Лекція 11. Поняття границі функції та основні теореми про границі. Властивості границь. Перша та друга визначні границі.

**План**

1. Функція, її властивості та способи задання. Основні елементарні функції.

2. Поняття про виробничі функції у економіці.

3. Поняття числової послідовності, приклади числових послідовностей. Границя послідовності.

4. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, зв’язок між ними.

5. Границя функції в точці та на нескінченності. Основні теореми про границі.

6. Границя відношення двох многочленів.

7. Перша та друга визначні (чудові ) границі.

*Основні терміни та поняття:* функція, множина значень та область визначення функції, елементарна функція, виробничі функції, числова послідовність, члени (елементи) числової послідовності, загальний член послідовності, стала послідовність, границя числової послідовності, збіжна та розбіжна числові послідовності, нескінченно малі та нескінченно великі величини, границя функції в точці та на нескінченності, перша та друга визначні (чудові) границі.

**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

Поняття функції має давню історію. Перші кроки на довгому шляху творення загального поняття функції зробили математики Стародавнього Вавилону. Вони склали таблиці обернених значень чисел, їх квадратів і кубів, сум квадратів і кубів чисел. У сучасному розумінні це були таблиці значень функцій , , , .

Довго саме поняття функції не було введено. Навіть у працях Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона, Г. Лейбніца це поняття носило по суті інтуїтивний характер і пов’язувалося або з геометричними, або з механічними уявленнями Шлях до першого означення проклав Р.Декарт, увівши поняття змінної величини.

Наприкінці 17 століття Г. Лейбніц та його учні почали в дуже вузькому розумінні використовувати термін «функція», пов’язуючи його лише з геометричними образами. Вільне ж від геометричної мови означення сформулював у 1718 році Й Бернуллі: «Функцією змінної величини називається кількість, утворена яким завгодно способом з цієї змінної величини і сталих». Він позначав функцію . Це означення у 1755 році уточнив і узагальнив Л. Ейлер: «Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх і самі вони підлягають зміні, то перші називаються функціями других». В одній із своїх робіт вчений навіть розглядав графік функції як криву, яка накреслена «вільним потягом руки». Для позначення функції він використав символ  - буква  - перша буква латинського слова function – функція.

М. Лобачевський, розвиваючи ейлерове означення функції (1834) писав: «Загальне означення вимагає, щоб функцією від  називали число, яке дається для кожного  і разом з поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка дає засіб випробовувати всі числа і вибирати одне з них; або, нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою…». У 1837 році німецький математик П. Діріхле сформулював таке означення: « є функцією від  (на відрізку), якщо кожному значенню  (з цього відрізка) відповідає певне значення , причому не має значення, яким чином встановлена ця відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або навіть просто словами».

Отже, в середині 19 століття після довготривалої полеміки поняття функції звільнилося від форми встановлення відповідності – головний наголос у новому загальному означенні робився на самій відповідності. А вже у другій половині 19 століття після створення теорії множин в означення функції, крім ідеї відповідності, включено ще й ідею множини.

**1. Функція, її властивості та способи задання . Основні елементарні функції**

***Означення.*** *Змінна величина  називається* ***функцією*** *від змінної величини , якщо кожному значенню змінної  з деякої множини  ставиться у відповідність єдине значення  з множини .*

Позначають функцію , де  - незалежна змінна (***аргумент***), - залежна змінна (***функція*** ).

На основі сформульованого означенням функції можна стверджувати, що її***область визначення*** *–* це множина *Х* (всі ті значення, яких набуває незалежна змінна  і при яких дана функція існує): позначається *D*. Тоді ***множина значень функції*** *–* це множина *Y* (всі ті значення залежної змінної , яких вона набуває при всіх значеннях *х* з області визначення функції): позначається Е.

Задати функцію можна декількома способами:

1. **аналітично** – за допомогою формули (наприклад, ,  тощо)
2. **таблично** – найчастіше використовується на практиці - коли в певному порядку вписують значення незалежної змінної () та відповідні їм значення залежної змінної ();
3. **графічно** – за допомогою графіка, що є множиною точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють аргументу функції, а ординати є відповідними значеннями функції.

Кожна функція володіє певними властивостями, до яких відносять поняття парності, періодичності, монотонності.

***Означення***. *Функція  називається* ***парною*** *(****непарною****), якщо для будь-якого значення х з області визначення функції значення (-х) також належить цій області і виконується умова*

* .* (11.1)

Якщо перша умова (про належність області визначення) не виконується, то не доцільно перевіряти другу я функція, що досліджується є ***ні парною, ні непарною*** (інша назва - ***індеферентною***).

*Задача 1.* Дослідіть функцію  на парність (непарність).

Розв’язання

Областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, тобто  або . Тому можна стверджувати, що для будь-якого значення *х* з області визначення функції значення (-*х*) також належить цій області – перша умова (про належність області визначення виконується).

Перевіримо виконання другої умови підставивши значення (-*х*) у дану функцію:

.

Виконання умови  вказує нате, що дана функція є парною.

Відповідь: функція  парна.

***Означення.*** *Функція  називається* ***періодичною*** *з періодом , якщо для будь-якого значення х з області визначення  і  теж належать області визначення і при цьому виконується рівність*

*.* (11.2)

Часто періодом функції називають її найменший додатній період. Якщо число  - період функції, то число , де  також буде періодом функції.

До монотонних функцій відносять: монотонно зростаючі (монотонно спадні) та строго зростаючі (строго спадні) функції.

***Означення****. Якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, то її називають* ***монотонно зростаючою****,*

*,* (11.3)

*а якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, - то* ***монотонно стадною****:*

*.* (11.4)

***Означення****. Функція  називається*

|  |  |
| --- | --- |
| ***строго зростаючою*** | ***строго спадною*** |

*на деякому проміжку, якщо для будь-яких  з цього проміжку виконується нерівність*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Розглянемодеякі основні елементарні функції (таблиця 7.1).

Таблиця 11.1

**Основні елементарні функції, їх властивості**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Функція, задана словесно та аналітично** | **Графічне задання** | **Основні властивості функції** |
| Функція виду , де - незалежна змінна,  - довільні числа називається ***лінійною.***      При  функція  задає *пряму*  *пропорційність* | Графіком є *пряма*  *х*  *у*  0  *b*  У випадку прямої пропорційності пряма проходить через початок координат (графік симетричний початку координат)  *х*  *у*  0  У випадку - довільне числове значення, відмінне від нуля, графіком є пряма, паралельна осі *Ox* (або збігається з нею).Тобто графік симетричний відносно осі *Оу* | 1) Область визначення лінійної функції .  2) При:  - , функція зростає;  - , функція спадає.  3) Якщо:  -  функція ні парна, ні непарна;  -  функція непарна;  - - довільне, функція парна. |
| Функція , де - незалежна змінна, число  виражає ***обернену пропорційність***. | Графіком є *гіпербола*, що складається з двох віток, які розміщені у чвертях:  - І та ІІІ, якщо; | 1) Областю визначення функції є всі дійсні числа, крім , тобто .  Областю значення є всі дійсні числа, крім ,тобто . |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *х*  *у*  0  - ІІ та ІV, якщо  *х*  *у*  0 | 2) Функція на множині  спадає, при  і зростає, при .  3) Функція непарна |
| Функція  або | Графік функції – *парабола*, симетрична відносно осі *Оу*.  Оскільки при  значення функції також рівне нулю (), то графік проходить через початок координат  У випадку  вітки параболи напрямлені:  - вгору, якщо ;  - вниз, якщо .  *х*  *у*  0 | 1) Область визначення – множина всіх дійсних чисел, тобто .  Область значення – множина невід’ємних чисел, тобто .  2) При  функція спадає, а при  - зростає.  3) Функція парна |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Функція , де  - дійсні числа,  називається ***квадратичною.*** | В даному випадку графіком є також парабола, вершина якої міститься в точці , де , . Крім того, точки перетину графіку з віссю *Ох* знайдемо при , а з *Оу* – при . |  |
| Функція | Графіком є *кубічна парабола*, яка симетрична відносно початку координат.  Якщо  графік проходить через початок координат  1  1  2  *у=х3*  *у*  *х*  0 | 1) Області визначення та значення функції – множина всіх дійсних чисел.  2) Функція зростаюча на всій множині визначення.  3) Функція є непарна |
| Функція  1  1  у=  *у*  *х*  0 | Графіком є вітка параболи розміщена у І чверті (оскільки  та  невід’ємні значення).  Якщо , то і , тобто графік проходить через початок координат. | 1) Області визначення і значення функції – множина невід’ємних чисел, тобто  і .  2) Функція зростає на всій області визначення.  3) Функція не належить ні до парних, ні до непарних функцій. |

**2. Поняття про виробничі функції у економіці**

Важливими елементами мікро- та макроекономічної теорії раціонального господарювання є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг, а з іншого – виробничі технологічні процеси. Для опису внутрішнього боку виробництва збирають необхідну інформацію про фактори й ресурси, які впливають на обсяг продукції, що випускається. Отримані дані записують та опрацьовують використовуючи математичний апарат.

***Означення.*** *Функції, в яких задається відповідність між величинами, що характеризують хід конкретного процесу чи явища в економіці, сільському господарстві тощо називаються* ***виробничими****.*

**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

 Аналіз виробництва здійснювався за допомогою теорії виробничих функцій, виникнення якої відносять до 1928 року, коли було опубліковано статтю «Теорія виробництва» американських учених – економіста П.Дугласа (1892-1976) й математика Д.Кобба (1875—1949). В цій статті було подано результати дослідження, в якому автори змоделювати ріст американської економіки в період з 1899 по 1922 роки. Вони розглянули спрощене уявлення про економіку, в якій випуск продукції визначений кількістю витраченої праці та об’ємом капіталу. З врахуванням наявності багатьох факторів, які зачіпали економічні показники, їх модель виявилась надзвичайно точною.

Пол Ховард Дуглас, американський економіст, один з авторів «похідної функції Кобба-Дугласа». Навчався в Колумбійському та Гарвардському університетах. Президент Американської економічної асоціації (1947), сенатор США в 1949-1967 роках.

Під *виробничою функцією* слід розуміти залежність результату від чинників, що на нього впливають. Такі функції отримуються в результаті вивчення та обробки числових даних результатів господарської діяльності або на основі спеціально проведених експериментів. Можливим є і те, що при побудові виробничої функції головна увага звертається на те, щоб функція, яка задана у вигляді формули (аналітично) відображала найважливіші закономірності даного процесу. Тобто, виробнича функція відображає процес наближено, є його математичною моделлю.

Пропонують й інше означення виробничої функції.

***Означення. Виробнича функція (ВФ)*** *– це функція, незалежна змінна  якої набуває значення обсягу ресурсу, котрий використовується у виробництві (фактора виробництва), а залежна змінна  - значення обсягу продукції, котру випускає дане підприємство, фірма або галузь.*

Часто для позначення виробничої функції використовують вже відомий запис функції однієї змінної

,

проте на змінні ** (числові величини), відповідно до сформульованого означення, накладаються умови невід’ємності **.

*Запис  означає:* якщо ресурс витрачається або використовується в кількості  одиниць, то продукція випускається в кількості  одиниць.

Виробничі функції дають можливість прогнозувати результати діяльності людини, давати наукові рекомендації, причому прогноз буде точнішим тоді, коли функція складена краще. Розрахунки, що виконуються з допомогою виробничих функцій, повинні розглядатися як середні показники, тобто, отримані в ході експерименту дані будуть коливатися навколо розрахованих і наближатимуться до них лише після обчислення середніх показників.

Найчастіше досліджуються такі виробничі функції:

а) залежність попиту на товар від його ціни: , де  - кількість проданого товару,  - ціна одиниці продукції. Ця функція має бути спадною, тобто чим менша ціна, тим більший попит і навпаки;

б) залежність ринкової ціни від кількості запропонованої продукції (функція пропозиції): , що також має бути спадною;

в) залежність доходу підприємства від вартості виробленої продукції: .

*Задача 2.* Було проведено експеримент зі зміною оплати за користування міським транспортом. Нова форма є системою з фіксованою оплатою проїзду, коли пасажир платить за проїзд між будь – якими пунктами однаково на всіх видах транспорту. Статистичне спостереження з’ясувало залежність кількості громадян, які будуть користуватися громадським транспортом, від різних розмірів оплати. За результатами цих спостережень аналітики визначити функцію попиту, що характеризує щоденну кількість пасажирів як функцію оплати за проїзд , коп. Вона має вигляд:

.

Визначити оплату за проїзд, яку потрібно призначити для максимізації щоденного доходу від користування громадським транспортом. Яким буде максимальний дохід і скільки пасажирів очікується за день при такій оплаті?

Розв’язання

Визначимо функцію щоденного доходу залежно від оплати . Загальний дохід визначається добутком функції попиту заданої в умові на ціну, тобто

.

Це квадратична залежність. Графіком цієї функції є парабола з вершиною в точці (20;1000) і вітками, що направлені вниз.

0

100

*R,* грн.

20

40

*p,*коп.

Мал. 1

Тоді



Отже, максимум досягається, коли  коп.. Тому можемо дати таку економічну інтерпретацію: щоденний дохід буде максималізованим, коли оплата за проїзд становитиме 20 коп., а максимальний щоденний дохід дорівнюватиме 1000 грн. Кількість пасажирів очікується:



Відповідь: оплата за проїзд становить 20 копійок; максимальний дохід за день – 1000 грн.; кількість пасажирів, що передбачається дорівнює 5000 чоловік.

**3. Поняття числової послідовності, приклади числових послідовностей.**

**Границя послідовності**

***Означення.*** *Якщо кожному натуральному числу  за певним правилом ставиться у відповідність число , то множину чисел  називається* ***числовою послідовністю(або послідовністю)*** *і позначається .*

Числа:  називаються ***членами (елементами)***послідовності - перший член, - другий член і так далі, - енний член або загальний.

За означенням послідовність містить нескінченну кількість членів, причому будь-які два з них відрізняються , принаймні, номерами. Отже, елементи  і  при  вважаються різними, хоча як числа вони можуть бути рівні між собою.

***Означення.*** *Якщо всі елементи послідовності  дорівнюють одному і тому самому числу, то її називають* ***сталою****.*

|  |  |
| --- | --- |
| **На прикладі** | **В загальному вигляді** |
| четвертий член послідовності | - -й член послідовності |
| ***Числові послідовності бувають*** | |
| а) скінченні: що мають останній член | б) нескінченні: де немає останнього члена |
| в) сталі: | г) змінні: , де є хоча б два різні елементи |

Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена.

*Задача 3.* Запишіть перші 5 членів послідовності, заданої її загальним членом .

Розв’язання

Враховуючи означення числової послідовності, де - перший член, - другий член і так далі, робимо висновок, що для того, щоб знайти значення, наприклад першого члену потрібно у формулі загального зробити підстановку . Тоді

.

Аналогічно знаходимо й інші члени послідовності:

 ;

 ;

 ;

 .

Відповідь: .

Для числової послідовності використовується поняття обмеженості:

- послідовність {****} називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число  з множини дійсних чисел (*МR*), що для будь-якого  з множини натуральних чисел () виконується нерівність **** ;

- послідовність {****} називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке *МR* , що для *nN* виконується нерівність **** ;

- послідовність {****} називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена зверху і знизу, тобто існують такі *М, m*  *R*, що для будь-якого  виконується подвійна нерівність ****.

У протилежних випадках послідовність ***необмежена*.**

***Означення.*** *Число  називається* ***границею послідовності ,*** *якщо для довільного числа  існує такий номер , що при всіх  виконується нерівність .*

Якщо число  є границею послідовності , то пишуть

 або   (11.5)

і кажуть, що послідовність числу  або прямує до .

За допомогою спеціальних математичних символів означення границі можна записати так:

    ,

де символи означають такі слова:  - «для будь-якого»;  -« існує»; - «таке, що»;  - «слідує».

**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

Знак границі , що є скороченням латинського слова limes – межа, у вигляді ,  ввів у 1853 році сер Вільям Ровен Гамільтон (1806-1865) – ірландський математик, один з найвизначніших математиків 19 століття.

Народився в Дубліні, у родині юриста. Але з трьох років, через фінансові труднощі батьків, перебував на вихованні у дядька – вікарія та вчителя. Саме під його керівництвом хлопець до 12 років вивчив 12 мов та навчився добре і швидко рахувати подумки.

Вступивши до коледжу він продемонстрував такі блискучі здібності, що в 22 роки був призначений професором астрономії Дублінського університету. У 1835 році отримав титул баронета від віце-короля Ірландії, а у 1837 був обраний президентом Королівської ірландської академії та членом-кореспондентом Петербурзької академії наук.

Історики стверджують, що в своїх геніальних творах Гамільтон випередив своїх сучасників. Надзвичайно великим є його внесок, зроблений у розвиток алгебри, теорії диференціальних рівнянь, фізики, астрономії, оптики, динаміки.

Послідовність, яка має границю  називається ***збіжною до *** (або просто ***збіжною***). Послідовність, яка не є збіжною, називається ***розбіжною****.*

***Означення****. Послідовність {} називається* ***нескінченною малою****, якщо *.

***Означення.*** *Послідовність {} називається* ***нескінченно великою****, якщо для будь-якого  існує  є N, таке, що як тільки n є N та  виконується нерівність |********|>M. Якщо {********} – нескінченно велика, то *.

Послідовності розрізняють:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Строго монотонні** | | **Монотонні** | |
| Послідовність  називається | | | |
| ***зростаючою*** | ***спадною*** | ***незростаючою*** | ***неспадною*** |
| якщо | | | |
|  |  |  |  |

***Основні теореми про границі числових послідовностей***

Нехай дано числові послідовності {} і {} для яких , .

1) Границя алгебраїчної суми двох послідовностей дорівнює алгебраїчній сумі границь цих послідовностей, тобто

. (11.6)

2) Границя добутку двох послідовностей дорівнює добутку границь, тобто

 (11.7)

3) Сталий множник можна винести за знак границі, тобто

. (11.8)

4) Якщо  і N, то .

5) Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь, при умові, що границя послідовності, що є дільником, не дорівнює нулю, тобто:

, причому  (11.9)

Можна сформулювати ще й такі важливі теореми про границі:

1. послідовність може мати лише одну границю;
2. послідовність, що має скінченну границю – ***обмежена***, якщо послідовність має нескінченну границю, то вона ***необмежена;***
3. **монотонно обмежена** послідовність має скінченну границю:

* якщо ця послідовність ***монотонно зростає***, то ;
* якщо послідовність ***монотонно спадає***, то ;

1. **монотонно необмежена** послідовність має нескінченну границю:

* якщо ця послідовність ***монотонно зростає***, то 
* якщо послідовність ***монотонно спадає***, то .

**Необхідна та достатня умови існування границі послідовності (теорема О.Коші). Д**ля збіжності{} необхідно й достатньо, щоб для  *N* та (), що  *m, p N* за умови *m*>() і *р*>() виконувалась нерівність .

***Означення.*** *Послідовність, яка володіє необхідною і достатньою ознакою називається* ***фундаментальною.***

**4. Нескінченно малі та нескінченно великі величини, зв’язок між ними**

Нехай дано функції , ,  і припустимо, що

,

де  - деяка точка або нескінченність, тобто , ,  - нескінченно малі величини.

Розрізняють нескінченно малі величини одного та вищого порядків малості.

***Означення.*** *Нескінченно малі величини  та називаються* ***нескінченно малими величинами одного порядку малості,*** *якщо*

*,* (11.10)

*при умові, що  і .*

***Означення.*** *Нескінченно мала величина  називається* ***нескінченно малою величиною вищого порядку малості ніж ,****якщо*

*.* (11.11)

*Задача 4.* Дослідіть порядок малості нескінченно малих величини  та

, якщо .

Розв’язання

Для того, щоб встановити порядок малості нескінченно малих величин перевіримо виконання умов (7.10) та (7.11). Для цього обчислимо границю, застосувавши першу визначну границю:

.

Відповідь: враховуючи умову (7.11) стверджуємо, що  є нескінченно малою

величиною вищого порядку малості ніж.

***Означення.*** *Якщо границя  не існує, то  та називаються* ***непорівняними*** *нескінченно малими величинами.*

*Задача 5.* Дослідіть зв’язок між нескінченно малими величинами  та при .

Розв’язання

Обчислимо границю відношення даних величин за умови, що :

*.*

Оскільки отримана границя при умові  не існує. Отже дані нескінченно малі величини непорівнянні.

Відповідь: нескінченно малі величини  та  непорівнянні.

**5. Границя функції в точці та на нескінченності. Основні теореми про границі**

***Означення.*** *Число А називається* ***границею функції  при ,*** *якщо для будь-якого як завгодно малого числа  існує таке число (дельта), яке залежить від  , що як тільки  , то .*

Позначається

. (11.12)

*Задача 6.* Обчислити границю функції  .

Розв’язання

Для обчислення границі функції в точці першим кроком є підстановка числа, до якого прямує невідома величина замість самої невідомої функцію, границя якої обчислюється:

 .

Відповідь: .

***Означення.*** *Число А називається* ***границею функції на нескінченності ,*** *якщо для будь-якого  існує таке число М, що як тільки , то .*

Позначається

. (11.13)

*Задача 7.* Знайти границю .

Розв’язання

.

Відповідь: 1.

**Основні теореми про границі**

*Теорема1.* Границя сталої величини дорівнює цій сталій величині:

, де С=const. (11.14)

*Теорема 2.* Сталий множник можна винести за знак границі:

. (11.15)

*Теорема 3.* Границя алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь кожної з цих функцій:

. (11.16)

*Теорема 4.* Границя добутку декількох функцій дорівнює добутку границь кожної з цих функцій:

. (11.17)

*Теорема 5.* Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій при умові, що границя знаменника не дорівнює нулю:

, якщо . (11.18)

**6. Границя відношення двох многочленів**

***Правило.*** Границя відношення двох многочленів при , де  - скінчене число дорівнює частці границь чисельника і знаменника при умові, що границя знаменника .

Якщо при знаходженні границі відношення двох многочленів одержимо невизначеність , то необхідно чисельник і знаменник розкласти на множники, а потім скоротити.

*Задача 8.*  Знайдіть границі функцій в точці: а) ;б) .

Розв’язання

а) Оскільки запропоновано обчислити границю функції в точці, то підставимо замість невідомої у функцію її конкретне значення . Розкрити отриману невизначеність типу  можемо розклавши на множники вирази чисельника та знаменника (за формулами скороченого множення). Тобто:

.

б) У даному випадку готової формули, що допомогла б розкрити невизначеність типу  немає. Не дасть позитивного результату і групування доданків – відсутній спільний множник у чисельнику та знаменнику дробу. Запишемо многочлени чисельника та знаменника так, щоб після групування можна було б винести спільний множник за дужки та виконати скорочення дробу.





.

Відповідь: а) ; б) .

Якщо розглядаємо ***границю відношення двох многочленів при ,*** то справедливою є формула:

. (11.19)

*Задача 9.* Обчисліть границі відношення двох многочленів.

а) ; б) ; в) .

Дослідіть правильність отриманого результату за допомогою формули.

Розв’язання

а) Обчислення границі відношення двох многочленів на нескінченності приводить до появи невизначеності типу . Для її розкриття визначимо у функції невідому в найвищому степені та поділимо на неї чисельник і знаменник даного дробу. Застосувавши основні теореми про границі, отримаємо шуканий результат.

***Зауваження.*** При обчисленні границь варто пам’ятати, що значення виразу , де  буде як завгодно близьким до нуля. Тому, можна стверджувати, що .



Для перевірки правильності результату проаналізуємо границю відповідно до формули (11.19).

Оскільки , , тобто  , то границя відношення двох многочленів, за (11.19), при  дорівнює 0.

б) Проведемо міркування, аналогічні до попереднього завдання:



Перевірка: за формулою: , , отже , тому .

в) Перший спосіб: .

Перевірка (другий спосіб): , , отже , тому значення границі буде .

Відповідь: а) 0; б) ; в) .

**7. Перша та друга визначні (чудові ) границі**

***Означення.******Першою визначною границею*** *називається границя виду*

**. (11.20)

Використання першої визначної границі проілюструємо конкретними прикладами.

*Задача 10.* Обчисліть границі функції:

а) ; б) ; в) ; г) ;

Розв’язання

а) .

б) .

в) 

.

г) .

Відповідь: а) ; б) 1; в) ; г) 1.

***Означення.******Другою визначною (чудовою) границею*** *називається границя виду*

*****.*** (11.21)

Якщо у даній границі зробити заміну , то  , а від  перейти до , то отримаємо інший запис другої визначної границі:

. (11.22)

*Задача 11.* Обчисліть границі:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) 

Розв’язання

а) .

б) .

в) .

г) .

д) .

Відповідь: а) ; б) ; в) ; г) ; д) .

** В результаті вивчення теми необхідно:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * поняття виробничої функції в економіці; * способи задання функцій; * аналітичне задання основних елементарних функцій, їх властивості; * поняття числової послідовності; * поняття нескінченно малих та нескінченно великих величин, зв’язок між ними; * означення границі функції в точці і на нескінченності; * основні теореми про границі; * визначні (чудові) границі. | * знаходити область визначення функції; * досліджувати функції на парність та непарність, періодичність та неперіодичність за аналітичним виразом; * обчислювати границі складніших числових послідовностей; * обчислювати границі функцій в точці та на нескінченності (зокрема, границю відношення двох многочленів, першу та другу визначну границю тощо). |