Лекція 5. Вектори на площині . Скалярний добуток векторів.

***План***

*1. Прямокутна Декартова система координат на площині та у просторі.*

*2. Дії над векторами.*

*3. Скалярний добуток двох векторів та його властивості.*

*4. Проекція вектора на вектор. Напрямні косинуси вектора.*

*Основні терміни та поняття*: величини, скалярні величини, декартова система координат, вектор, компоненти (координати) вектора, векторний простір, двовимірний векторний простір, тривимірний векторний простір, операції над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр), модуль (довжина) вектора, координати вектора, орти, колінеарні та компланарні вектори, скалярний добуток двох векторів, проекція вектора, напрямні косинуси вектора, евклідова площина, лінійно залежні та лінійно незалежні вектори, лінійна комбінація, базис, векторний добуток, мішаний добуток.

**1. Прямокутна Декартова система координат на площині та у просторі**

У повсякденному житті ми маємо справу з величинами, які задаються числом (наприклад, ціна товару, температура повітря, довжина відрізка) і визначаються певною одиницею: ціна – в гривнях, рублях, доларах; температура – в градусах; довжина – в кілометрах, метрах, сантиметрах; маса – в тоннах, центнерах, кілограмах тощо. Такі величини називаються ***скалярними****.* Проте є величини, для характеристики яких недостатньо лише однієї скалярної величини. Це ***векторні*** величини або вектори. Наприклад, погода характеризується не лише температурою, а й відносною вологістю та тиском і без будь-якої з них характеристика погоди не є точною. Так само сила, прикладена до деякої точки, задається не лише значенням, а й напрямком (зверху вниз, зліва направо тощо). Якщо зобразити її графічно у декартовій системі координат на площині, то довжина відрізка буде відображати значення сили, стрілка – напрямок, в якому вона діє. Початок відрізка міститься у точці А, а кінець – у точці В (мал.17).

0













***А***

***В***

Мал.17

***Означення.******Координатами вектора*** *називають проекції радіус - вектора  на осі координат.*

Норми витрат ресурсів на випуск одиниці продукції характеризуються кількістю одиниць відповідного ресурсу (сировини різних видів, устаткування, робочої сили, палива тощо). Крім того, вони виражаються в різних одиницях (кг, , год. тощо). Отже, для характеристики норм витрат скалярних величин недостатньо.

***Означення. Вектором*** *називатимемо напрямлений відрізок  з початком у точці А і кінцем у точці В.*

***Означення. Вектором*** *називається величина, яка характерна числовим значенням та напрямом.*

Виберемо в просторі яку-небудь точку , проведемо через неї три взаємно перпендикулярні осі і на кожній із них візьмемо одиничний вектор, напрямлений по цій осі. Вісь з вибраним на ній початком відліку та одиницею довжини називається *координатною віссю*, а впорядкована система трьох взаємно перпендикулярних координатних осей із загальним початком відліку і загальною одиницею довжини називається *прямокутною декартовою системою координат у просторі*.

Якщо маємо на площині вектор , де  - початкова і - кінцева точки, то координати вектора  будуть

. (3.1)



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

**Рене Декарт (1596 - 1650)** – більш відомий як великий філософ, ніж математик. Але саме він був піонером сучасної математики, його досягнення в цій галузі настільки видатні, що він по праву входить до числа великих математиків. Протягом 150 років математика розвивалася шляхами, прокладеними Декартом.

Про життя Декарта, відомого також під латинізованим ім’ям Картезія (звідси картезіанство), відомо небагато. Він народився у Франції, в невеличкому містечку Лае, у дворянській родині. Після закінчення коледжу почав вивчати правознавство. У 22 роки залишив Францію, служив у військах, які брали участь у війні.

У своєму філософському вченні розробив ідею про всемогутність розуму людини, тому й переслідувався католицькою церквою.

У 1637 р. Декарт видав великий філософський трактат „Міркування про метод. З додатками: Діоптрика, Метеори, Геометрія” (російською мовою був перекладений у 1953 р.), в якому систематично викладено метод прямолінійних координат, була введена зручна алгебраїчна символіка, яка збереглась до наших днів (наприклад, ним уведені знаки +, -,  - для констант та  - для змінних величин). Завдяки цій роботі, яка дуже вплинула на подальший розвиток математики, Декарта разом з його співвітчизником П. Ферма вважають основоположником аналітичної геометрії, а 1637 рік – роком її народження.

Розглянемо вектор в прямокутній декартовій системі координат у просторі (мал.18)

***z***

***y***

***x***

Мал.18

***ā***

***0***

***ī***

***k***

***j***

У вибраній впорядкованій системі координат перша вісь називається віссю абсцис (або віссю ), а напрямлений по ній вектор позначається символом , друга – віссю ординат (або віссю ) з напрямленим по ній вектором, що позначений символом , третя – віссю аплікат (або віссю ) і напрямленим вектором .

***Означення. Ортами*** *називають одиничні взаємно перпендикулярні вектори, які задають напрями осей координат та позначені символами .*

Нехай маємо вектор , який за допомогою одиничних векторів можна записати

. (3.2)

***Означення.******Модулем (довжиною) вектора*** *називають його числове значення , яке обчислюється за формулою*

. (3.3)

Якщо при спостереженні від кінця третього вектора коротший поворот від першого до другого здійснюється проти годинникової стрілки, то маємо справу з *правою трійкою* векторів. Якщо при спостереженні від кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється за годинниковою стрілкою, трійка векторів називається *лівою*.

Кількість величин, що утворюють вектор, характеризують його вимірність. Найпростішим є вектор з двома величинами. Записати вектор можна і у вигляді стовпчика, який залежно від вимірності матиме такий вигляд:

; ; .

Кожне окреме число називають ***компонентою*** (або *координатою*) вектора, а сам вектор за кількістю компонентів – відповідно *двовимірним чи тривимірним* тощо. Кажуть, що задано - вимірний вектор, де  - кількість його координат.

Наприклад в економічних розрахунках можна використовувати вектор-рядок вартості , компоненти якого – вартості різної сировини, палива, робочої людино-години або вектор-стовпець потреб  інших галузей до продукції трьох цехів. Іншими прикладами застосування векторів можуть бути:

- в деякому виробничому процесі є  виробничих ресурсів, а кількість -го ресурсу, що використовується за проміжок часу , позначається , тоді вектор  - це виробничі ресурси;

- коли підприємство випускає  різних виробів при кількості певного -го виробу , то випуск усіх виробів описує вектор .

***Означення.*** *Два - вимірні вектори  та * ***рівні між собою****, якщо всі їхні координати однакові:*

 

***Означення.******Нульовим вектором*** *є вектор, у якого початок збігається з кінцем. Позначається символом .*

Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрямок довільний, тому нульовий вектор можна вважати колінеарним будь – якому іншому вектору.

***Означення.*** *Два вектори  і  називають* ***колінеарними,*** *якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих*.

Якщо два вектори  і  колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні:

 - ***умова колінеарності векторів*** (3.4)

Для колінеарних векторів має місце така рівність:

, (3.5)

де *k* – коефіцієнт пропорційності.

***Означення. Компланарними*** *називають вектори, які лежать в одній площині або в паралельних площинах.*

**2. Дії над векторами**

До лінійних операцій відносяться:

* додавання (віднімання ) векторів;
* множення вектора на число (скаляр).

**Додавання та віднімання двох векторів**

***Означення.******Сумою двох векторів *** *та  називається третій вектор , початок якого є початком першого вектора (), кінець – кінець другого вектора (), причому початок другого вектора () зіставлений з кінцем першого ()* (мал. 19).

***Зауваження.*** Нульовий вектор нейтральний щодо дії додавання, оскільки він не міняє значення вектора-доданка.

Із даного означення випливає, що при додаванні векторів має місце комутативна властивість, тобто

. (3.6)

***А***

***B***

***C***

***D***

**

**



Мал.19

Якщо доповнити трикутник, що складається з векторів  до паралелограма, як показано на мал.19, то суму двох векторів  і  можна визначити як діагональ паралелограма, побудованого на векторах  і , які виходять із загального початку заданих векторів.

При додаванні векторів справедливою є і асоціативна властивість:

, (3.7)

Тоді суму трьох векторів можна записати у вигляді

. (3.8)

Нехай два вектори  і  задано координатами:

**** і .

Тоді

; . (3.9)

**Множення вектора на скаляр (число).**

***Означення. Добутком вектора*** * на число  (або числа  на вектор ) називається вектор , довжина якого в  раз більше довжини вектора  і напрямок збігається з напрямком вектора , якщо , та протилежний напрямку , якщо .*

***y***

***x***

***0***



***λ (λ>0)***

Мал.20

Якщо координати вектора задані у вигляді стовпця, наприклад  і  - довільне число, то

. (3.10)

Розглянемо множення вектора на скаляр, коли . Тоді

.

Оскільки ділення на число  це множення на число , то можна виконувати і *ділення вектора на відмінне від нуля число*.

При множенні вектора на число мають місце асоціативна властивість:

; (3.11)

та дистрибутивна властивість:

; або . (3.12)

Найпростішою задачею, що ілюструє операцію множення вектора на скаляр, може бути оцінювання норми ресурсів у різних валютах. Так, нехай на випуск одиниці продукції витрачаються три види ресурсів, ціни яких у гривнях відповідно дорівнюють



Необхідно подати ціни цих ресурсів у євро і доларах США, якщо на цей час склалися такі співвідношення: 1 євро = 10,05 грн і 1 долар = 8,1 грн. Для цього ціну кожного ресурсу множимо відповідно на  і . Тоді

, ,

**3. Скалярний добуток двох векторів та його властивості**

***Означення. Скалярним добутком*** *двох векторів  і  називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними,* тобто

** (3.13)

*Завдання 1.* Обчисліть скалярний добуток двох векторів, якщо ,  і кут між векторами .

Розв’язання

Оскільки, ,, то, користуючись формулою (3.13) для обчислення скалярного добутку, матимемо:

.

Відповідь: 6

Для скалярного добутку справедливими є такі ***властивості***.

Комутативна властивість. Від перестановки множників скалярний добуток не змінюється:

 (3.14)

Асоціативна властивість. Сталий множник можна винести за знак скалярного добутку:

 (3.15)

Розподільна властивість. Для будь-яких трьох векторів , ,  має місце рівність

 (3.16)

Розглянемо два взаємоперпендикулярні вектори  та . Враховуючи те, що кут між даними векторами 900, а  матимемо, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Справді, за формулою (3.13):

**.

Можна сформулювати ***умову******перпендикулярності векторів:*** якщо вектори  і  перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю і навпаки, якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то ці вектори - перпендикулярні

якщо , то . (3.17)

Якщо ми маємо два вектори  та , що задані своїми координатами в ортонормованому базисі 

 та 

то, використовуючи розподільну та сполучну властивості скалярного добутку, а також умову перпендикулярності векторів, матимемо ***формулу для обчислення скалярного добутку векторів заданих координатами***

 =. (3.18)

***Зауваження.*** Формулу (3.18) читатимемо так: скалярний добуток двох векторів, що задані своїми координатами дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

*Завдання 2.* Дослідіть знак скалярного добутку векторів (3; -4; 0 ) та (2; 3; -1 ).

Розв’язання

Оскільки умовою завдання вектори задані координатами, то, скориставшись формулою (3.18) для обчислення скалярного добутку, матимемо

.

Відповідь:скалярний добуток векторів від’ємний.

Використовуючи означення скалярного добутку (3.13), одержимо формулу для знаходження кута  між двома векторами  і :

. (3.19)

*Завдання 30.* Вершини трикутника  задано координатами: *А*(3; 2; 0 ), *В*(-1; 2;1), *С*(0; 3; 1 ). Дослідіть можливість встановлення типу внутрішнього кута при вершині А без використання калькулятора чи довідника?

Розв’язання

Нагадаємо, що внутрішні кути трикутника можуть бути трьох типів: гострі, тупі та прямі. Кут при вершині А утворюється сторонами трикутника, які можна розглядати, як вектори.

Обчислимо числове значення внутрішнього кута трикутника при вершині А. Для цього використаємо формулу (3.19):

.

Проведемо попередні обчислення:

=, ;

=, ;

.

Тоді

.

Оскільки , то встановити, без допомоги калькулятора чи довідника якому куту відповідає отримане числове значення.

Відповідь: тип внутрішнього кута при вершині А не можна визначити без додаткової джерел інформації.

В економіці скалярний добуток використовується при визначенні ціни набору товарів. Нагадаємо, що ***товар*** - деяка продукція або послуга, яка надходить на ринок для продажу в певний час і в певному місці.

Нехай маємо  різних товарів. Обсяг -го товару позначимо через . Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора , тобто  є  - вимірним вектором. Множину всіх наборів товарів називають ***простором товарів С***. Ця множина є простором тому, що в ній можна додавати два довільних набори та множити будь-який набір товарів на довільне невід’ємне число.

***Зауваження.*** З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти  для довільного значення .

Кожен товар має певну ***ціну***. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна -го товару становить . Тоді вектор  називають ***вектором цін***.

Для набору товарів  розглянемо вектор відповідних цін .

***Означення.******Ціною набору товарів*** *є число , яке чисельно дорівнює скалярному добутку вектора набору товару та вектора цін, тобто*

.

*Завдання 3.* Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції, задано в таблиці:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ресурси (****)** | **Кількість** | **Ціна (****)** |
| Сировина першого виду **(****)** | 200 *кг* | 3 *грн./кг* |
| Сировина другого виду **(****)** | 500 | 5 *грн./* |
| Витрати праці **(****)** | 0,65 людино-год | 10 грн./людино-год |
| Обладнання **(****)** | 0,7 машино-год | 15 грн./машино-год |

Дослідити величину ціни всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції.

Розв’язання

Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції



та вектор цін одиниць відповідних ресурсів

.

Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції обчислимо як скалярний добуток двох даних векторів. Тобто

.

Тоді:

 грн..

Відповідь: ціна ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції становить 3117 грн.

**4. Проекція вектора на вектор. Напрямні косинуси вектора**

Розглянемо два вектори та , які перетинаються під кутом  (мал. 21).

Мал.21

*прā*





*φ*

З кінця вектора  опустимо перпендикуляр на вектор . Отримаємо прямокутний трикутник, прилеглим катетом якого є проекція вектора  на вектор  (позначимо ) Використовуючи означення косинуса кута прямокутного трикутника матимемо  звідки слідує, що

.

За формулою (3.19):

.

Опустивши перпендикуляр з кінця вектора  на вектор  отримаємо аналогічну формулу. Отже,

*пр*=, *пр*= (3.20)

*Завдання 4*. Знайдіть проекцію вектора (3; 0; -3 ) на вектор (3; 0; -4 ).

Розв’язання

Побудуємо малюнок (мал. 21). За формулою (3.20) для знаходження проекції вектора  на вектор  матимемо:

*пр*

Відповідь: 4,2.

***Означення. Напрямними кутами *** *вектора  називають кути, які утворює даний вектор з осями координат* (мал. 22).

***z***

у

***x***

Мал.22

***ā***

***Означення.******Напрямними косинусами*** *називають величини, які обчислюють згідно з формулами:*

 , , , (3.21)

де *x, y, z* – координати вектора .

*Напрямні косинуси* вектора *володіють* такою *властивістю*:

=1 (3.22)

*Завдання 5.* Знайдіть значення напрямних косинусів вектора  (2; 1; -4 ).

Розв’язання

За формулами (3.21) для обчислення напрямних косинусів вектора маємо:

; ; 

Відповідь: .