Лекція 17. Основні методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, інтегрування підстановкою, інтегрування частинами.

План

1. Безпосереднє інтегрування.

2. Інтегрування методом заміни змінної (підстановкою).

3. Метод інтегрування частинами.

**1. Безпосереднє інтегрування**

Під безпосереднім інтегруванням розуміють такий спосіб знаходження інтегралу, коли шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей невизначеного інтегралу приходять до одного чи декількох табличних інтегралів.

**Приклад 1.** Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Для знаходження інтеграла використаємо формулу з таблиці інтегралів



Отримаємо



**Приклад 2.** Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Використаємо властивість степеня з від’ємним показником () і знайдемо невизначений інтеграл від степеневої функції:

.

**Приклад 3**. Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Використовуємо властивість степеня з дробовим показником

 і знайдемо невизначений інтеграл від степеневої функції:

.

**Приклад 4**. Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Поділивши почленно кожний доданок чисельника на знаменник, отримаємо



**2. Інтегрування методом заміни змінної**

**(методом підстановки)**



Обчислити заданий інтеграл безпосереднім інтегруванням можливо не завжди, а іноді це пов’язано з великими труднощами. В таких випадках застосовують інші прийоми. Одним з найбільш ефективних методів є метод заміни змінної інтегрування. Суть даного методу полягає в тому, що шляхом введення нової змінної інтегрування вдається звести заданий інтеграл до нового інтегралу, який порівняно легко береться безпосередньо. Розглянемо цей метод.

Нехай функція  – неперервна функція і потрібно знайти , причому безпосередньо важко підібрати таку функцію , щоб  або

.

Зробимо заміну змінної інтегрування  за формулою

,

де функція монотонна, має неперервну похідну і існує складена функція (а відповідно і ). Застосувавши до  формулу диференціювання складеної функції, отримаємо



Але , тому

.

Таким чином, функція  є первісною для функції , і тому

.

Враховуючи, що , отримали формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі



**Приклад 5**. Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Нехай .

Отримаємо інтеграл, який можна знайти безпосередньо (за таблицею інтегралів) відносно змінної .

=

Можна записати таким чином:

.

**Приклад 6**. Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Зробимо підстановку , тоді .

Отримаємо такий інтеграл .

Можна записати таким чином:



**Приклад 7**. Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Зробимо підстановку , тоді .

Можна записати таким чином:



Під час знаходження інтегралу використовуємо властивість степеня з дробовим показником, а саме



**Приклад 8.** Знайти інтеграл  .

Розв’язання.





**3. Метод інтегрування частинами**

Виведемо формулу інтегрування частинами.

Нехай функції  і  мають неперервні похідні на деякому проміжку.

Відомо, що 

Знайдемо диференціал добутку цих функцій:





Так як за умовою функції  і  неперервні, можна про інтегрувати обидві частини даної рівності, отримаємо:



або .

Але , тоді

 (1)

В правій частині формули (1) постійну інтегрування не пишуть, тому що вона фактично присутня в інтегралі . Формула (1) називається ***формулою інтегрування частинами.***

Суть методу інтегрування частинами відповідає його назві. Діло в тому, що при обчисленні інтеграла цим методом підінтегральний вираз  записується у вигляді добутку множників  і ; при цьому  завжди входить до . В результаті отримуємо, що заданий інтеграл знаходять частинами: спочатку знаходять , а потім . Природно, що цей метод можна застосовувати лише у випадку, якщо задача знаходження вказаних двох інтегралів більш простіша, ніж знаходження заданого інтегралу.

При знаходженні інтегралів методом інтегрування частинами головним є правильне розбиття підінтегрального виразу на множники  і .

Метод інтегрування частинами застосовують при інтегруванні функцій, що містять добуток, логарифми, обернені тригонометричні функції.

Загальних підходів по даному питанню не існує. Однак для деяких типів інтегралів, що знаходяться методом інтегрування частинами, зробити це можливо.

1. В інтегралах виду

, , ,

де - многочлен відносно , - деяке число, позначають , а решта множників за .

1. В інтегралах виду

, , ,

, 

позначають , решта множників – за .

1. В інтегралах виду

 , ,

де  і  – числа, за  можна взяти будь яку з функцій  або 

Тобто, знаходження  зводиться до обчислення  який повинен виявитись більш простим або табличним інтегралом.

При використанні методу інтегрування частинами підінтегральну функцію представляють у вигляді добутку двох множників  та знаходять  Якщо одержаний інтеграл  виявився складним, то можна спробувати поміняти значення 

**Приклад 9.** Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Для знаходження даного інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами .

Матимемо



**Приклад 10.** Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Для знаходження даного інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами .



**Приклад 11.** Знайти інтеграл .

Розв’язання.

Для знаходження даного інтегралу використаємо формулу інтегрування частинами .

