Лекція 14. Означення функції багатьох змінних. Способи задання функції. Область визначення функції. Частинні похідні. Повний диференціал.

#### План

1. Основні поняття функції багатьох змінних, границя та неперервність. Способи задання функцій багатьох змінних. Лінії рівня.
2. Частинні похідні першого порядку. Диференціювання функції багатьох змінних першого порядку.
3. Частинні похідні вищих порядків. Диференціал ІІ-го порядку.
4. Повний диференціал. Градієнт.
5. Економічний зміст частинних похідних.
6. Оптимізація в економічних задачах.

*Основні твердження та поняття:* функція двох змінних, аргумент, область визначення, область значень, границя, неперервність, графік функції, лінія рівня (ізокрива) функції, частинні похідні першого, другого та вищих порядків, мішані похідні, неявно задана функція, повний диференціал, градієнт.

**1. Основні поняття функції багатьох змінних, границя та неперервність.**

Розглянемо деяку множину  впорядкованих пар чисел . Якщо кожній парі чисел  за певним законом відповідає число , то кажуть, що на множині  визначено функцію  від двох змінних  і  та записують .

Прикладом такої функції може бути площа прямокутника із сторонами  та , що знаходиться за формулою . Тут кожній парі значень  і  відповідає єдине значення площі , тоді функцію двох змінних можна записати формулою .

Змінна  називається залежною змінною (функцією), а змінні  та  - незалежними змінними (аргументами).

За аналогією з функцією однієї змінної  та функцією двох змінних  можна розглядати функцію, яка буде залежати від кількох незалежних змінних . У загальному випадку це можна записати у вигляді:



Тоді незалежні змінні  називають **аргументами**, а залежну змінну  - **функцією**.

***Означення****. Закон, за яким у відповідність значенням аргументів  ставиться деяке значення  називається* ***функцією****.*

***Означення.*** *сукупність значень  для яких вираз має зміст називається* ***областю визначення функції*** *і позначається  або , а значення які при цьому приймає залежна змінна, утворюють* ***область значень функції*** *( або ).*

Лінія, що обмежує область визначення називають її *межею*. Точки області, які не лежать на її межі, називаються внутрішніми. Область, яка містить одні внутрішні точки, називається *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то така область називається *замкненою*.

Для функції багатьох змінних справедливо багато понять і тверджень як і для функції однієї змінної. Зокрема, способи задання функції двох змінних.

Найчастіше використовують аналітичний спосіб, коли функція задається формулою. Наприклад, ; . Областю визначення такої функції вважається множина всіх тих точок площини, для яких задана формула має зміст.

У випадку графічного задання, функції двох змінних  відповідає деяка поверхня. Побудова графіків функції двох змінних часто пов’язана із значними труднощами. Тому для зображення користуються методом перерізів, який полягає в тому, що поверхню  перетинають фіксованими площинами  та  і за графіками кривих  та  визначають графік функції .



Мал. 60

Можна фіксувати не лише аргументи  чи , а й саму функцію . В цьому випадку відбувається перетин даної поверхні площинами , де  - довільне число, взяте з множини (області) значень  даної функції. Крива , що при цьому отримується називається ***лінією рівня*** (або ***ізокривою***) функції двох змінних. Цей термін запозичений з картографії, де лінією рівня називають ті лінії, на яких висота точок земної поверхні над рівнем моря стала.



Мал. 61

Лінії рівня часто зустрічаються на практиці. При сполученні на карті поверхні Землі точок з однаковими середньодобовою температурою або середньодобовим тиском, дістанемо відповідно *ізотерми* та *ізобари*, які є важливими даними для прогнозу погоди.

Аналогічно до означення границі функції однієї змінної пропонується і означення границі функції двох змінних. Спочатку введемо поняття  - околу заданої точки .

***Означення.*** *Множина всіх точок , координати яких задовольняють нерівність*

*,* (13.1)

*де  - відстань від точки  до , називається* ***- околом точки ****.*

Іншими словами,  - окіл деякої точки  - це всі внутрішні точки круга з центром ** і радіусом *.*

***Означення (за Коші або „на мові ”).*** *Число А* ***називається границею функції  в точці ****, якщо для будь-якого, як завгодно малого  знайдеться таке число , що для всіх точок  з області визначення  функції, які задовольняють умову , виконується нерівність .*

Використовують позначення:

 або . (13.2)

Поняття неперервності функції багатьох змінних визначається так само, як і для функції однієї змінної.

Розглянемо функцію двох змінних: . Візьмемо у ній деяку фіксовану точку з координатами  і надамо їй приросту . Тоді приріст функції дорівнює



***Означення.*** *Якщо*

** (13.3)

*то будемо говорити, що функція  є неперервною в точці .*

Дана формула означає, що нескінченно малим приростам аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції. Якщо ввести позначення



то формулу (13.3) можна переписати так:

. (13.4)

Тобто неперервність функції в даній точці означає, що її границя рівна значенню функції в цій точці.

Якщо функція  є неперервною в кожній точці області визначення, то вона є неперервною у всій області.

Для функції багатьох змінних, коли число аргументів не менше трьох, неперервність функції вводиться за допомогою формул. аналогічних (13.3) і (13.4).

Функції двох і більшого числа змінних часто використовуються в економічних дослідженнях: при прогнозування, вивченні попиту та пропозиції, аналізі виробничої діяльності тощо.

Важливим елементом мікро- та макроекономічної теорії раціонального ведення господарства є, з одного боку виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення продукції та послуг, а з іншого – технологічні процеси, пов’язані з виробництвом.

При вивченні економічних процесів у сучасному великомасштабному виробництві буває над звичайно важливим зібрати необхідну інформацію для побудови моделі, що враховує внутрішні особливості виробництва.

Подібні міркування лежать в основі теорії виробничих функцій. Виникнення цієї теорії прийнять відносити до 1928 року, коли з’явилася стаття „Теорія виробництва” американських вчених - економіста П. Дугласа і математика Д. Кобби. У ній була здійснена спроба визначити емпіричним способом вплив витраченого капіталу і праці на обсяг випущеної продукції переробленою промисловістю США. Поставивши, на основі статистичних даних, ряд задач (визначити клас функцій, який найкраще описує співвідношення між трьома вибраними характеристиками виробничої діяльності; знайти числові параметри, що задають конкретну функцію; порівняти одержані результати з фактичними даними) було запропоновано, для їх розв’язання, функцію виду

. (13.5)

Тут  - обсяг випущеної продукції. Це функція двох змінних :  - обсяг основного капіталу;  - витрати праці. Значення  - числові параметри, що задовольняють умову .

**2. Частинні похідні першого порядку. Диференціювання функції**

**багатьох змінних першого порядку.**

Для функції багатьох змінних можна ввести поняття похідної розглядаючи функцію , як функцію від , де - параметр, який фіксується (або функцію від , де - параметр, який фіксується)

***Означення.*** *Величина*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*називається*

|  |  |
| --- | --- |
| ***частинним приростом функції  по змінній .*** | ***частинним приростом функції  по змінній .*** |

Розглянемо відношення

.

***Означення.*** *Границю диференціального відношення  при  будемо називати* ***частинною похідною функції  у точці  по *** *і позначатимемо:*

**

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної функції двох змінних по  яка позначається одним із символів

*.*

Операція знаходження похідної  називається **диференціюванням функції  по аргументу **, а точка  називається **точкою диференціювання.** Частинна похідна

****

обчислюється як звичайна похідна по  припускаючи, що змінна  є сталою. Аналогічно обчислюється частинна похідна по , але сталою є вже . Тобто, частинних похідних є стільки, скільки аргументів містить функція. Щоб підкреслити, що ми диференціюємо функцію перший раз говорять: „знаходимо похідну першого порядку”.

***Завдання.*** Обчислити в точці  частинні похідні першого порядку функції 

Розв’язування:

 

 

**Теорема *(існування частинних похідних диференційовної функції)****. Якщо функція  диференційована в точці , то вона має в цій точці похідні  та  і*

**

Неважко перевірити, що коли функція має частинні похідні в точці, то вона буде неперервна в цій точці. Зворотне твердження не завжди вірне.

**3. Частинні похідні вищих порядків. Диференціал ІІ-го порядку.**

Частинні похідні  і  є функціями від тих же змінних, що й функція, тому можна обчислювати похідні від похідних першого порядку. Такі похідні називаються ***похідними другого порядку***.

Для функції двох змінних частинних похідних другого порядку буде чотири і вони обчислюватимуться за такими формулами:

 

 

Завдання. Знайти частинні похідні другого порядку від функції 

Розв’язування:

 

 

 

***Означення:*** *Частинні похідні другого порядку по різних аргументах називаються* ***мішаними похідними****.*

У нашому прикладі дві мішані похідні  є рівними. Це не випадковий результат, а наслідок твердження, яке ми приймемо без доведення.

**Лема1**: Якщо існують неперервні мішані похідні , то вони рівні між собою.

Аналогічно до похідних другого порядку вводяться частинні похідні третього порядку, як похідні від похідних другого порядку і так далі.

**4. Повний диференціал. Градієнт**

Якщо  і  розглядати як диференціали незалежних змінних, то  можемо записати у ***формі „повного диференціала”:***

 (13.6)

Якщо це співвідношення виконується, то говорять, що функція диференційована в точці .

Формула (13.6) показує, що для функції багатьох змінних поняття „функція диференційована” і „має частинні похідні першого порядку в цій точці”, власне кажучи, не є тотожними. Функція може мати частинні похідні в точці, одна з яких не є неперервною. Тоді для такої функції в цій точці рівність (13.6) не виконується.

Отже, для диференційованості функції багатьох змінних необхідно, щоб усі частинні похідні першого порядку були неперервними.

Нехай у функції   функції змінної . Тоді  є складною функцією. Поставимо питання про існування похідної  припустивши, що похідні по  і по  існують і неперервні. Зафіксуємо точку  і надамо їй приросту , тоді незалежні змінні  одержать прирости  і матиме місце формула:

.

Перейшовши до границі при  одержимо, що

.

Звідки

 (13.7)

***Означення. Градієнтом*** *функції  у точці М називається вектор, що має координати*

.

Тоді

.

Градієнт показує напрямок, уздовж якого значення функції зростає найбільше у даній точці.

**Завдання.** Обчислити градієнт функції  в точці *А*.

*Розвязання*

; .

; 

**Відповідь:** .

**5. Економічний зміст частинних похідних.**

Розглянемо виробничу функцію , що виражає витрати виробництва в залежності від кількості двох видів продукції  та , яка випускається. Нехай чинник  змінився на величину , тоді виробнича функція  зміниться на величину

.

Склавши відношення приросту функції  до приросту аргументу  отримаємо вираз , що виражає середній приріст виробничої функції на одиницю приросту чинника , або середні витрати виробництва на одиницю продукції . Здійснивши перехід до границі при  отримаємо граничні витрати виробництва на одиницю продукції , тобто

.

Провівши аналогічні міркування з чинником , отримаємо: .

**Еластичність виробничої функції ** **відносно чинників виробництва  та  встановлюється так:**

 - приблизно вказує відсотковий приріст виробничої функції (зниження) відносно до приросту чинника  на 1% за умови, що чинник  не змінюється;

 - приблизно вказує відсотковий приріст виробничої функції відносно до приросту чинника  на 1% за умови, що чинник  не змінюється.

**Завдання.** Для випуску деякого товару визначена виробнича функція  де  - чинники виробництва. Дослідити:

1. закон зміни виробничої функції за кожним чинником;
2. еластичність функції за кожним чинником;
3. коефіцієнт еластичності за чинниками при .

*Розв’язання*

1. Щоб визначити зміну виробничої функції за чинниками  та , треба знайти частинні похідні  та :

; 

1. Використаємо означення еластичності функції за даними чинниками:

; ,

де .

3) Обчислимо коефіцієнти еластичності при .

;



Тобто, із зростанням чинника  на 1% відбувається відносне зростання заданої виробничої функції приблизно на 0,89% (за умови стабільності чинника ), а при зростанні чинника  на 1% виробнича функція зростає приблизно на 0,26% (за умови стабільності чинника ).

Отже, на виробничу функцію  найбільший вплив має чинник .

***Зауваження*.** Від’ємне значення коефіцієнту еластичності показує зменшення виробничої функції при зростанні відповідного чинника.

*Наприклад*, якщо  - функція випуску продукції і , то зростання чинника  на 1% призводить до зниження випуску продукції на 0,08%.

**6. Оптимізація в економічних задачах**

Багато задач економіки тісно пов’язані з поняття оптимізації: оптимальний розподіл ресурсів та товарів, визначення мінімальних затрат та максимального прибутку тощо. Для розв’язання таких задач часть використовують функції багатьох змінних.

Нехай фірма випускає один товар обсягом  одиниць і використовує для його виробництва певні ресурси. Ведемо позначення:

 - обсяги річних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції;  - їх відповідні ціни (це сталі величини).

Зрозуміло, що витрати виробництва пов’язані з випуском продукції, тобто обсяг товару , що випускається, залежить від обсягу ресурсів , які використовуються у процесі виробництва. Цей зв'язок визначає деяка виробнича функція

.

***Означення. Доходом R фірми*** *за певний період часу називають добуток загального обсягу продукції , що випускається, на ціну (ринкову)  цієї продукції, тобто*

. (14.12)

***Означення.******Витратами С фірми*** *називають її загальні витрати за певний проміжок часу, тобто якщо* ***фактори виробництва*** * (обсяги ресурсів, які використовує фірма) та  (ринкові ціни на ці ресурси), то*

. (14.13)

***Означення. Прибутком Р фірми*** *за певний проміжок часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва, тобто*

. (14.14)

Формулу (14.14) можна ще записати у вигляді:

. (14.15)

У теорії фірми вважають, що якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни  вона випливу не має, тобто фірма з цінами «погоджується». Інші випадки функціонування фірми (в умовах чистої монополії, монополістичної конкуренції та олігополії) детально розглядаються в межах курсу мікроекономіки.

Основна задача багаторесурсної фірми полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві. З математичної точки зору дана задача зводиться до ***дослідження функції прибутку на екстремум***.

***Означення.*** *Набір ресурсів, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають* ***оптимальним****.*

*Завдання.* Деяка фірма випускає два види товарів у обсягах  та одиниць. Ціни на ці товари становлять відповідно  та  умовних грошових одиниць, а функція витрат має вигляд . Дослідіть значення максимального прибутку, що його може одержати фірма.

Розв’язання

Фірма випускає два види продукції. Використовуючи рівність (14.12) запишемо функцію, що виражатиме загальний дохід фірми:

.

Тоді, прибуток фірми описує функція двох змінних виду (14.14), тобто

.

Щоб знайти максимальне значення прибутку дослідимо утворену функцію двох змінних на екстремум. Для цього знайдемо частинні похідні першого порядку та прирівняємо їх до нуля.

; .

Тоді, необхідні умови існування екстремуму запишемо у вигляді системи:

, або .

Розв’язок даної системи – це критична точка . Для того, щоб перевірити достатні умови екстремуму знайдемо значення частинних похідних другого порядку та обчислимо їх значення в критичній точці. При цьому використаємо позначення (14.4)

;

;

.

Тоді, значення визначника (14.5) буде:

.

Враховуючи, що  і  робимо висновок про те, що точка  - точка максимуму функції прибутку.

Максимальне ж значення самого прибутку – це значення функції прибутку в точці максимуму, тобто:

.

Відповідь:  умовних грошових одиниць.

Розглянемо ще одне завдання, що пов’язане з дослідженням на умовний екстремум.

*Завдання.* Задано виробничу функцію, що залежить від двох змінних: , де  - витрати основних фондів,  - витрати людської праці, а також задано відповідні ціни на ресурси  та  умовних грошових одиниць. Дослідіть, якого значення мають набути величини  та  для того, щоб забезпечити мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції .

Розв’язання

Виробнича функція залежить від двох величин, тому витрати виробництва, враховуючи (14.13), матимуть вигляд

.

Дану функцію треба дослідити на мінімум.

Оскільки обсяг продукції фіксований, то , тобто . Отже додатковою умовою є рівність , при , .

Дослідимо функцію на умовний екстремум методам ***зведення до задачі про безумовний екстремум***. Він полягає в тому, що необхідно спочатку розв’язати саму умову відносно однієї зі змінних, а потім підставити її розв’язок у функцію двох змінних, отримавши при цьому нову функцію, яка залежатиме вже від однієї змінної та дослідити її на екстремум.

Розв’яжемо умову:

;

;

;

.

Підставимо отримане значення у функцію витрат:

.

Для дослідження функції на екстремум застосуємо другу похідну. Значення похідної першого порядку буде:

.

Знайдемо критичні точки прирівнявши похідну до нуля () та розв’язавши отримане рівняння:

;

;

;

.

За умовою завдання (з економічних міркувань) , , отже  - сторонній корінь. Знайдемо знак похідної другого порядку в критичній точці:

.

.

Отже, при  друга похідна додатна. А з другої ознаки дослідження функції на екстремум слідує, що в даній точці функція досягає мінімуму.

Враховуючи, що  знаходимо

.

Точка мінімуму функції має координати , а мінімум функції витрат:

 умов. грош. од.

Відповідь:  умов. грош. од.

**Питання для самоконтролю**

1. Сформулюйте поняття точок екстремуму (максимуму, мінімуму) функції двох змінних.

2. Вкажіть , чим відрізняються поняття «точки екстремуму» та екстремуми функції?

3. Сформулюйте означення критичних (стаціонарних) точок.

4. В чому полягають необхідні умови існування екстремуму?

5. Як формулюються достатні умови екстремуму функції двох змінних?

6. За яким алгоритмом досліджують функцію двох змінних на екстремум?

7. Опишіть покроково процес дослідження функції двох змінних на найбільше та найменше значення.

8. Що розуміють під поняттям умовного екстремуму функції двох змінних.

9. У чому полягає суть методу невизначених множників Лагранжа для дослідження функції двох змінних на умовний екстремум?

10. Поясніть, як використовують повний диференціал функції в наближених обчисленнях?

11. Сформулюйте математичні означення економічних понять «дохід», «витрати», «прибуток», «оптимальний прибуток».