Лекція 12. Диференціал функції, геометричний зміст диференціала. Диференціал вищих порядків. Застосування диференціала до наближених обчислень.

**План**

1. Диференціал функції.

2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала.

3. Застосування диференціала до наближених обчислень.

4. Приклади розв’язання задач.

**Диференціал функції**

Нехай функція  диференційована в точці , тобто в цій точці має похідну

.

Тоді за властивістю нескінченно малих функцій матимемо ,  при , звідки

. (1)

Перший з доданків лінійний відносно  і при  та  є нескінченно малою одного порядку з , тому що:

.

Другий доданок – нескінченно мала вищого порядку, ніж , тому що

.

Цей доданок не є лінійним відносно , тобто містить  в степені, вищому від одиниці. Таким чином, перший доданок у формулі (1) є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

*Диференціалом  функції  в точці * називається головна, лінійна відносно , частина приросту функції  в цій точці:

 (2)

Якщо , то , тому , тобто диференціал  незалежної

змінної  збігається з її приростом . Тому формулу (2) можна записати так:

.

Дана формула дає можливість розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

Якщо в точці  похідна , то перший доданок у формулі (1) дорівнює нулю і вже не є головною частиною приросту . Але і в цьому випадку диференціал знаходиться за формулою (2).

***Геометричний зміст диференціала*** зрозумілий з малюнка.

Маємо

, .

Отже, диференціал функції  при заданих значеннях  і  дорівнює приросту ординати дотичної до кривої  в точці **. Приріст функції  при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати  кривої ординатою дотичної . Така заміна доцільна лише для достатньо малих значень .

З’ясуємо ***механічний зміст диференціала***: нехай матеріальна точка рухається за відомим законом , де  - диференційована на деякому проміжку функція. Тоді диференціал цієї функції  при фіксованих значеннях  і  - це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час , якби вона рухалась прямолінійно і рівномірно із сталою швидкістю .

Фактичний шлях  у випадку нерівномірного руху на відміну від диференціала  не є лінійною функцією часу  і тому відрізняється від шляху . Проте якщо час  достатньо малий, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись, і тому рух точки на проміжку часу від  до  є майже рівномірним.

**2. Властивості диференціала. Інваріантність форми диференціала.**

Оскільки диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал не залежної змінної, то властивості диференціала легко отримати із відповідних властивостей похідної.

Нехай  та  - диференційовні функції від ,  – стала, тоді матимемо такі правила знаходження диференціалів:

,

,

,

,

.

Диференціювання складеної функції: нехай  - складена функція з проміжним аргументом  і кінцевим аргументом , причому функції  і  диференційовані в точках  і . Тоді

. (3)

Порівнюючи формули (2) і (3) бачимо, що диференціал функції  визна-чається за однією і тією ж формулою незалежно від того, чи змінна  є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Ця властивість диференціала називається *інваріантною* *(незмінністю) форми диференціала*.

Зауваження: формули (2), де змінна  - незалежна, і (3), де  - залежна, однакові лише на вигляд, а зміст їх різний: у формулі (2) , а формулі (3) .

**3. Застосування диференціала до наближених обчислень.**

Приріст  функції  у точці  можна наближено замінити диференціалом  в цій точці: . Підставивши значення  і , отримаємо

.

Абсолютна похибка величини  при  є нескінченно малою вищого порядку, ніж , бо при  величини  і  еквівалентні:

.

Іноді користуються наближеною рівністю

.

Якщо функція  диференційована в точці , то абсолютна похибка поперед-ньої формули наближено дорівнює абсолютній величині диференціала:

.

Відносна похибка визначається формулою



**4. Приклади розв’язання задач**

**Приклад 1**. Знайти диференціал функції .

Використаємо формулу :



**Приклад 2.** Знайти диференціал функції .

Використаємо формулу :



**Приклад 3.** Знайти диференціал функції .

а) при довільних значеннях  та .

Використаємо формулу :

.

б) при .

.

в) при , :

.

**Приклад 4.** Знайти значення диференціала функції  при , .

.





,

.

**Приклад 5.** Знайти наближене значення приросту функції при  і .

Маємо , .

Якщо  .

Істинне значення приросту



.

Отже, ;

.