Лекція 10. Гіпербола та парабола: означення, рівняння, основні властивості, побудова.

**План**

1. Гіпербола.

2. Парабола.

3 Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду.

4. Застосування ліній другого порядку до розв’язування задач економічного змісту.

*Основні поняття та твердження:* гіпербола, дійсна і уявна осі, рівностороння гіпербола, ексцентриситет гіперболи, парабола, директриса, загальне та канонічне рівняння лінії другого порядку.

**1. Гіпербола**

***Означення. Гіперболою*** *називається множина точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала менша відстаней між фокусами.*

Виконуючи перетворення аналогічні як і при написанні рівняння еліпса та враховуючи, що  і отримаємо рівняння гіперболи

, (10.1)

де - дійсна, - уявна півосі гіперболи. Це ***канонічне рівняння гіперболи з центром в початку координат*** (мал. 1).

Якщо центр гіперболи знаходиться у точці С , а осі гіперболи паралельні координатам, то ***канонічне рівняння гіперболи з центром в довільній точці*** запишеться так:

. (10.2)

Гіпербола складається із двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти, рівняння яких

. (10.3)

Мал. 1

***y***

***x***





***-b***

***-a***

***0***

***l1***

***l2***









Осі симетрії називаються ***осями гіперболи***, точка перетину осей – ***центр гіперболи***. Величини , ,  зв’язані співвідношенням:

. (10.4)

Гіпербола перетинає вісь ОХ у точці  і . Ці точки називаються ***вершинами* *гіперболи.*** Якщо , то гіпербола називається ***рівносторонньою*** і її рівняння буде:

 (10.5)

***Означення. Ексцентриситетом*** *гіперболи називають відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:*

** (10.6)

*причому*.

***Означення.*** *Прямі , де  - дійсна піввісь гіперболи, а  - її ексцентриситет, називаються* ***директрисами гіперболи****.*

*Задача 1.* Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі *ОХ* симетрично осям координат, якщо:

1) дійсна вісь =8, а відстань між фокусами 2с=10;

2) якщо рівняння асимптот гіперболи і уявна вісь .

Розв’язання

1) Оскільки , то . Підставимо відомі значення:

, тобто .

Тоді рівняння гіперболи запишеться у вигляді: .

2) якщо рівняння асимптот гіперболи і уявна вісь .

Маємо . Тоді , тому =10. Підставимо у рівняння гіперболи отримані значення, що дозволяє записати шукане рівняння:

.

Відповідь: 1) ; 2) .

**2. Парабола**

***Означення. Параболою*** *називається множина точок площини, рівновіддалених від однієї точки, яка називається фокусом і прямої, що називається* ***директрисою****.*

Для того, щоб одержати рівняння параболи розмістимо фокус  на осі ОХ, а рівняння директриси запишемо у вигляді:

, (10.7)

де  - параметр параболи і це відстань від фокуса до директриси.

Тоді, використовуючи означення параболи, одержимо її рівняння:

2. (10.8)

Це є ***рівняння параболи з центром в початку координат, і вітками, що симетричні ОХ та направлені вправо.***

Випадки розміщення параболи зображено на малюнках 2 – 5.

Якщо ***вершина параболи знаходиться у точці С ,*** а вісь симетрії параболи паралельна одній з осей координат, то рівняння будуть мати вигляд:

; . (10.9)

Після піднесення до квадрату і спрощення рівнянь (6.19) дістанемо

, (10.10)

що також є рівнянням параболи з центром у довільній точці та віссю симетрії, яка паралельна осі .

*Задача 2.* Запишіть рівняння параболи, якщо віссю симетрії є вісь ОХ, вітки параболи направлені вліво, вершина знаходиться у початку координат і параметр p=6.

Розв’язання

Користуючись умовою задачі, можна записати рівняння параболи:

.

***у***

***х***

***0***



Мал.3





0



Мал. 2



***х***

***0***



Мал.5



***х***

***0***



Мал. 4

**3. Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду**

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд:

.

Якщо у цьому рівнянні =0, то його можна звести до канонічного рівняння:

* кола (  );
* еліпса ;
* гіпербола ;
* параболи (або ).

Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного відбувається шляхом виділення повних квадратів.

*Задача 3.* Встановіть, яка лінія визначається рівнянням ?

Розв’язання



Це є рівняння еліпса з центром в точці С (-1; -2; ), причому , =.

*Задача 4.* Встановіть тип лінії другого порядку  та зведіть її до канонічного вигляду.

Розв’язання

Оскільки , то дана лінія є параболою.

;

.

Відповідь: це парабола з центром в точці  та параметром *p*=2.

** В результаті вивчення теми необхідно:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * означення та канонічні рівняння ліній другого порядку: гіперболи та параболи; * умови, які допомагають визначати вид лінії другого порядку. | * визначати параметри та координати фокусів гіперболи, параболи, їх ексцентриситети; * записувати канонічні рівняння кривих другого порядку; * будувати криві другого порядку за їх канонічним рівнянням; * визначати вид лінії другого порядку за її загальним рівнянням; * зводити загальне рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду шляхом виділення повного квадрату; * використовувати отримані знання з теми для розв’язування задач економічного змісту. |