Лекція 6. Векторний добуток та його властивості

План

*1. Лінійні векторні простори та їх геометрична інтерпретація.*

*2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Вимірність і базис векторного простору.*

*3. Векторний добуток двох векторів та мішаний добуток трьох векторів, їх властивості.*

**1. Лінійні векторні простори та їх геометрична інтерпретація*.***

Операції множення вектора на скаляр та додавання векторів дають змогу ввести поняття ***векторного простору****,* який позначається V.

Для елементів цього простору справедливими є ***такі аксіоми***.

1. Якщо  і  то . (3.23)

2. Комутативність дії додавання:

; (3.24)

3. Асоціативність додавання:

;  (3.25)

4. Існування нульового вектора такого, що:

 (3.26)

5. Існування протилежного вектора:

 (3.27)

6. Якщо  і  то  (3.28)

7. Дистрибутивність множення:

 і , (3.29)

. (3.30)

8. Асоціативність множення:

якщо  то  (3.31)

9. Існування одиниці:

 (3.32)

З аксіом випливає, що векторний простір є лінійним, тобто для довільних скалярних дійсних величин  та  вектор  якщо  і 

*Завдання 6.* Користуючись правилами виконання дій над векторами, знайдіть

 якщо

, , , , .

Розв’язання

Використовуючи формули (3.9) та аксіоми (3.24) – (3.31) матимемо:

; ;

; ;

; .

Відповідь: ; ; ; ; ; .

Зауважимо, що під символами  можна розуміти не тільки вектори, а й елементи іншої природи, які задовольняють аксіоми (3.23) – (3.32). Тоді відповідну сукупність елементів називають ***лінійним простором****.*

Навіть найпростіші лінійні статистичні економічні моделі описуються з використанням векторів.

Для дослідження динамічних (рухомих) моделей різних процесів стан економічної системи, що вивчається, в момент часу  описується за допомогою вектора  із - вимірного простору, а керування процесом в той самий момент часу описується за допомогою вектора  із - вимірного простору. Таким чином, в динамічних моделях використовуються вектори - та - вимірних просторів, координати яких залежать від часу .

Для геометричної інтерпретації векторів використовуємо евклідову площину . Двовимірний вектор  можна зобразити променем, який виходить із початку координат, і компонентами, що характеризують координати кінця вектора (мал. 23).

Крім того, компоненти  та  можна вважати проекціями вектора  на відповідні осі  й . Використовуючи тригонометричні функції кута  і , знаходимо ; , де через  позначено довжину вектора .

0











Мал. 23

Виходячи з інтерпретації вектора, протилежний вектор, вектор, помножений на скаляр , суму двох векторів можна зобразити так, як показано на малюнках 24.

******

******



******





0

0

0

















Мал.24

Евклідова площина , очевидно, буде двовимірним векторним простором, оскільки для неї виконуються всі аксіоми (3.23) – (3.32), що легко перевіряються.

Для векторного простору  є два одиничні вектори (орти):

; .

Враховуючи, що довільний вектор у даному векторному просторі задається двома координатами , маємо

. (3.33)

Таке подання довільного вектора з векторного простору легко переноситься на довільну вимірність евклідового простору .

Нехай , тоді

, (3.34)

де  - одиничний вектор-орт, в якому -та компонента дорівнює одиниці, а решта – нулі.

**2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Вимірність і базис векторного простору**

Введемо дуже важливі для векторних просторів поняття лінійної залежності та незалежності векторів.

Нехай задано вектори 

***Означення.*** *Система векторів  називається* ***лінійно залежною****, якщо хоча б один із них може бути виражений як лінійна комбінація інших, тобто якщо існують числа , із яких хоч одне відмінне від нуля, такі що*

*.* (3.35)

В протилежному випадку система векторів є ***лінійно незалежною***. Можна сформулювати ще таке:

***Означення.*** *Система векторів називається* ***лінійно незалежною****, якщо жоден із векторів цієї системи не може бути поданий як лінійна комбінація інших.*

Тобто рівність (3.35) виконується лише при .

*Наприклад*, вектор  є лінійною комбінацією векторів  та , оскільки .

Із формули  випливає, що вектори  лінійно незалежні, тому що рівність

 (3.36)

виконується тільки при  . Такі вектори будемо називати ***базисними*.** Якщо їх кількість дорівнює вимірності векторного простору , то вони утворюють його базис.

***Означення.*** *Впорядкована трійка (якщо вказано, який вектор трійки вважати першим, який другим і який третім) некомпланарних векторів називається* ***базисною системою векторів (базисом)*** *у просторі.*

Наприклад, базисною трійкою є взаємно перпендикулярні вектори . Тоді базисна система називається *ортогональною*. Крім того, довжини усіх трьох векторів дорівнюють одиниці. Така система векторів називається *нормованою* (в багатьох випадках довжину вектора називають *нормою*). Отже, вибрана система базисних векторів – координатний базис – є ортогональною і нормованою, або, як часто говорять, *ортонормованою*.

Вектори  утворюють базис векторного простору , якщо довільний вектор із цього простору можна зобразити їх лінійною комбінацією.

Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору  називається ***вимірністю простору*** і позначається так:

 . (3.37)

Із цього означення випливає, що , , , , .

***Теорема 1.*** Базис простору складається з максимальної кількості лінійно незалежних векторів.

*Завдання 6.* Дослідіть, чи утворюють вектори  базис у

просторі ?

Розв’язання

Для того, щоб вектори утворювали базис, вони повинні бути лінійно незалежними. Перевіримо виконання умови (3.35) для трьох векторів : 

Тобто

.

Перейдемо до системи, виконуючи лінійні операції над векторами. Отримаємо:

.

Розв’язавши дану систему одним із відомих нам методів (метод Крамера, Гаусса, Жордана - Гаусса, матричний спосіб тощо), отримаємо розв’язок: .

Відповідь: вектори  є лінійно незалежними і утворюють базис у просторі 

**3. Векторний добуток двох векторів та мішаний добуток трьох векторів, їх властивості**

***Означення. Векторним добутком*** *двох векторів  і  називають такий вектор , який позначається  і задовольняє умови:*

*1)  і *

*2)  , де ;* (3.38)

*3)  направлений так, що з кінця цього вектора поворот від  до видно проти годинникової стрілки*



***φ***

***ā***

***b***

***c***

Мал.25

Довжина вектора  чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах  і  як на сторонах.

*Завдання 36*. Обчисліть значення векторного добутку двох векторів ** і *,* якщо їх довжини відповідно дорівнюють 2 та 4, а кут між векторами становить 300.

Розв’язання

Використовуючи означення векторного добутку матимемо:

.

Відповідь: 4.

***Властивості векторного добутку*.**

1. При перестановці множників векторний добуток змінює знак на протилежний (переставна властивість):

 (3.39)

1. Сталий множник можна винести за знак векторного добутку (сполучна властивість):

 (3.40)

1. Для будь-яких трьох векторів  має місце рівність (розподільна властивість):

 (3.41)

1. Якщо два вектори  і  колінеарні (), то їх векторний добуток дорівнює нулю, тобто

якщо  , то  (3.42)

Це ***умова колінеарності векторів.***

***Зауваження.*** Враховуючи умову колінеарності, можна стверджувати, що

. (3.43)

Оскільки вектори  взаємно перпендикулярні, мають одиничні довжини і утворюють праву трійку, то

; ; ;

; ; ;

; ; .

Якщо розглянути два вектори  та , що задані своїми координатами в ортонормованому базисі 

 та 

то, використовуючи розподільну і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості векторного добутку, дістанемо ***формулу для обчислення векторного добутку векторів заданих розкладом за ортонормованим базисом***:

 (3.44)

На практиці частіше використовується ще одна формула, ***для обчислення векторного добутку векторів*** , , ***що задані*** ***координатами*** :

 (3.45)

*Завдання 37.* Дослідіть, які координати матиме векторний добуток векторів  (0; -2; 3 ) та (2; 1; 1 ).



Розв’язання

Скористаємось формулою (3.45) для запису векторного добутку векторів, що задані координатами:

.

Для обчислення визначника третього порядку застосуємо теорему розкладу. У нашому випадку найдоцільніше розкласти визначник за елементами першого рядка:



Відповідь: .

Вектори часто використовуються при розв’язуванні геометричних задач. При цьому: переходять до формулювання умови задачі на «мові векторів» - позначають деякі відрізки як вектори та складають векторні рівності; перетворюють задані векторні рівності, користуючись властивостями дій над векторами та відомими векторними рівностями; „перекладають” отриманий результат на мову геометрії.

Зокрема, важливою геометричною задачею, яка розв’язується за допомогою векторного добутку, є ***обчислення площі трикутника, координати вершин якого задані***, адже, враховуючи означення векторного добутку, *площа трикутника * (мал.26)*, побудованого на векторах  і , дорівнює половині площі паралелограма, а отже – половині модуля векторного добутку*:

:  або  (3.46)

*A*

*B*

*C*

Мал.26

*Завдання 38*. Обчисліть площу трикутника *,*  вершини якого знаходяться в точках

А(0; -2; 4 ), В (3; 2; 1 ), С (0; -14 2 ).

Розв’язання

Скористаємось для розв’язування трикутником, що зображений на мал. 26. Позначимо дві сторони даного трикутника через вектори та знайдемо їх координати:

 (3; 4; -3 ), (0; 1; -2 ).

За формулою (3.45) обчислимо їх векторний добуток:



Тоді, площу трикутника, що вимірюється квадратними одиницями отримаємо, використавши формулу (3.46):



Відповідь: 

***Означення. Мішаним добутком трьох векторів*** *() =  називається скалярний добуток вектора  на векторний добуток векторів  і .*

З геометричної точки зору мішаний добуток трьох векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, якщо вони утворюють праву трійку, і дорівнює об’єму паралелепіпеда , взятому із знаком „мінус”, якщо вектори утворюють ліву трійку.

**Властивості мішаного добутку**.

1. Від циклічної перестановки векторів мішаний добуток не змінюється (переставна властивість):

 (3.47)

2. Якщо у мішаному добутку переставити місцями два сусідні вектори, то мішаний добуток змінить знак на протилежний :

 (3.48)

3. Якщо вектори  компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто:

 (3.49)

і навпаки, якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вони обов’язково компланарні. Це ***умова компланарності векторів***

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі , то мішаний добуток обчислюється за допомогою формули:

 (3.50)

Проте, на практиці, при обчисленні мішаного добутку зручніше користуватися визначником.

***Правило.*** Якщо вектори ** задані своїми координатами, тобто , , , то мішаний добуток трьох векторів обчислюється за формулою:

 (3.51)

*Завдання 39.* Обчисліть значення мішаного добутку  трьох векторів, якщо , (2; 1; -1 ), (-1; 0; 2 ).

Розв’язання

Скористаємось правилом обчислення мішаного добутку векторів, що задані координатами (3.51):

.

Відповідь: 9.

Мішаний добуток трьох векторів застосовується в геометрії для обчислення є об’єму паралелепіпеда лінійними вимірами якого є дані вектори та трикутної піраміди, побудованої на цих векторах (мал. 27).

*A*

*B*

*D*

*C*

Мал.27

|  |  |
| --- | --- |
| ***Формула для обчислення об’єму*** | |
| паралелепіпеда | піраміди |
| або (3.52) | або (3.53) |

***Зауваження.*** Об’єм вимірюється кубічними одиницями.

*Завдання 40.* Піраміда задана вершинами А (3; -1; 0), В (0; 2; 2 ), С (2; 1; 1; ), Д (0; 1;-1). Знайдіть її об’єм.

Розв’язання

Скористаємось мал. 27. Спочатку обчислимо координати векторів, що утворюють мішаний добуток:

, =, .

Тоді, за формулою (3.51):



Використавши формулу (3.53) обчислимо об’єм піраміди в кубічних одиницях:

 (куб. од).

Відповідь: 8 (куб.од).

** В результаті вивчення теми студенти повинні:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * поняття декартової системи координат; * поняття вектора та векторного простору; * означення скалярного, векторного та мішаного добутків векторів; * поняття проекції вектора та напрямних косинусів вектора. | * виконувати дії над векторами, заданими координатами; * знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів і використовувати їх для розв’язування задач; * знаходити довжину вектора та кут між векторами; * застосовувати векторний метод при розв’язанні економічних задач, завдань на доведення, дослідження. |