Лекція 15. Границя і неперервність функції багатьох змінних. Поняття про дослідження функції багатьох змінних на екстремум, умовний екстремум.

План

1. Максимум та мінімум функції багатьох змінних. Дослідження функції двох змінних на екстремум.

2. Найбільше і найменше значення функції двох змінних.

3. Умовний екстремум функції двох змінних.

4. Застосування диференціального числення функцій багатьох змінних до наближених обчислень.

*Основні твердження та поняття*: функція багатьох змінних; функція двох змінних; частинні похідні; максимум (мінімум) функції двох змінних; точки екстремуму; екстремуми функції; необхідні та достатні умови існування екстремуму; критичні точки (стаціонарні; підозрілі на екстремум); найбільше (найменше) значення функції; умова (зв’язок); умовний та безумовний екстремум; метод Лагранжа; функція Лагранжа; визначник; наближені обчислення; похибки наближення; дохід; витрати; прибуток; оптимальний прибуток; фактори виробництва.

**1. Максимум та мінімум функції багатьох змінних. Дослідження функції двох змінних на екстремум**

Вище зазначалося, що для функції багатьох змінних справедливо багато понять і тверджень як і для функції однієї змінної. Це стосується і екстремальних точок та екстремумів функції. Проілюструємо дані поняття на прикладі функції двох змінних.

Розглянемо функцію двох змінних ** і деяку точку **.

***Означення. Максимумом функції*** * називається така величина  цієї функції, яка більша за всі значення, що їх набуває дана функція в будь-яких точках, достатньо близьких до точки .*

Інакше кажучи, функція  має в точці ** максимум, якщо виконується умова

**, (14.1)

для достатньо малих ** та ** за абсолютною величиною.

Аналогічно формулюють і означення мінімуму функції, тільки умова його існування набуває виду:

**. (14.2)

***Означення.*** *Максимуми і мінімуми функції двох чи більше змінних називаються* ***екстремумами функції,*** *а точка , в якій функція має екстремум, називається* ***точкою екстремуму функції****.*

Виділяють необхідні та достатні умови існування екстремуму.

***Необхідні умови існування екстремуму***. *Якщо функція* * має екстремум в точці , то кожна її частинна похідна першого порядку дорівнює нулю або не існує в цій точці, тобто*

 і *.* (14.3)

***Означення.*** *Точки, в яких частинні похідні першого порядку функції двох чи більше змінних дорівнюють нулю або не існують називаються* ***критичними (стаціонарними) точками*** *або* ***точками, підозрілими на екстремум****.*

Необхідні умови існування екстремум дозволяють лише знаходити критичні точки. За допомогою ж достатніх умов існування екстремуму можна перевірити кожну з критичних точок та дослідити, який саме екстремум – мінімум чи максимум.

***Достатні умови існування екстремуму.*** Нехай функція  в деякому околі стаціонарної точки  має неперервні частинні похідні другого порядку, причому

, , . (14.4)

Запишемо визначник

. (14.5)

Тоді:

1) якщо , то в точці  функція  має екстремум, причому при  - максимум, а при  - мінімум;

2) якщо , то в точці  екстремуму немає;

3) якщо  - так званий сумнівний випадок, тобто екстремум в точці може існувати, а може і не існувати. В цьому випадку потрібно використовувати іншу достатню ознаку.

Узагальнюючи вищесказане, бачимо, що для того, щоб дослідити функцію двох змінних **на екстремум необхідно виконати ряд послідовних дій.

***Схема дослідження функції двох змінних на екстремум***

1. Знайдіть частинні похідні першого порядку.

2. Знайдіть критичні точки, тобто перевірте виконання необхідної умова існування екстремуму: , .

3. Обчисліть значення частинних похідних другого порядку в критичних точках.

4. Для кожної критичної точки обчисліть значення виразу  та зробіть висновки на базі достатньої умови існування екстремуму***.***

*Завдання.* Дослідити на екстремум функцію .

Розв’язання

Оскільки дана функція залежить від двох змінних, то для дослідження її на екстремум скористаємось запропонованою схемою.

1) Знайдемо значення частинних похідних першого порядку функції **:

; .

2) Прирівняємо частинні похідні до нуля та знайдемо критичні (стаціонарні) точки. Матимемо систему:

.

Розв’язавши її отримаємо, що . Отже, в точці (1;2) функція може мати екстремум.

3) Знайшовши частинні похідні другого порядку

; ; .

отримуємо числові значення, а не вирази зі змінними. Тобто, в даному конкретному випадку обчислювати значення частинних похідних в стаціонарній точці (1;2) не потрібно.

4) Вводимо позначення:

; ; .

5) Обчислимо значення виразу  та зробимо відповідні висновки враховуючи достатні умови існування екстремуму.

.

Оскільки  та , то точка (1;2) – точка максимуму функції .

Тоді, екстремум функції знайдемо підставивши в неї координати екстремальної точки:

.

Відповідь: .

**3. Найбільше і найменше значення функції двох змінних**

З поняттям екстремуму функції двох змінних тісно пов’язані й її найбільші та найменші значення.

Для того щоб знайти найбільше або найменше значення неперервної функції  в обмеженій замкнутій області , потрібно знайти всі максимуми або мінімуми функції, які досягаються в середині цієї області, а також найбільше або найменше значення функції на межі цієї області. Найбільше з усіх цих чисел і буде шуканим найбільшим значенням, а найменше – найменшим.

Розглянемо особливості дослідження на найбільше та найменше значення функції двох змінних у замкненій області на конкретному прикладі.

*Завдання.* Дослідити функцію  на найбільше та найменше значення в крузі .

Розв’язання

Спочатку знайдемо всі максимуми або мінімуми даної функції. Для цього знайдемо значення її частинних похідних першого порядку:

; .

Знайдемо критичні точки прирівнявши частинні похідні до нуля та розв’яжемо систему:

.

Отже, критичною є лише одна точка з координатами . Значення функції в цій дочці .

***Зауваження.*** При дослідженні на найбільше і найменше значення функції в області не потрібно встановлювати, який саме екстремум має критична точка (максимум чи мінімум) адже розглядаються всі максимуми і мінімуми з середини замкненої області.

Тепер дослідимо поведінку функції на межі області, тобто на колі . Перепишемо дане рівняння у вигляді  , а це можливо якщо . Підставивши дане значення у вираз , отримаємо нову функцію, що залежатиме лише від однієї змінної:

.

Дослідимо дану функцію на найбільше та найменше значення. Для цього знайдемо похідну першого порядку , та знайдемо критичну точку прирівнявши її до нуля. Тоді:

, тобто .

Знайдемо значення функції в критичній точці та на кінцях відрізку.

; ; .

При даному значенні аргументу  функція , а залежна змінна . Тобто межі області належать точки  та .

Порівнюючи дані значення та отримане раніше  бачимо, що:

, а .

Відповідь: , .

**2. Умовний екстремум функції двох змінних**

Різноманітні економічні дослідження часто потребують розв’язання задачі про знаходження екстремумів функції багатьох змінних за наявністю додаткових умов зв’язку на її аргументи. Такі екстремуми називаються ***умовними***. Вони часто використовуються при дослідженні оптимізації багатьох економічних та соціальних проблем.

Нехай функція  задана на області визначення , що в свою чергу, містить деяку лінію , рівняння якої залежить від двох змінних і в загальному вигляді записується .

Якщо необхідно знайти екстремум функції в області , то його називають ***безумовним екстремумом***, а у випадку, коли визначають екстремум функції на лінії , що належить області , говорять про ***умовний екстремум***. Остання назва пов’язана з тим, що на змінні  та  накладено додаткову умову .

***Означення.*** *Функцію виду , яка задає лінію  області визначення*  функції *, називають* ***умовою*** *(або* ***зв’язком****).*

Дослідити функцію на умовний екстремум можна двома методами:

***1) метод зведення до задачі про безумовний екстремум*** – використовується у випадку, коли рівняння  розв’язне відносно однієї зі змінних. Тоді, підставивши його розв’язок у функцію двох змінних отримаємо функцію однієї змінної, яку можна дослідити на екстремум за відомою схемою;

**2)** ***метод невизначених множників Лагранжа*** – знаходження умовного екстремуму функції зводиться до відшукання безумовного екстремуму так званої *функції Лагранжа* (функції трьох змінних), яку записують за допомогою сталого множника  у вигляді

, (14.6)

та яка задовольняє систему

 або  (14.7)

***Схема дослідження функції двох змінних на***

***умовний екстремум методом невизначених множників Лагранжа***

1. Запишіть функцію Лагранжа у вигляді (14.6).

2. Знайдіть критичні точки умовного екстремуму розв’язавши систему (14.7), що виражає необхідні умови існування екстремуму.

3. Перевірте в кожній критичній точці достатні умови існування умовного екстремуму:

а) якщо в деякій точці  визначник третього порядку

 (14.8)

додатній (), то точка  - ***точка максимуму***, а ***максимум функції*** буде дорівнювати значенню функції двох змінних в даній точці, тобто:

; (14.9)

б) якщо , тоді точка  - ***точка мінімуму***, а ***мінімум функції*** :

. (14.10)

Розглянемо застосування даного методу на конкретному завданні.

*Завдання.* Дослідіть функцію  на екстремум при умові, що .

Розв’язання

Проведемо дослідження методом невизначених множників Лагранжа. Функція, що є умовою (зв’язком) повинна дорівнювати нулю (за означенням), тому перепишемо її у вигляді:

.

Проаналізувавши завдання бачимо, що

, .

Запишемо функцію Лагранжа використовуючи рівність (14.6):

.

Знайдемо критичні точки. Для цього спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку від функції :

; ; .

та складемо систему виду (14.7):



Виразимо з першого рівняння множник  та підставимо його значення в друге рівняння системи:

    

З двох останніх рівнянь системи методом почленного додавання знайдемо значення змінних  (до другого рівняння додамо третє) та  (від другого віднімемо третє рівняння):

, та ,

, ,

, ,

, .

Отже, є чотири критичні точки: , , , .

Для того, щоб перевірити достатні умови існування екстремуму складемо визначник (14.8) в довільній точці  попередньо знайшовши значення його елементів - частинних похідних першого порядку функції  та частинних похідних другого порядку функції Лагранжа .

Оскільки , то:

; .

Враховуючи раніше знайдені частинні похідні ,  та значення невизначеного множника  матимемо:

;

;

.

Отже, згідно з (14.8) визначник  набуде вигляду:



.

Перевіримо значення даного визначника в кожній критичній точці та, використовуючи достатні умови (14.9)-(14.10), знайдемо умовні екстремуми функції.

1) Оскільки в точці  визначник додатній

,

то в ній існує умовний екстремум (максимум). Тоді максимум функції, що досягається в даній точці набуде значення:

.

Аналогічно перевіряємо й інші три критичні точки.

2)  - точка мінімуму функції тому, що

.

Тоді мінімум функції:

.

3) В точці  досягається мінімум функції, оскільки

 та .

4) Для :

 та .

Відповідь: при умові  для функції  існує екстремум, причому

, .

**3. Застосування диференціального числення функції багатьох змінних до наближених обчислень**

Розглянемо функцію двох змінних . Дана функція буде мати похідну в довільній точці , тобто буде диференційованою в цій точці, якщо виконуватиметься співвідношення (14.3) – формула ***«повного диференціала»***:

.

Повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційовної функції. При цьому виконується наближена рівність

 або . (14.11)

Рівність (14.11) широко використовується в наближених обчисленнях, оскільки диференціал функції обчислити простіше, ніж її повний приріст.

*Завдання.* Обчислити наближено (за допомогою повного диференціалу) значення

.

Розв’язання

Використовуючи запропоноване в умові значення  розглянемо функцію, що йому відповідає, у загальному вигляді:

.

Застосуємо формулу (14.11) поклавши  та  - найближчі цілі значення для  та . Тоді, похибку наближення  знайдемо як різницю точного та наближеного значення величини, тобто

.

Аналогічно знаходимо похибку наближення :

.

Обчисливши частинні похідні  та  отримаємо:

.

Підставимо числові значення:

.

Тобто,



Відповідь: .