**Лекція 3.** Системи *п-*лінійних алгебраїчних рівнянь з *п-*невідомими. Формули Крамера для розв’язування систем лінійних рівнянь. Еквівалентні перетворення. Розв’язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.

**План**

* 1. Застосування визначників до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

(метод Крамера).

* 1. Використання визначників при розв’язуванні економічних задач.
  2. Розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом.
  3. Використання методів Гаусса та Жордана-Гаусса для розв’язування СЛАР (з використанням елементарних перетворень).

*Основні твердження та поняття:* система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), метод Крамера, методи Гаусса та Жордана-Гаусса, матричний спосіб, алгоритм, елементарні перетворення, прямий та зворотний ходи, метод „прямокутника”, головний елемент.

1. **Застосування визначників до розв’язування систем**

**лінійних алгебраїчних рівнянь (метод Крамера)**

Система двох лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з двома невідомими має вигляд:

 (2.1)

Для розв’язання такої системи використовують ***формули Крамера:***

, , (2.2)

де  - головний визначник, а , та  - допоміжні визначники.



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

**Габріель Крамер (1704 - 1752)** — швейцарський математик, учень і друг Йоганна Бернуллі, один з творців лінійної алгебри.

Народився в м. Женева (Швейцарія), в сім'ї франкомовного лікаря. З раннього віку показав великі здібності до математики. У 18 років захистив дисертацію. У 20-річному віці Крамер виставив свою кандидатуру на вакантну посаду викладача на кафедрі філософії Женевського університету. Кандидатур було три, всі справили гарне враження, і магістрат прийняв соломонове рішення: заснувати окрему кафедру математики і направити туди (на одну ставку) двох «зайвих», включаючи Крамера, з правом подорожувати по черзі за свій рахунок.

У 1727 вчений скористався цим правом і 2 роки мандрував Європою, заодно переймаючи досвід у провідних математиків — Йоганна Бернуллі і Ейлера в Базелі, де Муавра в Лондоні, Мопертюї і Клеро в Парижі та інших. Повернувшись, він вступає з ними в листування, що тривало все його недовге життя.

У 1729 Крамер повертається до Женеви та відновлює викладацьку роботу. У вільний час він пише численні статті на найрізноманітніші теми: геометрія, історія математики, філософія, застосування теорії ймовірностей; публікує працю з небесної механіки (1730) та коментар до ньютонівської класифікації кривих третього порядку (1746). У 1742, за проханням Йоганна Бернуллі Крамер публікує збірник зібрання праць колеги (у 4 томах), а незабаром (1744) випускає аналогічний (посмертний) збірник робіт Якоба Бернуллі і двотомник листування Лейбніца з Іоганном Бернуллі. Всі ці видання мали величезний резонанс у науковому світі.

У 1747 здійснює другу подорож у Париж, де знайомиться з видатним французьким математиком Д’Аламбером. У 1751, після дорожнього інциденту з каретою, Крамер отримує серйозну травму. Доктор рекомендує йому відпочити на французькому курорті, але там його стан погіршується і 4 січня 1752 Крамер помирає.

Найвідоміша з робіт Крамера, опублікована французькою мовою - «Вступ до аналізу алгебраїчних кривих», (1750). У ній вперше розглянуто систему довільної кількості лінійних рівнянь з квадратною матрицею. Рішення системи вчений подає у вигляді стовпця дробів із спільним знаменником — визначником матриці. Терміна «визначник» (детермінант) тоді ще не існувало (його ввів Гаус в 1801), але Крамер дав точний алгоритм його обчислення. Цей алгоритм, пізніше названий методом Крамера, відразу ж отримав подальший розвиток у працях Безу, Вандермонда та Келі, які й завершили створення основ лінійної алгебри. Теорія визначників швидко знайшла безліч застосувань в астрономії і механіці (вікове рівняння), при рішенні алгебраїчних систем, дослідженні форм тощо.

*Завдання 1.* Розв’яжіть систему  методом Крамера.

Розв’язання

Запишемо та обчислимо головний та допоміжні визначники:

; ; .

Тоді скористаємось формулами Крамера для знаходження невідомих  та :

; .

Обов’язковою є перевірка отриманого результату. Підставимо знайдені значення невідомих у вихідну систему (в обидва її рівняння):

 - рівність виконується;

 - рівність виконується.

Відповідь: .

***Правило 1.*** Якщо визначник  не дорівнює нулю, то СЛАР має тільки один розв’язок.

***Правило 2.*** Якщо , то СЛАР має безліч розв’язків.

***Правило 3.*** Якщо  і хоча б один з допоміжних визначників не дорівнює нулю, то СЛАР розв’язків не має.

Використовувати формули Крамера можна для розв’язування системи з довільною кількістю змінних.

Таблиця 5

**Розв’язування СЛАР методом Крамера**

|  |  |
| --- | --- |
| На прикладі системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь | В загальному |
| ;  ; , , (2.3)  де  - головний та    допоміжні визначники, що обчислюються або за правилом трикутників, або з допомогою теореми розкладу за довільним рядком (стовпцем) | ;  ; ; ... ; , де  - головний,  , ...,  - допоміжні визначники, (обчислюються за теоремою розкладу) |

*Завдання 2.* Розв’яжіть СЛАР  методом Крамера.

Розв’язання

Запишемо та обчислимо головний та допоміжні визначники даної системи

 

 

Тоді, використовуючи формули Крамера матимемо:

, , .

Виконаємо перевірку підставивши отримані значення невідомих у всі рівняння початкової системи:

 рівність виконується;

 рівність виконується;

 рівність виконується.

Відповідь: .

*Зауваження:* отриманий розв’язок можна записати і у вигляді .

**2. Використання визначників при розв’язуванні економічних задач**

Розглянемо дане питання на конкретному прикладі.

*Завдання 3.* Взуттєва фабрика спеціалізується з випуску виробів трьох типів Т1, Т2, Т3, використовуючи при цьому сировину трьох видів В1, В2, В3. Норми витрат кожної сировини на одну пару взуття і обсяг витрат сировини на один день задані таблицею:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид сировини | Норма витрат сировини на одну пару | | | Витрати сировини на 1 день |
| Т1 | Т2 | Т3 |
| В1 | 6 | 4 | 5 | 2400 |
| В2 | 4 | 3 | 1 | 1450 |
| В3 | 5 | 2 | 3 | 1550 |

Знайдіть щоденний обсяг випуску кожного типу взуття.

Розв’язання

Нехай щоденно фабрика випускає  пар виробів Т1,  пар виробів Т2 і  пар виробів Т3. Тоді згідно з витратами сировини кожного виду маємо систему рівнянь:

.

Розв’яжемо дану систему за формулами Крамера:

,

, , .

Отже,

, , .

Перевірка отриманого результату підтверджує його правильність.

Відповідь: фабрика випускає 150 пар взуття типу Т1, 250 пар типу Т2 і 100 пар типу Т3.

** В результаті вивчення теми студенти повинні:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * формули Крамера; * алгоритм розв’язання СЛАР матричним методом; * алгоритм методу Гаусса для розв’язання СЛАР з використанням елементарних перетворень та розрахункових таблиць; * алгоритм методу Жордана-Гаусса для розв’язання СЛАР. | * розв’язувати СЛАР методом Крамера та матричним способом; * розв’язувати складніші задачі матричної алгебри на дослідження та обґрунтовувати раціональність обраного способу розв’язання; * використовувати визначники та матриці при розв’язанні задач економічного спрямування; * розв’язувати СЛАР методами Гаусса та Жордана-Гаусса; * будувати математичну модель запропонованої економічної ситуації, розв’язувати її методами Крамера, Гаусса, матричним способом і оцінювати реальність отриманих результатів. |



**Питання для самоконтролю**

1. Для розв’язування яких завдань використовують метод Крамера та в чому його суть?

2. За яких умов система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв’язок?

3. Що можна сказати про систему рівнянь, якщо її визначник дорівнює нулю?

4.Запишіть формулу, за допомогою якої можна СЛАР розв’язати матричним способом.

5. Як скласти розширену матрицю довільної системи?

6. Яка схема розв’язування СЛАР методом Гаусса з використанням елементарних перетворень?

7. В чому полягає різниця між методами Гаусса та Жорданна – Гаусса, які використовуються для відшукання розв’язку системи рівнянь?

8. Як використовувати розрахункові таблиці для розв’язання СЛАР методом Гаусса