Лекція 7. Пряма на площині. Кут між прямими. Взаємне розміщення прямих. Пряма в просторі.

**План**

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: відстань між двома точками; поділ відрізка у даному відношенні; паралельний переніс осей координат.

2. Поняття рівняння лінії на площині.

3. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора.

4. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої у відрізках.

5. Канонічне і параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

6. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої.

7. Використання прямої при розв’язуванні професійно спрямованих задач.

*Основні терміни та поняття:* точка, відстань, відношення, осі координат, паралельний переніс осей, рівняння прямої, нормальний вектор, загальне рівняння прямої, кутовий коефіцієнт, напрямний вектор, канонічне та параметричне рівняння прямої.



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

В першій половині 17 століття виникла принципово нова галузь математики – аналітична геометрія, в якій за допомогою координатного методу геометричні об’єкти стали досліджуватися засобами алгебри.

Вважається, що основи нової геометрії заклав Р.Декарт в своєму трактаті «Геометрія» (1637). Але він небагато досяг в даній галузі, бо недосконалою була його система координат, в якій не розглядалися від’ємні абсциси. Виявляється, що не менше значення мають роботи П.Ферма, проте більшість із них були опубліковані вже після смерті автора, що дозволило роботам Р. Декарта отримати пріоритет.

Використав і дещо розвинув аналітичну геометрію І. Ньютон у творі «Перелік кривих третього порядку» (1704). В цій роботі автор розкрив нові можливості координатного методу й удосконалив сам метод – ввів рівноправні осі координат, визначив знаки функцій в усіх квадрантах, створив основи дослідження властивостей кривих за властивостями рівнянь, що їх виражають, навів класифікацію кривих, поклавши в основу степені рівнянь.

Побудову аналітичної геометрії у формі, звичній для нас, завершив Л.Ейлер, який у другому томі книги «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748) ввів прямолінійні координати (як прямокутні, так і косокутні), роз’яснив спосіб запису рівнянь кривих, розглянув перетворення систем координат – поворот і перенос, з’ясував спільні властивості всіх конічних перерізів тощо.

У 18 столітті завершено формування аналітичної геометрії як науки. Тоді ж відбулось і становлення її як навчального предмету, складової частини вищої математичної та технічної освіти.

**1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: відстань між двома точками; поділ відрізка у даному відношенні; паралельний переніс осей координат**

З курсу математики загальноосвітньої школи відомо, що предметом вивчення геометрії є геометричні об’єкти (точки, лінії, фігури), а предметом вивчення алгебри – числа, рівняння, функції. *Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами*.

Основним методом аналітичної геометрії є метод координат. При цьому методі найпростішому геометричному образу (точці) ставиться у відповідність упорядкована множина чисел – координати цієї точки. Метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об’єкта.

До найпростіших задач аналітичної геометрії відносяться:

* відстань між двома точками;
* поділ відрізка у даному відношенні;
* паралельний переніс осей координат.

***а) Відстань між двома точками***

Нехай дано дві точки , . Відстань між двома точками  та  дорівнює довжині вектора , яка обчислюється за формулою:

 (4.1)

*Завдання 41*. Знайдіть відстань між точками: , .

Розв’язання

Скористаємось формулою (4.1) для знаходження відстані між двома точками:

 (лін.од).

Відповідь:  (лін.од).

***б) Поділ відрізка у даному відношенні***

Нехай задані координати кінцевих точок відрізка:, . Припустимо, що точка  ділить цей відрізок у відношенні

.

Знайдемо значення невідомих координат точки *M.* Для цього побудуємо вектори  і , що лежать на одній прямій та співнаправлені (мал. 28). Координати даних векторів:

 та 







мал. 28

Дані вектори - колінеарні, тобто . Звідси:



Виразивши з останніх рівностей невідомі координати *x* та *y* одержимо:

; ; (4.2)

Це є ***формула поділу відрізка у даному відношенні***.

У випадку поділу відрізка навпіл . Тобто точки *M* – середина відрізка , і формули для обчислення її координат матимуть вигляд:

;  ; (4.3)

*Завдання 42.* Трикутник задано координатами вершин: А (3; 1), В (1; 5), . Дослідіть, які координати має точка перетину медіан даного трикутника.

Розв’язання

Нагадаємо, що медіана – це пряма, що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної їй сторони. Побудуємо у трикутнику  медіани  та  (мал. 29). Отже, точка  - середина сторони . Її координати знайдемо за формулами (4.3):

; .

А

N

С

В

D

O

мал. 29

Отже, .

Оскільки медіани точкою перетину діляться у відношенні два до одного ( записується 2:1), то

.

Тоді координати точки О обчислимо за формулами (4.2) за умови, що :

;

.

Відповідь: точка О має координати .



**СТОРІНКА ІСТОРІЇ**

**П’єр Ферма (1601-1665)** вважається „королем” любителів математики, адже вона була лише хобі для французького юриста. Весь свій вільний час, якого за 34 роки державної служби було багато, Ферма присвячував математиці, займаючись дослідженнями в галузі теорії чисел, геометрії, теорії ймовірностей тощо.

Найкращі з відкриттів П.Ферма настільки прості за своїм формулюванням, що будь-який школяр може зрозуміти зміст і оцінити їхню красу. Світової слави набула «Велика теорема Ферма» – рівняння , де  - натуральне число, більше за 2, не має нульових розв’язків у цілих числах. До кінця 20 століття вона залишалась недоведеною, хоча нею займалися багато видатних учених. Було встановлено навіть спеціальний грошовий приз (у розмірі 100 000 марок), який повинен був вручитися тому, хто доведе цю теорему. І лише в 1995 році це вдалося зробити англійському математику Ендрю Уяйлсу.

Що стосується аналітичної геометрії, то П. Ферма більш систематизовано ніж Р.Декарт ввів прямолінійні координати і застосовував їх до вивчення геометрії; вивів рівняння прямої і кривих другого порядку; розглянув задачу про перенесення систем координат (переносив центр координат і повертав осі).

***в) Паралельний переніс осей координат***

Перш за все віднайдемо формули перетворення декартових координат при паралельному переносі, тобто при такій зміні декартової системи, коли змінюється положення початкових координат, а напрямок осей (і масштаб) залишаються незмінними.

Нехай   і  - старі, а  і  - нові координати осі (мал. 30). Положення нових осей відносно старої системи визначається заданням старих координат нового початку:. Число а називається ***переносом по напрямі осі ,*** число в – називається ***переносом по напрямі осі .***

Нехай точка М площини має відносно старих осей деякі координати (*x; y*). Ця точка по відношенню до нових осей, має інші координати: . Наша ціль - встановити формули, що виражають *x* і *y* через  і ( або навпаки).

***y***

***y***

***y’***

***y’***

***x***

***x***

***x'***

***x'***

***0***

***0’***

***b***

***a***

***M***

***Mx’***

***Mx***

***0x’***

мал. 30

Спроектуємо точку  на вісь  і точку М на вісь  і . Позначимо проекцію точки на вісь  через , проекції точки М на осі  і  - через  і . Очевидно, величина відрізка  осі  рівна величині відрізка  осі . Але =; отже . Крім того, =а, . Згідно співвідношення АВ+ВС=АС матимемо рівність , з якої та на основі попереднього отримаємо:

 .

Аналогічно при допомозі проектувань на осі  і  знайдемо

.

Отже, це і є шукані формули. Їх можна також записати у вигляді:

 ;  (4.4)

Отже,***паралельний переніс осей здійснюється так****:* при паралельному переносі декартової системи координат на величину  в напрямку осі  і на величину в напрямку осі  абсциси всіх точок зменшуються на величину , ординати на величину .

**2. Поняття рівняння лінії на площині**

Розглянемо рівність

, (4.5)

яка зв’язує змінні величини . Дану рівність називають ***рівнянням з двома змінними,*** якщо вона виконується не для всіх пар чисел  та , і називається ***тотожністю***, якщо вона справедлива для всіх  та .

Рівняння (4.5) називається ***рівнянням лінії l,*** яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати та  кожної точки лінії *l* і не задовольняють координати  та  жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Коли рівняння (4.5) рівнянням лінії ***l***, то кажуть, що це рівняння визначає (або задає) лінію. Отже, якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольнять, тоне лежить.

Лінія, яка задана рівнянням (4.5) відносно певної системи координат у площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Змінні  та  в рівнянні (4.5) лінії називаються ***змінними координатами її точок***.

Ми вивчатимемо лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються відповідно рівняннями

 та .

**3. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора**

***Означення. Нормальним вектором*** *прямої називають будь-який ненульовий вектор, який перпендикулярний до даної прямої.*

Нехай задана точка  і нормальний вектор  (А;В). Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку , перпендикулярну до даного вектора. Для цього на прямій  (мал. 31) візьмемо будь-яку точку М ( і побудуємо вектор .







******

мал.31

Оскільки , то  =0. Звідси випливає ***рівняння прямої, яка проходить через дану точку і перпендикулярна до вектора:***

 (4.6)

*Завдання 43.* Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку (3; -2) перпендикулярно до вектора (4; 5).

Розв’язання

За умовою задачі маємо, що координати точки 

Використовуючи рівняння (4.6) отримаємо:



**4. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.**

**Рівняння прямої у відрізках**

Якщо у рівнянні (4.6) розкрити дужки і позначити , то отримаємо ***загальне рівняння прямої***

 (4.7)

Проведемо дослідження загального рівняння прямої.

1) Якщо С=0, то пряма  проходить через початок координат.

2) Якщо А=0, то пряма  (або ) паралельна до осі .

3) Якщо В=0, то пряма  (або ) паралельна до осі .

4) Якщо А=С=0, то пряма  (або у=0) являє собою рівняння осі ОХ (співпадає з віссю ОХ).

5) Якщо В=С=0, то пряма  (або х=0) являє собою рівняння осі ОУ.

Якщо у рівнянні (4.7) , то розв’язавши це рівняння відносно у, одержимо:



Позначимо через , а через . Одержимо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:***

 (4.8)





=kx+b



0





Мал. 32

Якщо у рівнянні (4.6)  коефіцієнт , то це рівняння можна переписати так:



Оскільки, за раніше введеним позначенням , то отримуємо дане рівняння є ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку***

 (4.9)

*Завдання 44.* Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку (1; 2) та утворює з віссю ОХ кут .

Розв’язання

Оскільки за умовою завдання шукана пряма нахилена під кутом до осі абсцис, то знайдемо значення її кутового коефіцієнту , як тангенс кута нахилу:



Тоді з (4.9) випливає, що

;

.

Отримане рівняння можна подати і у загальному вигляді (4.7):

 або .

Відповідь:  або .

Перепишемо рівняння (4.7) у вигляді .

Припустимо, що  і розділило це рівняння на . Отримаємо:

 або .

При виведені формули (4.8) було введено позначення . За аналогією, нехай . Тоді отримаємо рівняння***:***

 (4.10)

де *a, b* – відрізки, які відтинає пряма на осях координат (мал. 33), що називається ***рівнянням прямої у відрізках на осях.***

*Завдання 45.* Перейдіть від загального рівняння прямої  до рівняння у відрізках на осях і побудуйте дану пряму.

Розв’язання

y

x

0

b

a

мал.33

Виконаємо перехід від загального рівняння прямої (4.7) до рівняння у відрізках на осях (4.10) аналогічно до теорії. Перепишемо дане рівняння



у вигляді

.

Рівняння (4.10) отримаємо поділивши обидві частини перетвореного рівняння на 12:

.

Після скорочення матимемо шукане рівняння:

.

Щоб виконати побудову позначимо на осі абсцис точку , а на осі ординат –  і проведемо через дві точки пряму (мал. 34).

-3

4

y

x

0

мал.34

**5. Канонічне і параметричне рівняння прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки**

***Означення. Напрямним вектором*** *прямої називається будь-який ненульовий вектор, який паралельний до даної прямої.*

Нехай задана точка  і напрямний вектор . Для того, щоб отримати рівняння прямої , яка проходить через точку  паралельно до  виберемо на ній (мал. 35) будь-яку точку  і побудуємо вектор , координати якого

.

***М0***

***М***

***l***

******

мал.35

Оскільки,  колінеарний , то їхні відповідні координати пропорційні (за умовою колінеарності векторів)

 (4.11)

Це є ***канонічне рівняння прямої***.

Прирівняємо обидві частини рівності (4.11 ) до деякого числа t (параметр):

 і .

Оскільки дві дані рівності отримані з однієї (4.11), то їх необхідно розглядати в системі.

Скориставшись властивістю пропорції (добуток крайніх множників дорівнює добутку середніх) матимемо:

.

Або, виокремивши значення невідомих, отримаємо ***параметричне рівняння прямої*:**

 (4.12 )

*Завдання 46.* Запишіть канонічне та параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку М (2; 4) паралельно до вектора  (1; 3).

Розв’язання

Скориставшись формулою (4.11) запишемо канонічне рівняння даної прямої:

.

А на основі (4.12 ) отримаємо параметричне рівняння:

.

Відповідь:  та .

Нехай дано дві точки , . Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві дані точки. Для цього побудуємо вектор   і візьмемо його за напрямний (мал. 36).

***М1***

***М2***

мал. 36

Використовуючи рівняння (4.11) ,одержимо ***рівняння прямої, яка проходить через дві точки:***

 (4.13 )

*Завдання 47*. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки (0; -2) та (3; 2).

Розв’язання

На основі (4.13 ), де , , , , матимемо:

, або .

Відповідь: .