Лекція 2. Операції над матрицями та їх властивості. Обернена матриця.

План

1. Означення матриці. Види матриць.
2. Дії над матрицями.
3. Обернена матриця.
4. Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень.
5. Ранг матриці. Знаходження рангу з використанням елементарних перетворень.
6. Використання матриць при розв’язуванні завдань професійного спрямування.

**1. Означення матриці. Види матриць**

***Означення. Матрицею*** *називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з  рядків та стовпців*. Позначається

. (1.9)



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

Вперше матриці, які називалися „чарівним квадратом”, зустрічалися ще в древньому Китаї. Основною сферою їх застосуванням було розв’язання лінійних рівнянь. „Чарівні квадрати” були відомі також і арабським математикам. Приблизно тоді ж і з’явився принцип додавання матриць.

Сам термін **«матриця»** ввів у 1850 році відомий англійський математик Джеймс Джозеф Сільвестр (1814 - 1897).

Відомий своїми працями в теорії матриць, теорії чисел, комбінаториці майбутній вчений почав вивчати математику в Сент-Джон-коледжі Кембріджського університету в 1831 році. Проте довготривалі хвороби та небажання міняти віросповідання (що було основною умовою для отримання ступеня бакалавра в тогочасній Англії) привели до того, що лише в 1841 році він отримав бажані ступені бакалавра та магістра в Трініті-коледжі Дубліна. І відразу ж Сильвестр ненадовго переїжджає до США щоб стати професором в Університеті Вірджинії. Повернувшись до Англії тісно спілкується зі своїм другом, англійським математиком Артуром Кєлі (1821 – 1895), обговорюючи теорію інваріантів. В 1877 році Дж. Сильвестр знову їде до Америки, стає першим професором математики в Університеті Джона Хопкінса та засновує «Американський математичний журнал» (1878).

Повернувшись до Англії в 1883 році очолює кафедру геометрії в Оксфордському університеті. На цій посаді він і перебуває до кінця свого життя.

Іменем Сильвестра назва бронзова медаль (Медаль Сильвестра), яка вручається з 1901 року Королівським товариством за видатні заслуги в математиці.

Якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців, то така матриця називається ***квадратною***.

|  |  |
| --- | --- |
| На прикладі | У загальному |
| або | , при |

***Означення. Визначником квадратної матриці*** *називається число*:

. (1.10)

Розглянемо види матриць.

1. Якщо в матриці поміняти місцями рядки та стовпці, то отримаємо ***транспоновану матрицю.***

|  |  |
| --- | --- |
| На прикладі | У загальному |
| Якщо , то | Якщо,то  (1.11) |

2. Квадратна матриця називається ***симетричною,*** якщо .

|  |  |
| --- | --- |
| На прикладі | У загальному |
|  | , де , , , ... |

1. Якщо у квадратній матриці всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, то така матриця називається ***діагональною***.

|  |  |
| --- | --- |
| На прикладі | У загальному |
|  |  |

4. Якщо у діагональній матриці елементи головної діагоналі дорівнюють одиницям, то матриця називається ***одиничною*** і позначається :

. (1.12)

5. Матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається ***особливою*** (або ***виродженою***). Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, то матриця ***неособлива*** (***невироджена***).

Наприклад, матриця  - не особлива, бо , а матриця  - особлива, бо .

6. Матриця, яка складається тільки з одного рядка, називається ***матрицею – рядком***: . Аналогічно матриця, яка складається з одного стовпця, називається ***матрицею – стовпцем***.

|  |  |
| --- | --- |
| На прикладі | У загальному |
| Матриця-рядок  Матриця-стовпець |  |

7. Дві матриці вважаються ***рівними***, якщо вони мають однакову кількість рядків і стовпців, а їх відповідні елементи рівні.

8. Дві матриці називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримана з іншої шляхом виконання скінченого числа елементарних перетворень.

9. Припустимо, що задана будь – яка квадратна матриця  - порядку

.

Виберемо довільний елемент  цієї матриці і викреслимо із неї той рядок і той стовпець, на перетині яких міститься даний елемент. В результаті дістанемо матрицю  - го порядку, яку називають ***субматрицею*** матриці , що відповідає елементу , та позначають її . Наприклад, для матриці третього порядку існує дев’ять субматриць (за кількістю елементів вихідної матриці). Визначник субматриці є мінором даної матриці.

**2. Дії над матрицями**

Над матрицями можна виконувати ряд операцій.

*1.* ***Додавання (віднімання) матриць***. Додавати і віднімати можна матриці однакових розмірностей (порядків). Для того, щоб додати (відняти) дві матриці, необхідно додати (відняти) їх відповідні елементи. Нехай

 і , тоді

. (1.13)

Для операцій додавання (віднімання) матриць істинними є такі властивості:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. , де ;

6. ;

7. .

***2. Множення матриці на число***. Щоб помножити матрицю на число, необхідно всі елементи цієї матриці помножити на дане число, тобто

. (1.14)

*Завдання 1.* Обчисліть значення виразів , , для двох даних матриць

 та .

Розв’язання

Щоб обчислити суму двох матриць , згідно з формулою (2.13), необхідно до елементів матриці А додати відповідні елементи матриці В.

.

Різницю двох матриць отримаємо віднявши їх відповідні елементи. Тому

.

Значення виразу  можна отримати послідовно. Спочатку всі елементи матриці *А* помножити на число «2», а всі елементи матриці В – на число «3». Лише після цього записати нову матрицю, елементами якої будуть суми відповідних елементів нових матриць 2*А* та 3*В*.

Вірним буде й такий спосіб оформлення розв’язання:



Відповідь: ; ; 

***3. Множення матриці на матрицю***. Для того, щоб помножити матрицю  на матрицю , необхідно, щоб вони були ***узгодженими*,** тобто щоб кількість стовпців матриці  дорівнювала кількості рядків матриці .

***Означення.******Добутком матриці  на матрицю *** *називається така матриця , у якої елемент  дорівнює сумі добутків елементів - того рядка матриці  на відповідні елементи - того стовпця матриці , тобто .*

*Завдання 2*. Дослідіть, чи можна помножитизадані матриці. У випадку стверджувальної

відповіді виконайте множення.

а)  і ;

б)  і .

Розв’язання

**а)** Квадратні матриці одного порядку завжди є узгодженими (бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої), тому можемо виконувати операцію множення матриці на матрицю.

Для цього елементи першого рядка першої матриці *А* множимо на відповідні

елементи першого стовпця другої матриці *В* і знаходимо їх суму:

.

Таким чином, число 19 є першим елементом матриці добутку, яке записуємо на

місце .

*Зауваження 3.* Зазначимо, що місце нового елемента результуючої матриці

визначається індексом, де перша цифра вказує на номер рядка першої матриці, а

друга – на номер стовпця другої матриці, що множаться. Тобто, елемент 

отримали помноживши другий рядок матриці А на перший стовпець матриці В.

Процес знаходження матриці добутку пропонуємо записати так:



**б)** Дані матриці є узгодженими, бо кількість стовпців матриці  дорівнює 2 та кількість рядків матриці  також дорівнює 2. Отже, ми можемо множити дані

матриці використовуючи міркування, аналогічні до пункту а) даного завдання:



Відповідь: а) ; б) .

Для операції множення матриць справедливими є такі властивості:

1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. ;

6. ;

7. .

**3. Обернена матриця**

Розглянемо систему рівнянь:

. (1.15)

Нехай

 - матриця, що складається з коефіцієнтів системи, що знаходяться біля невідомих;

 - матриця-стовпець вільних членів;

 матриця-стовпець невідомих системи.

Систему рівнянь (1.15) запишемо у матричній формі:

 (1.16)

***Означення.*** *Матриця  називається* ***оберненою*** *до матриці , якщо виконується умова:*

** (1.17)

*Зауваження 4.* Обернена матриця існує тільки для квадратної матриці, визначник якої не дорівнює нулю.

**Для того, щоб знайти обернену матрицю, необхідно**:

1) обчислити визначник даної матриці ;

2) обчислити алгебраїчні доповнення  всіх елементів даної матриці ;

3) користуючись формулою, знайти обернену матрицю:

, (1.18)

де  - союзна матриця, тобто

 (1.19)

1. виконати перевірку .

*Задача 3.* Для даної матриці  знайдіть обернену матрицю .

Розв’язання

Процес знаходження оберненої матриці виконаємо поетапно з використанням формул (1.18) , (1.19).

1) Обчислимо визначник даної матриці :

.

2) Обчислимо алгебраїчні доповнення  всіх елементів даної матриці .

; ;

; ;

; ;

;

;

.

3) Використаємо формули (2.18) та (2.19) для запису оберненої матриці:

.

4) Перевіримо, чи дійсно отримана матриця є оберненою до даної.



Відповідь: .

**4. Знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень**

Обернену матрицю до матриці *n*-го порядку можна знайти і за допомогою елементарних перетворень. Для цього записуємо матрицю, перші *n* стовпців якої – це дана матриця *А*, а наступні *n* стовпців, які відділені вертикальною рискою від даної, є одиничною матрицею *Е*. Провівши ряд елементарних перетворень, отримаємо запис, де на першому місці стоїть одинична матриця *Е*, а матриця, відокремлена рискою, і буде шуканою оберненою матрицею: .

*Завдання 18.* Для даної матриці  знайдіть обернену за допомогою

елементарних перетворень.

Розв’язання

Запишемо матрицю  і проведемо елементарні перетворення



В результаті проведених елементарних перетворень матриця А перетворилась на одиничну, а одинична на обернену .

Відповідь: .

**5. Ранг матриці. Знаходження рангу матриці з використанням**

**елементарних перетворень**

Нехай задано матрицю  розмірності (число рядків даної матриці, число стовпців). Виділимо у матриці будь-які  рядків і стільки ж стовпців, де число, не більше чисел  і , тобто .

Нагадаємо означення мінору.

***Означення.*** *Визначник порядку , що складається з елементів, які стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається* ***мінором го порядку матриці*** *.*

***Означення****.* ***Рангом*** *матриці  (позначається ) називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.*

Безпосередньо з означення випливає, що:

1. ранг існує для будь-якої матриці , причому ;
2.  тоді і тільки тоді, коли  (всі елементи матриці дорівнюють нулю – ***нулева матриця***);
3. для квадратної матриці го порядку ранг дорівнює  тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

**Ранг** матриці **можна знайти методом обрамлення**:

* + якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці ) дорівнюють нулю, то ;
  + якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то ;
  + якщо хоч один з мінорів другого порядку відмінний від нуля, то досліджуємо мінори третього порядку і т.д.;
  + продовжуємо так доти, поки або всі мінори порядку дорівнюють нулю, або мінорів порядку  не існує, тоді .

*Задача 4.* Дослідіть значення найбільшого, відмінного від нуля порядку мінору матриці

.

Розв’язання

Викресленням будь – якої кількості рядків і стовпців неможливо одержати із заданої матриці квадратну матрицю порядку вище четвертого. Звідси випливає, що її ранг не може бути більше чотирьох.

Оскільки у даній матриці є мінори першого порядку (елементи матриці), відмінні від нуля, то виділимо мінори другого порядку і перевіримо, чи є серед них відмінний від нуля. При записі враховуємо, що  - мінор, де  - порядок мінору,  - порядковий номер при обчисленні. Починаємо із лівого верхнього кута:

; .

Це означає, що ранг матриці дорівнює 2, або більший за 2. Необхідно перевірити, чи існує хоч один мінор третього порядку, що обрамляє (містить в собі) мінор , відмінний від нуля. Виділимо мінор третього порядку:

.

Це означає, що ранг матриці дорівнює 3 або більший 3. Виділимо мінор четвертого порядку, що обрамляє (містить в собі) мінор . Він буде складатися з стовпців першого, другого, третього та четвертого:

;

Аналогічно обчислюємо ще один мінор четвертого порядку, що складається з стовпців першого, другого, третього, п’ятого та обрамляє мінор :

.

Отже, оскільки всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, то .

Відповідь: .

Обчислити ранг матриці можна і за допомогою елементарних перетворень.

**Теорема.** *Ранг матриці не змінюється при лінійних операціях з її рядками.*

Доведення. Лінійні операції з рядками довільної матриці приводять до тих самих лінійних операцій з рядками довільної субматриці. Проте при лінійних операціях з рядками квадратних матриць визначники цих матриць отримують один з одного множенням на число, відмінне від нуля. Звідси нульовий визначник залишається нульовим, а відмінний від нуля – відмінним від нуля, тобто не може змінитися найвищий порядок відмінного від нуля визначника субматриць (мінору). Не впливає, очевидно, на ранг матриці й перестановка стовпців, оскільки така перестановка може впливати лише на знак відповідних визначників.

Із розглянутої теореми виходить, що перетворені матриці мають той самих ранг, що і вихідні. Тому ранг основної матриці системи рівнянь першого степеня дорівнює числу одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці.

*Задача 5*. Обчисліть ранг матриці  за допомогою елементарних

перетворень.

Розв’язання

Використаємо запис із знаком , який вказує, що з’єднані ним матриці одержуються одна з одної елементарними перетвореннями, а тому вони мають один і той самий ранг.



Над вихідною матрицею провели такі перетворення:

1) першу перетворену матрицю отримаємо із вихідної, віднявши від третього рядка перший, помножений на 2 і записавши результат на місце третього рядка;

2) другу перетворену матрицю отримаємо, поділивши другий стовпчик на 2;

3) третя перетворена матриця - від першого стовпчика віднімемо другий, помножений на 3, і запишемо результат на місце першого стовпця; від третього стовпця віднімемо другий і запишемо на місце третього стовпця; від четвертого стовпця віднімемо другий, помножений на 2, та запишемо на місце четвертого стовпця;

4) четверта – до третього рядка додаємо другий, помножений на 3, і записуємо на місце третього рядка;

5) наступна – перший стовпець поділимо на 2;

6) наступна – до третього стовпця додамо перший і запишемо на місце третього, а від четвертого віднімемо перший і запишемо на місце четвертого;

7) остання матриця – поміняємо місцями перший і другий стовпець.

З утвореної матриці можна виділити субматрицю другого порядку, визначник якої не дорівнює нулю. Тому ранг вихідної матриці .

Відповідь: ранг матриці дорівнює 2.

**6. Використання матриць при розв’язуванні задач професійного напрямку**

Матриці дають змогу скорочувати записи та застосовувати однакові міркування для різних об’єктів, тобто приводять до унаочнення, спрощення і компактності обчислень.

*Завдання 21*. Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому

сировину трьох типів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею

,

де  - кількість одиниць сировини -го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції -го виду. План щоденного випуску продукції передбачає 90 одиниць продукції першого виду і 120 одиниць продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 8, 5 і 10 одиниць. Дослідіть загальні витрати сировини V, необхідної для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість С цієї сировини.

Розв’язання

Запишемо вихідні дані задачі у вигляді матриць:

 - витрати сировини (три типи) на виробництво продукції двох видів;

 - план щоденного випуску продукції;

 - вартість одиниці кожного типу сировини.

Загальні витрати сировини планового випуску продукції можна знайти як добуток витрат сировини та плану щоденного випуску продукції, тобто

.

Отже, для щоденного випуску продукції використовується 930, 390 і 540 одиниць сировини першого, другого та третього типів відповідно.

Загальну вартість сировини знайдемо як добуток вартості одиниці кожного типу сировини на загальні витрати сировини, тобто



Відповідь: ; .

За допомогою матриць формулюють та розв’язують спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу, яка була розроблена у 1936 році американським економістом В. Леонтьєвим. Мета балансового аналізу – відповісти на питання: яким має бути обсяг виробництва кожної з  галузей), щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? Вважається, що кожна з галузей випускає лише один певний вид продукції та потребує, в процесі виробництва, продукції, виготовленої в інших галузях. Тобто, кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з іншого – як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції. При цьому припускається, що співвідношення витраченої та випущеної продукції є сталим.

У матричному вигляді так звану ***модель Леонтьєва*** (***рівняння лінійного міжгалузевого балансу***) записують:

, (1.20)

де  - обсяг валової продукції - ї галузі за одиницю часу (наприклад, за рік);

 - обсяг кінцевої продукції - ї галузі, призначеної для невиробничого споживання;

 - квадратна матриця коефіцієнтів прямих витрат  , значення яких обчислюються за формулою

 (1.21)

тобто є часткою від ділення обсягу міжгалузевих поставок - ї галузі в - ту (у формулі (1.21)  та обсягу валової продукції -ї галузі ( у (1.21)).

***Зауваження.*** Матрицю  називають ще *матрицею технологічних коефіцієнтів* (*технологічною матрицею*) через те, що вона містить інформацію про структуру міжгалузевих зв’язків, про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи. Якщо всі коефіцієнти даної матриці невід’ємні, то вона називається *продуктивною*. Тоді і *модель Леонтьєва* – *продуктивна*.

***Основна задача міжгалузевого балансу*** полягає у відшуканні такої матриці обсягів валової продукції , яка за відомої матриці прямих витрат  забезпечує задану матрицю обсягів кінцевої продукції .

*Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках*:

1) коли відома матриця обсягів валової продукції , а потрібно обчислити матрицю обсягів кінцевої продукції , тобто, рівняння (1.20) набуває вигляду

; (1.22)

2) коли відома матриця обсягів кінцевої продукції , а потрібно спланувати обсяг валової продукції , тобто з рівності (1.20) необхідно визначити значення матриці :

. (1.23)

***Зауваження.*** Матриця  називається *матрицею повних витрат* – така матриця, кожен елемент якої є обсягом валової продукції - ї галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевої продукції -ї галузі .

**В результаті вивчення теми студенти повинні:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| - означення визначників другого та третього порядків, мінору та алгебраїчного доповнення;  - правила знаходження визначників другого та третього порядків, властивості визначників;  - теорему розкладу визначників за елементами довільного рядка (стовпця);  - поняття матриці, різновиди матриць та дії, які можна виконувати над матрицями;  - способи знаходження оберненої матриці;  - означення рангу матриці та способи його обчислення. | * обчислювати визначники другого та третього порядків, використовуючи правила та розкладом за елементами довільного рядка або стовпця; * виконувати дії над матрицями; * знаходити обернену матрицю; * обчислювати ранг матриці. |