\partial y} \end{cases}$$

Da f über K differenzierbar ist, können wir die Ableitung von F durch partielle Ableitungen von f und damit in g ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= (x_2 - x_1)\frac{\partial f(\vec{v}(t))}{\partial x} + (y_2 - y_1)\frac{\partial f(\vec{v}(t))}{\partial y} \\ &= ((x_2 + y_2) - (x_1 + y_1))g(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus können wir schließen:

$$F(0) = F(1) \iff f(\vec{v_1}) = f(\vec{v_2})$$

i.e. $f(v_{\rightarrow})$ ist konstant auf dem Schnittpunkt von K mit den Ebenen x+y konstant. Wenn K das ganze $\mathbb{R}^2$ ist, dann

$$f(x, y) = f(x + y, 0)$$

und die Aussage folgt sofort. □

Lösung 4. Aufgabe:

Wir wissen bereits aus Übung 9 (bzw. der Besprechung der Hausaufgabe 6), dass gilt

$$Df(X)(A) = AX^2 + XAX + X^2A.$$

Wir bezeichnen nun die Komponenten von f mit

$$g_1(X) = X^2,$$

$$
\begin{aligned}
g_2(X) &= XAX \text{ und} \\
g_3(X) &= X.
\end{aligned}
$$

Da g_3 linear ist, ist die Ableitung erneut g_3. Schreiben wir g_1 nun als Komposition benötigen wir noch die beiden Funktionen

$$
\begin{aligned}
h_1 &: \mathbb{R}^{n,n} \to (\mathbb{R}^{n,n})^2, X \mapsto (X, X) \text{ und} \\
\mu_1 &: (\mathbb{R}^{n,n})^2 \to \mathbb{R}^{n,n}, (X, Y) \mapsto XY.
\end{aligned}
$$

Wie in der Übung können wir nun sehen, dass beide Hilfsfunktionen (bi-)linear sind. Dann ist h_1 differenzierbar mit $Dh(X) = h$ für alle X. Für μ_1 ist dies ersichtlich aus

$$
\mu_1(\lambda X + X', Y) = \lambda XY + X'Y = \lambda \mu_1(X, Y) + \mu_1(X', Y).
$$

Dann ist $D\mu_1(X, Y)(A, B) = AY + XB$. Wir verwenden nun die Kettenregel um die Ableitung von g_1 zu bestimmen, d.h.

$$
\begin{aligned}
Dg_1(X)(A) &= (D\mu_1(h_1(X)) \circ Dh_1(X))(A) \\
&= (D\mu_1(X, X) \circ h_1)(A) \\
&= D\mu_1(X, X)(A, A) \\
&= AX + XA,
\end{aligned}
$$

und die Produktregel (und die Ableitung von g_3) um die Ableitung von g_2 zu bestimmen, also

$$
Dg_2(X)(A) = AAX + XAA = A^2X + XA^2.
$$

Damit haben wir die Ableitungen in allen Komponenten der Ableitung von f bestimmt und können nun dessen Ableitung erneut angeben mit

$$
\begin{aligned}
D^2 f(X)(A) &= A(AX + XA) + A^2X + XA^2 + (AX + XA)A \\
&= 2(A^2X + AXA + XA^2).
\end{aligned}
$$

Es treten nun keine neuartigen Komponenten auf und wir können damit die nächsthöhere Ableitung bestimmen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
D^3 f(X)(A) &= 2(A^3 + A^3 + A^3) \\
&= 6A^3,
\end{aligned}
$$

und

$$
D^4 f(X)(A) = 0.
$$

Da alle folgenden höheren Ableitungen offensichtlich ebenso 0 ergeben, haben wir also alle höheren Ableitungen von f bestimmt.

□

Literatur

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung.* 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

8. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

(a) Wir bestimmen zunächst die partiellen Ableitungen von f.

$$\begin{aligned}[Df(x,y,z)] &= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\cos(x)\cos(y)e^z, & -\sin(x)\sin(y)e^z, & \sin(x)\cos(y)e^z\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Da alle partiellen Ableitungen aus Komponenten stetiger Funktionen bestehen, sind diese auch wieder stetig und f ist differenzierbar. Wir bestimmen also noch die zweiten Ableitungen.

$$\begin{aligned}H_f(x,y,z) &= \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial f}{\partial z\partial z}\end{bmatrix} \\ &= e^z\begin{bmatrix}-\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) & \sin(x)\cos(y)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Auch diese existieren also alle und sind wie oben wieder stetig. Da also f nun zweimal differenzierbar ist, können wir das Taylorpolynom zweiten Grades bilden.

$$\begin{aligned}T_2((0,0,0);(x,y,z)) &= f(0,0,0) + [Df(0,0,0)]\begin{bmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}[x-0,y-0,z-0]H_f(0,0,0)\begin{bmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{bmatrix} \\ &= 0 + [1,0,0]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x,y,z]\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \\ &= x + \frac{1}{2}[x,y,z]\begin{bmatrix}z\\0\\x\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= x + zx$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\square$

Lösung 2. Aufgabe:

Seien $\alpha, \varepsilon > 0$, so dass gilt

$$f(x) \geq f(x^*) + \alpha ||x - x^*||_2^2$$

für alle $x \in U_\varepsilon(x^*)$. Es ist leicht zu erkennen, dass $\alpha||x - x^*||_2^2 > 0$, denn die Norm ist stets positiv definit und es gilt $x \neq x^*, \alpha \neq 0$. Dann gilt aber auch mit unserer Voraussetzung

$$f(x) > f(x^*).$$

Mit Definition 2.56 [Meh22, S. 302] ist x^* dann ein lokales Minimum. Dann wissen wir mit Satz 2.62 [Meh22, S. 304], dass $[D^2 f(x)]$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist. Also gilt auch

$$D^2 f(x^*)(v, v) > 0$$

für alle $v, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Sei

$$D^2 f(x^*)(v, v) > 0$$

für alle $v, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nun gilt wieder mit Definition 2.56 [Meh22, S. 302], dass x^* ein lokales Minimum ist, $D^2 f(x)$ positiv definit ist.
Betrachten wir den Fall $x^* = x$, so gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + 0 \\ &= f(x) + ||x - x||_2 \\ &= f(x^*) + \alpha||x - x^*||_2^2. \end{aligned}$$

$\square$

Lösung 3. Aufgabe:

Es gilt $[Df(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$, wobei

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x)\cos(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x)\sin(y).$$

Wir stellen nun fest, dass $\cos(x)\cos(y)$ genau dann zu 0 auswertet für die Punkte $p_n := (x_1, y_1)$ und $q_n := (x_2, y_2)$ mit

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1), y_1 \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$y_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1), x_2 \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog stellen wir fest, dass $-\sin(x)\sin(y)$ genau dann zu 0 auswertet für die Punkte $p'_n := (x_3, y_3)$ und $q'_n := (x_4, y_4)$ mit

$$x_3 = \pi n, y_3 \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$y_4 = \pi n, x_4 \in \mathbb{R}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgern wir, dass $[Df(x,y)] = [0,0]$ genau dann wenn

$$x = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) \text{ und } y = \pi n$$

gilt, oder

$$y = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1) \text{ und } x = \pi n$$

gilt.
Die Hesse-Matrix der Funktion f ist wie folgt definiert.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{bmatrix}$$

Dann gilt

$$H_f(\frac{\pi}{2} \cdot (2n+1), \pi n) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da die Identität offensichtlich strikt positiv definit ist, ist $-\mathrm{Id}$ strikt negativ definit. Dann hat f mit Satz 2.62 [Meh22, S. 304] in allen Punkten $(\frac{\pi}{2} \cdot (2n+1), \pi n)$ ein striktes lokales Maximum. Ebenso gilt

$$H_f(\pi n, \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1)) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da diese Matrix sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt, ist sie mit Definition 2.60 [Meh22, S. 303] weder positiv noch negativ definit. Dann hat f mit Satz 2.62 [Meh22, S. 304] in allen Punkten $(\pi n, \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1))$ kein lokales Extremum.
□

Lösung 4. Aufgabe:

(a) Es gilt $[Df(x_1,\dots,x_n)] = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$, wobei (mit Quotientenregel)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt[n+1]{(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^n}}\cdot(1+x_1+\ldots+x_n) - \sqrt[n+1]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\cdot 1}{(1+x_1+\ldots+x_n)^2}$$

für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ ist. Wir stellen also fest, dass $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ ist, genau dann wenn der Zähler zu 0 auswertet, also wenn gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+x_1+\ldots+x_n)}{(n+1)\sqrt[n+1]{(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^n}} = \sqrt[n+1]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(1+x_1+\ldots+x_n)}{(n+1)} = (x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{n+1}}\cdot(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{n}{n+1}} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(1+x_1+\ldots+x_n)}{(n+1)} = x_1\cdot\ldots\cdot x_n \\
\Leftrightarrow\quad & (1+x_1+\ldots+x_n)\cdot 1 = (n+1)\cdot(x_1\cdot\ldots\cdot x_n).
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Bedingung gilt wenn

$$\begin{aligned}
1+x_1+\ldots+x_n &= n+1 \text{ und} \\
1 &= x_1\cdot\ldots\cdot x_n
\end{aligned}$$

gelten. Stellen wir nun sicher, dass der Nenner in der ersten Zeile nicht 0 ergibt, also dass $\sqrt[n+1]{(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^n} \neq 0$, dann sehen wir, dass keiner der Einträge 0 enthalten darf ($x_i \neq 0$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$). Damit finden wir den kritischen Punkt $x^* = (1,\dots,1)$.

Die Hesse-Matrix der Funktion f ist wie folgt definiert.

$$H_f(x_1,\dots,x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

□

Literatur

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung*. 2022.

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

9. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

Ich werde dies mit dem Umkehrfunktionssatz zeigen. Sei $f : M_n(R) \to M_n(R)$ mit $f(X) = X_k$, dann kannst du unter Berücksichtigung, dass jede Matrix mit der Identität pendelt, Newtons Binomialformel auf Folgendes anwenden:

$$f(I+H) = (I+H)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} H^i = I + k \cdot H + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} H^i$$

Per Definition von Derivat, wenn f differenzierbar ist, $df_I : M_n(\mathbb{R})ßM_n\mathbb{R})$ (oder wie auf der Webseite angegeben, $f'(I)$) ist die (eindeutige) lineare Transformation, so dass für jede Norm $|\cdot|$ in $M_n(R)$:

$$\frac{|f(I+H) - f(I) - df_I(H)|}{|H|} \to 0 \qquad (|H| \to 0)$$

Als Kandidat für $df_I(H)$ können wir den linearen Term in H wählen, also $k \cdot H$. Unter Verwendung der Norm für Matrix gegeben durch.

$$|A| = \sup_{|v|=1} |Av|$$

können wir schließen, dass $|AB| \leq |A||B|$ und daraus folgt$|A^k \leq |A|^k|$. Dann können wir unter Verwendung der multiplen Dreiecksungleichung für Normen schreiben:

$$\begin{aligned} &\frac{|f(I+H)| - f(I) - k \cdot H}{|H|} \\ &= \frac{|\sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} H^i|}{|H|} \\ &\leq \frac{\sum_{i=2}^{k} |\binom{k}{i}||H^i|}{|H|} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} \frac{|H|^i}{|H|}$$

Umschreiben und i=j+1 setzen, haben wir

$$\sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} |H|^{i-1} = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j=1} |H|^j$$

das ist ein von $|H|$ abhängiges Polynom, das dann gegen 0 konvergiert, wenn $|H| \to 0$.
Dann können wir aus der Eindeutigkeit von $df_I schließen, dass \mathrm{df}_I(H) = k \cdot H$, das ist ein Isomorphismus von $M_n(R)$ zu sich selbst, die I bzw. $f(I) = I$ enthält, und eine C^∞-Funktion $g : V \to U$, so dass g das Inverse von f in U ist. Setzen wir also $X = g(Y)$, dann ist $X^k = Y$

Die Bedeutung der Frage ist der Fall von n = 3 □

Lösung 2. Aufgabe:

□

Lösung 3. Aufgabe:

□

Lösung 4. Aufgabe:

(a) Wir bestimmen zunächst die partiellen Ableitungen von f in ihrer ersten und zweiten Komponente (f_1 und f_2).

$$\begin{aligned} [Df(x,y)] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ \frac{2x}{1+(x^2+y^2)} & \frac{2y}{1+(x^2+y^2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da alle partiellen Ableitungen stetig sind ist f differenzierbar. Wir berechnen nun die Determinante von $[Df(x,y)]$.

$$\det([Df(x,y)]) = \frac{4xy}{1+(x^2+y^2)} - \frac{2xe^y}{1+(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{x(4y - 2e^y)}{1 + (x^2 + y^2)}$$

Es gilt nun für alle Punkte $p := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$, die lokale Invertierbarkeit von f mit Hilfe des Umkehrsatzes und der stetigen Differenzierbarkeit von f. Aufgrund des Umkehrsatzes wissen wir außerdem, dass für die lokale Inverse g von f gilt

$$Dg(f(p)) = (Df(p))^{-1}.$$

Damit folgt also

$$\begin{aligned} Dg(f(p)) &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Wir berechnen die Determinante der Ableitung im Punkt $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \det(Df(0,0)) &= \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit erkennen wir (mit dem Wissen aus der linearen Algebra), dass $Df(0, 0)$ nicht invertierbar ist. Dann ist auch f nicht lokal invertierbar im Punkt $(0, 0)$.

$\square$

Analysis II für Mathematikerinnen und Mathematiker SS 2022

11. Hausaufgabenblatt

Tutorin: Frisch, Michal Maria

Montag, 12:00 Uhr - 14:00 Uhr

Jin, Xin, 474369 Becher, Tobias, 379929

18. November 2023

Lösung 1. Aufgabe:

Wir zeigen, dass W eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ist indem wir W als Gleichung darstellen.
Sei $f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$Df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & r\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist f stetig differenzierbar, da alle partiellen Ableitungen stetig sind. Wir stellen nun außerdem fest, dass da sin und cos nie gleichzeitig, also mit dem gleichen Argument, 0 ergeben können, $Df(r, \theta)$ stets ungleich 0 ist für alle $r, \theta \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$.

Damit kann also W als Gleichung dargestellt werden und ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit.

$\square$

Lösung 2. Aufgabe:

Wir bestimmen zunächst die partiellen Ableitungen von f und g.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{-3+3x^2-y^2} 6x$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -e^{-3+3x^2-y^2} 2y$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= 2 \\
\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} &= -1
\end{aligned}
$$

Da alle partiellen Ableitungen stetig sind, sind f und g also stetig differenzierbar. Wir erhalten also die Gradienten

$$
\begin{aligned}
\text{grad} f(x,y) &= \begin{bmatrix} e^{-3+3x^2-y^2}6x \\ -e^{-3+3x^2-y^2}2y \end{bmatrix} \\
\text{grad} g(x,y) &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir sehen hier schon direkt, dass $\text{grad} g(x,y) = 0$ für kein (x,y) erfüllt ist. Mit Hilfe der Lagrange-Funktion L von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ (siehe Bemerkung 3.31 [Meh22, S. 337]) erhalten wir nun das folgende nichtlineare Gleichungssystem mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$
e^{-3+3x^2-y^2}6x - 2\lambda = 0 \tag{1}
$$

$$
-e^{-3+3x^2-y^2}2y + \lambda = 0 \tag{2}
$$

$$
2x - y + 1 = 0 \tag{3}
$$

Wir können nun λ eliminieren indem wir Gleichung 2 zweimal zu Gleichung 1 addieren und erhalten das Gleichungssystem

$$
e^{-3+3x^2-y^2}(-4y + 6x) = 0 \tag{4}
$$

$$
2x - y + 1 = 0 \tag{5}
$$

Stellen wir nun um, auch mit dem Wissen, dass $e^{-3+3x^2-y^2}$ stets ungleich 0 ist, so können wir das System vereinfachen auf

$$
\begin{aligned}
6x &= 4y \\
6x &= 3(y-1).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt also, dass die beiden Kandidaten für Extremwerte von f $(x,y) = (-2,-3)$ und $(x,y) = (2,3)$ lauten.
Um die Art der Extrema zu bestimmen bilden wir nun die Hesse-Matrix.

$$
\begin{aligned}
H_L((x,y),\lambda) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial x \partial x} & \frac{\partial L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial L}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & e^{-3+3x^2-y^2}(36x^2+6) & -e^{-3+3x^2-y^2}12xy \\ -1 & -e^{-3+3x^2-y^2}12xy & -e^{-3+3x^2-y^2}(4y^2+2) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun $(x, y) = (2, 3)$ ein so erhalten wir

$$H_L((2,3),\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 150 & 72 \\ -1 & -72 & -38 \end{bmatrix}.$$

Da $\det H_L((2,3),\lambda) = 290$ positiv ist, befindet sich bei $(2, 3)$ also das globale Maximum von f. $\square$

Lösung 3. Aufgabe:

$\square$

Lösung 4. Aufgabe:

Wir betrachten die Aufgabe als Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen, d.h. wir möchten die Funktion

$$f(x,y,z) = ||(x,y,z) - (1,-1,0)|| = ||(x-1, y+1, z)|| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ mit

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

minimieren. Wir lösen dies mit der Lagrange-Methode. Hierzu bestimmen wir zunächst die partiellen Ableitungen und sehen, dass beide Funktionen stetig differenzierbar sind, da alle ihre partiellen Ableitungen stetig sind für alle $(x, y, z) \neq (1, -1, 0)$ (Wir betrachten den Punkt selbst nicht, da er nicht in der Menge liegt).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}} \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}} \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2}} \\
\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} &= 2x \\
\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} &= 2y \\
\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} &= -2z
\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Gradienten

$$\begin{aligned}\mathrm{grad} f(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}}\begin{bmatrix}x-1\\y+1\\z\end{bmatrix}\\ \mathrm{grad} g(x,y,z) &= \begin{bmatrix}2x\\2y\\-2z\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Leicht zu erkennen ist sofort, dass $\mathrm{grad} g(x,y,z) = 0$ für $(x,y,z) = (0,0,0)$, doch damit ist die Nebenbedingung nicht erfüllt. Die notwendige Bedingung $\mathrm{grad} f(x,y,z) = \lambda \mathrm{grad} g(x,y,z)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert uns dann das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}} = 2\lambda x \tag{6}$$

$$\frac{y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}} = 2\lambda y \tag{7}$$

$$\frac{z}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}} = -2\lambda z \tag{8}$$

$$x^2+y^2-z^2-1 = 0 \tag{9}$$

Wir eliminieren nun λ aus den Gleichungen. Wir multiplizieren Gleichung 6 mit yz, Gleichung 7 mit xz und Gleichung 8 mit $-xy$ bevor wir Gleichung 8 von Gleichung 7 und Gleichung 7 von Gleichung 6 abziehen. Wir können hier nun außerdem den Nenner vernachlässigen und uns auf den Fall konzentrieren, dass der Zähler 0 wird. Wir erhalten dann also

$$\begin{aligned}yz(x-1) - xz(y+1) &= 0\\ xz(y+1) + xyz &= 0\\ x^2+y^2-z^2-1 &= 0.\end{aligned}$$

Wir kürzen nun z aus den ersten beiden Gleichungen und stellen jeweils nach x oder y um. Wir erhalten dann für $z \neq 0$

$$\begin{aligned}x &= -y\\ y &= 0\\ \sqrt{x^2+y^2-1} &= z,\end{aligned}$$

und sehen, da $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, dass es keinen Extremwert geben kann, der die Bedingung erfüllt. Der Punkt P ist also nicht vorhanden.

$\square$

Literatur

[Meh22] Christian Mehl. *Skript Analysis: Vorlesungsausarbeitung.* 2022.