**Лекція 4.** Матрична форма запису системи лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв’язок. Еквівалентні перетворення. Розв’язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

**План**

* 1. Розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним способом.
  2. Використання методів Гаусса та Жордана-Гаусса для розв’язування СЛАР (з використанням елементарних перетворень).

*Основні твердження та поняття:* система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), метод Крамера, методи Гаусса та Жордана-Гаусса, матричний спосіб, алгоритм, елементарні перетворення, прямий та зворотний ходи, метод „прямокутника”, головний елемент.

**1. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом**

Розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими та запишемо її в загальному вигляді

.

Елементи даної СЛАР можна умовно поділити на три групи: коефіцієнти  біля невідомих величин, самі невідомі  та вільні члени  – значення, що розміщені після знаку рівності. Тому, використовуючи поняття матриці та дій над матрицями, дану систему можна подати у матричному вигляді

, (2.4)

де  - матриця коефіцієнтів біля невідомих,  - матриця-стовпець вільних членів,  - матриця-стовпець невідомих.

Для того, щоб розв’язати СЛАР (знайти невідомі значення матриці Х), її необхідно помножити зліва (порядок розміщення матриць при множенні суттєвий) на обернену матрицю, тобто

 (2.5)

Тоді . Враховуючи, що , матимемо:

 (2.6)

Це і є ***формула для розв’язування СЛАР матричним способом***.

*Завдання 4.* Розв’яжіть СЛАР матричним способом.

Розв’язання

Запишемо дану систему у матричному вигляді, де

 - матриця коефіцієнтів біля невідомих.

Елемент тому, що невідома  в другому рівнянні системи відсутня. Тобто дане рівняння можна розглядати у вигляді .

 - матриця-стовпець вільних членів.

 - матриця-стовпець невідомих.

Щоб скористатись формулою (2.6) для розв’язування системи матричним способом спочатку потрібно знайти обернену матрицю  для даної матриці .

*Зауважимо,* що обернену до даної матриці *А* нами було вже знайдено при розв’язанні завдання 17 (тема 01, питання 6). Отже,

.

Тоді, застосувавши формулу (2.6) та дію множення матриці на матрицю матимемо:



Виконаємо перевірку отриманого результату:

 - рівність виконується;

 - рівність виконується;

 - рівність виконується.

Відповідь: .

**2. Методи Гаусса та Жордана-Гаусса для розв’язування СЛАР**

**(з використанням елементарних перетворень)**

Формули Крамера дають можливість, використовуючи спосіб обчислення визначників, знайти числові значення розв’язку системи рівнянь у випадку, коли головний визначник  відмінний від нуля. Проте практичне застосування цих формул у багатьох випадках ускладнене. Наприклад, при великій кількості невідомих трудомістким є процес обчислення визначників. Або якщо коефіцієнти рівнянь системи задані наближено (що у реальних задачах буває майже завжди), то похибка розв’язку може бути досить великою. Навіть в тому випадку, коли коефіцієнти в системі вихідних рівнянь відомі точно, але самі обчислення ведуться з урахуванням лише заданого числа значущих цифр, отримуються великі похибки в результаті. Тому при практичному розв’язуванні систем рівнянь використовуються інші способи обчислень, наприклад, методи Гаусса та Жордана – Гаусса.



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

**Карл Фрідріх Гаусс (1777 - 1855)** – в історії математики немає нікого, кого можна було б порівнювати з Гауссом за ранньою обдарованістю, яку він виявив у два роки.

Він народився у Німеччині, у сім’ї водопровідника. У молодості захоплювався мовознавством і математикою і у день свого 19 - річчя зробив вибір на користь останньої. Із 30 березня 1796 року Гаусс почав вести науковий щоденник, який став одним із найцінніших документів історії математики.

Основна риса наукових робіт вченого – їх виключна різнобічність. Він займався вищою алгеброю, теорією чисел, диференціальною геометрією, теорією ймовірностей, теорією тяжіння, теорією електрики та магнетизму, питаннями капілярності, геодезією та астрономією. У всіх вище згаданих галузях Гаусс зробив оригінальні відкриття. Але математику він вважав царицею всіх наук, а арифметику – царицею математики.

Ще за життя його вважали рівним Архімеду та Ньютону, називали королем математики, про що свідчить надпис на медалі, виготовленій на його честь після смерті у 1855 році.

Нехай задана система m рівнянь з n невідомими:

, (2.7)

де  - коефіцієнти системи рівнянь,  - номер рядка,  - номер стовпця,  вільні члени, невідомі.

Дана система може бути розв’язана запропонованими методами з використанням елементарних перетворень або за допомогою таблиць. Зазначимо, що обчислення проводяться лише з коефіцієнтами рівнянь системи (2.7), тому немає потреби писати самі рівняння.

При розв’язуванні СЛАР методами Гаусса та Жордана-Гаусса **за допомогою елементарних перетворень** достатньо написати лише розширену матрицю (матрицю, що складається з коефіцієнтів біля невідомих та стовпця вільних членів) системи. Варто пам’ятати, що рядки та стовпці розширеної матриці можна міняти місцями.

Якщо  (в протилежному випадку перестановкою рівнянь системи досягаємо того, що ) і , де  - головний елемент СЛАР, то коефіцієнти першого рівняння перетворюємо за формулою

, , (2.8)

тобто коефіцієнти першого рівняння ділимо на головний елемент. Далі, при використанні ***методу Гаусса***, проводимо необхідні перетворення (множимо чи ділимо всі елементи одного з рядків на певне числове значення; віднімаємо чи додаємо отримані значення до відповідних елементів іншого рядка тощо) так, щоб *звести нашу розширену матрицю до трикутного вигляду* (або говорять, *зводимо систему до такого вигляду,* *де нижче головної діагоналі розміщені нулі*). Це так званий ***прямий хід,*** результат якого можна подати у вигляді системи

, (2.9)

де - новоутворені коефіцієнти; k- номер кроку.

У результаті ***зворотного ходу*** послідовно, йдучи від останнього рівняння системи до першого, знаходимо значення невідомих . Так, з останнього рівняння отримаємо:

.

Підставимо це значення в друге знизу рівняння і знайдемо  і продовжуємо далі рухатись вгору. аж доки з першого рівняння системи не знайдемо значення . Виконавши перевірку, одержимо відповідь.

При розв’язуванні ***методом Жордана-Гаусса*** *виключення невідомих (перетворення на нуль) проводимо не лише під головною діагоналлю розширеної матриці, а й над нею.* Тоді СЛАР можна буде записати у вигляді:

 (2.10)

Тобто відразу отримаємо шукані значення невідомих - система розв’язана.

***Зауваження.*** При перетворенні СЛАР можливі такі випадки:

а) Якщо хоча б в одному з рівнянь перетвореної СЛАР зліва отримали нуль, а справа – відмінне від нуля число, то дана СЛАР не має розв’язків, адже на 0 ділити не можна. Наприклад:

.

б) Якщо хоча б в одному з рівнянь перетвореної СЛАР і зліва, і справа отримали нулі, то СЛАР має безліч розв’язків адже рівність виконується для будь-якого значення невідомої .



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

Каміль Жорда́н (1838 – 1922) – французький математик, що став відомим завдяки своїм фундаментальним працям в теорії груп і курсі математичного аналізу. Народився в Ліоні, навчався в Політехнічній школі де і отримав інженерну освіту. Пізніше – займає посаду викладача Політехнічної школи та Коледж де Франс.

Серед наукових досягнень – теорема Жордана про криву, топологічний результат (комплексний аналіз); Жорданова нормальна форма (лінійна алгебра); міра Жордана, що використовується для побудови інтеграла Рімана (математичний аналіз), теорема Жордана – Гьольдера про композиційний ряд (теорія груп).

Також займався теорією Галуа, досліджував групи Матьо тощо.

На честь вченого названі астероїд 25593 Камільжордан та Інститут Каміля Жордана (Франція).

*Завдання 26.* Розв’яжіть систему  методом Гаусса (за допомогою елементарних перетворень).

Розв’язання

Записуємо розширену матрицю даної системи: перші чотири стовпці – коефіцієнти біля невідомих даної матриці, четвертий – стовпець вільних членів:

.

Оскільки головний елемент першого рядка , то ми ділимо усі елементи даного рядка на 1, тобто записуємо його без змін на місце першого рядка другої розширеної матриці.

Щоб отримати матрицю трикутного вигляду (нижче головної діагоналі нулі) виконаємо ряд елементарних перетворень (***прямий хід***).

Спочатку перетворимо на нуль всі елементи (окрім ) першого стовпця. Для цього:

1) перший рядок помножимо на 2 і віднімемо його від другого

.

Дані перетворення виконуємо усно. Лише результат операції віднімання



записуємо на місце другого рядка другої розширеної матриці.

2) Від третього рядка віднімемо перший і запишемо результат на місце третього рядка другої розширеної матриці:

.

3) Щоб отримати четвертий рядок другої матриці від четвертого рядка першої віднімемо другий, а від результату віднімемо третій рядки першої матриці.

В результаті таких перетворень утворилася нова розширена матриця (друга) еквівалентна даній матриці (перша:)

.

Щоб перетворити на нуль елементи другого стовпця, які розміщені нижче головної діагоналі у другій розширені матриці залишаємо без змін перший рядок і перший стовпець. Тобто, усно виокремивши частину другої матриці, що містить елементи рядків



виконаємо такі елементарні перетворення: елементи третього рядка поділимо на (-2), а четвертого на (-3). Отримаємо третю розширену матрицю.



Щоб отримати нуль на місці елементу , проведемо такі перетворення: другий рядок третьої матриці помножимо на 2 і додамо до третього рядка – результат запишемо на місце третього рядка четвертої матриці:

.

Помінявши місцями третій та четвертий стовпці даної матриці матимемо нову, нижче головної діагоналі у якій елементи – нулі:



Отже, можна переходити до ***зворотного ходу***. Для цього запишемо систему лінійних рівнянь у трикутному вигляді (пам’ятаючи про те, що третій та четвертий стовпці мінялися місцями):



Єдиним розв’язком даної системи будуть числа    

Виконавши перевірку (підставивши отриманий результат замість невідомих у вихідну систему), переконуємось у правильності відповіді та можемо її записати.

Відповідь:    

***Зауваження.*** Запропонований детальний опис процесу розв’язування (прямий хід) зазвичай записують у вигляді послідовності еквівалентних матриць:



Рекомендуємо такий запис супроводжувати стислими коментарями щодо виконаних перетворень – це дозволить відслідкувати хід думок у процесі самоперевірки (за умови хибності отриманого результату).

** В результаті вивчення теми студенти повинні:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * формули Крамера; * алгоритм розв’язання СЛАР матричним методом; * алгоритм методу Гаусса для розв’язання СЛАР з використанням елементарних перетворень та розрахункових таблиць; * алгоритм методу Жордана-Гаусса для розв’язання СЛАР. | * розв’язувати СЛАР методом Крамера та матричним способом; * розв’язувати складніші задачі матричної алгебри на дослідження та обґрунтовувати раціональність обраного способу розв’язання; * використовувати визначники та матриці при розв’язанні задач економічного спрямування; * розв’язувати СЛАР методами Гаусса та Жордана-Гаусса; * будувати математичну модель запропонованої економічної ситуації, розв’язувати її методами Крамера, Гаусса, матричним способом і оцінювати реальність отриманих результатів. |

****

**Питання для самоконтролю**

1. Для розв’язування яких завдань використовують метод Крамера та в чому його суть?

2. За яких умов система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв’язок?

3. Що можна сказати про систему рівнянь, якщо її визначник дорівнює нулю?

4.Запишіть формулу, за допомогою якої можна СЛАР розв’язати матричним способом.

5. Як скласти розширену матрицю довільної системи?

6. Яка схема розв’язування СЛАР методом Гаусса з використанням елементарних перетворень?

7. В чому полягає різниця між методами Гаусса та Жорданна – Гаусса, які використовуються для відшукання розв’язку системи рівнянь?

8. Як використовувати розрахункові таблиці для розв’язання СЛАР методом Гаусса?