Лекція 20. Диференціальні рівняння. Основні поняття і означення. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними. Лінійні та однорідні диференціальні рівняння.

План

1. Означення диференціального рівняння. Задача Коші.

2. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними.

3. Задачі на складання диференціальних рівнянь.

4. Лінійні диференціальні рівняння.

5. Однорідні диференціальні рівняння.

1. Означення диференціального рівняння. Задача Коші.

Історична довідка

У кінці XVII – на початку XVIII ст. різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насамперед це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегрування яких намагалися здійснити за допомогою функцій, що виражають скінчене число алгебраїчних дій або таких, що включають елементарні неалгебраїчні дії, наприклад оперування тригонометричними функціями.

Найпростіші диференціальні рівняння з'явилися вже в працях Ісаака Ньютона (1643–1727) і Готфріда Лейбніца (1646–1716). Саме Лейбніцу і належить термін «диференціальне рівняння». Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення, вони є знаряддям дослідження багатьох задач природознавства і техніки, їх широко використовують в механіці, астрономії, фізиці, у багатьох задачах хімії, біології. Це пояснюється тим, що досить часто об'єктивні закони, яким підпорядковуються певні явища (процеси), записують у формі диференціальних рівнянь, а самі ці рівняння є засобом для кількісного вираження цих законів.

Наприклад, фізичні закони описують деякі співвідношення між величинами, що характеризують певний процес, і швидкістю зміни цих величин. Іншими словами, ці закони виражаються рівностями, в яких є невідомі функції та їх похідні.

У XVIII ст. теорія диференціальних рівнянь відокремилася з математичного аналізу в самостійну математичну дисципліну. Її успіхи пов'язані з іменами швейцарського вченого Іоганна Бернуллі (1667–1748), французького математика Жозефа Лагранжа (1736–1813) і особливо Леонарда Ейлера.

Перший період розвитку диференціальних рівнянь був пов'язаний з успішним розв'язуванням деяких важливих прикладних задач, що приводять до диференціальних рівнянь, розробкою методів інтегрування різних типів диференціальних рівнянь і пошуком класів рівнянь, розв'язки яких можна подати у вигляді елементарних функцій або їх первісних. Проте дуже швидко виявилося, що інтегрованих диференціальних рівнянь зовсім небагато. Це привело до розвитку власне теорії диференціальних рівнянь, яка займається розробкою методів, що дають змогу за властивостями диференціального рівняння визначити властивості і характер його розв'язку.

У зв'язку з потребами практики поступово розроблялися і способи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дають зручні алгоритми обчислень з ефективними оцінками точності, а сучасна обчислювальна техніка дає змогу економічно і швидко звести розв'язування кожної такої задачі до числового результату.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов’язує між собою незалежну змінну , шукану функцію  та її похідні або диференціали.

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо шукана функція залежить від одного незалежного змінного.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної (або диференціала), яка входить в дане рівняння.

Розв’язком (або інтегралом) диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

Загальним розв’язком (або загальним інтегралом) диференціального рівняння називається такий розв’язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння. Так, загальний розв’язок диференціального рівняння першого порядку має одну довільну сталу.

Частинним розв’язком диференціального рівняння називається розв’язок, знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих. Значення довільних сталих знаходять при певних початкових значеннях аргументу і функції.

Графік частинного розв’язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою.

Загальному розв’язку диференціального рівняння відповідає сукупність всіх інтегральних кривих.

Диференціальним рівнянням називається першого порядку називається рівняння, до якого входять похідні (або диференціали) не вище як першого порядку.

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду



Щоб розв’язати це рівняння, треба спочатку відокремити зміні:

,

потім про інтегрувати обидві частини знайденої рівності:

.

3. Задачі на складання диференціальних рівнянь.

Задача 1. Знайти закон руху тіла по осі ОХ, якщо воно почало рухатися з точки  зі швидкістю .

Розв’язування:

При прямолінійному русі швидкість є похідна по шляху за часом. Позначивши шлях через , маємо: , тоді

, або . Проінтегрувавши, дістанемо .

Використовуючи початкові умови, знайдемо С. Оскільки  при , то, підставивши ці значення в загальний розв’язок, знайдемо  .

Отже, закон руху тіла має вигляд .

Задача 2. Знайти закон руху тіла, що рухається прямолінійно із швидкістю , якщо відомо, що за час тіло проходить шлях .

Задача 3. Швидкість прямолінійного руху точки задана формулою . Знайти закон руху точки, якщо до моменту відліку часу вона пройшла шлях .

Задача 4. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку , якщо відомо, що кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці дорівнює .

Розв’язування:

За умовою маємо , або .

Проінтегрувавши, дістанемо . Використовуючи початкові умови, знайдемо С. Оскільки  при , то, підставивши ці значення в загальний розв’язок, знайдемо . Отже, рівняння кривої має вигляд .

Задача 5. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку , якщо кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці дорівнює .

Задача 6. Скласти рівняння кривої, що проходить через точку , якщо кутовий коефіцієнт дотичної в кожній її точці дорівнює .

4. Лінійне диференціальне рівняння.

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно є лінійним відносно шуканої функції та похідних відносно шуканої функції.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

(1)

де і – відомі задані функції.

Рівняння (1) є неоднорідним лінійним рівнянням. Якщо , то рівняння (1) називається однорідним лінійним диференціальним рівнянням.

Однорідне лінійне рівняння завжди дозволяє відокремлення змінних.

загальний розв’язок однорідного лінійного рівняння.

Одним із методів, яким можна розв’язати рівняння (1) є метод варіації довільно сталої (метод Лагранжа).

Ідея методу у тому, що загальний розв’язок рівняння (1) шукають у формі загального розв’язку відповідного однорідного лінійного рівняння, де в якості сталої є деяка функція , яку підбирають так, щоб виконувалось рівняння (1).

Для знаходження підставимо шукану форму розв’язку в рівняння (1).

Розкривши дужки, отримаємо:

Загальний розв’язок рівняння (1), як видно з останнього запису складається з двох доданків, перший з яких є загальним розв’язком відповідного однорідного рівняння, а другий доданок є частинним розв’язком.

Розв’язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку можна іншим методом (методом Бернуллі), якщо шукану функцію зобразити у вигляді добутку двох невідомих функцій:

Маємо однорідне рівняння, розв’язок якого є:

Далі все відбувається аналогічно, як у методі варіації довільної сталої.

*Приклад 1.* Розв’язати лінійне диференціальне рівняння методом Лагранжа:

*Приклад 2.* Розв’язати лінійне диференціальне рівняння методом Бернулі:

Це лінійне рівняння, тут Припустимо, що Продиференціюємо цю рівність по :

Підставивши тепер вирази для та у дане рівняння, дістанемо:

(1)

Оскільки одну із допоміжних функцій або можна взяти довільно, то за візьмемо один з частинних розв’язків рівняння

Відокремивши в цьому рівняння змінні та інтегруючи, отримаємо:

Вважаємо, що довільна стала бо знаходимо один з частинних розв’язків.

Підставимо тепер вираз для в рівняння (1) і дістанемо рівняння:

Тоді:

Знаючи і , отримаємо тепер загальний розв’язок даного рівняння:

5. Однорідні диференціальні рівняння.

*Однорідною функцією* змінних *х* і *у* називаєть­ся функція, всі члени якої мають однаковий степінь.

Наприклад,

*у* - однорідні функції другого, третього і першого степенів відповідно.

Рівняння виду  де - однорідні функції одного степеня, називається *однорідним.*

Однорідне рівняння за допомогою підстанов­ки зводиться до рівняння з відокремлю­ваними змінними.

До однорідних рівнянь зводиться рівняння виду:

Для того, щоб отримати однорідне рівняння застосовують заміну змінних:

Для знаходження маємо систему рівнянь:

*Приклад 1.* Знайти загальний розв’язок рівняння

Дане рівняння є однорідним рівнянням пер­шого степеня відносно змінних *х* і *у.* Припусти­мо, що , де - нова функція від *х.*

Знайдемо диференціал добутку: .

Підставивши вирази  *і* удане рівняння, дістанемо .

Зробивши спрощення, маємо: , .

Отже, дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні та проінтегрувавши, знаходимо:

Замінивши в останньому виразі на , дістанемо загальний розв'язок даного рівняння:

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння:

Дане рівняння не є однорідним, тому скористаємось заміною

Отримали однорідне рівняння, яке розв’язуємо за допомогою підстановки: