Лекція 8. Ознаки паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої.

План

1. Взаємне розміщення двох прямих.

2. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої.

7. Використання прямої при розв’язуванні професійно спрямованих задач.

**1. Взаємне розміщення двох прямих.**

Дві прямі на площині можуть перетинатися, можуть не перетинатися, тобто бути паралельними.

При перетині дві прямі утворюють чотири кути: два гострі і два тупі. Такі кути називають вертикальними. Якщо прямі перетинаються під прямим кутом, то ткі прямі будуть перпендикулярними. В аналітичній геометрії розглядають поняття кута між двома прямими, формули, за якими обчислюють кут між прямими.

**2. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої**

Нехай дано дві прямі своїми загальними рівняннями:

 і ,

що перетинаються під довільним кутом *.*

***Означення.******Кут між двома прямими*** *визначається кутом між їх нормальними векторами  та *.

Використовуючи поняття скалярного добутку, запишемо формулу для знаходження кута ** між даними прямими:

 або **** (4.14 )

***l1***

***l2***









мал. 37

Використовуючи кутові коефіцієнти прямих отримаємо .

При перетині двох прямих можливі такі часткові випадки: прямі паралельні, або перпендикулярні. Справедливими будуть такі твердження:

1) Якщо *дві прямі  паралельні*, то їх нормальні вектори  та  також паралельні, а отже їх координати пропорційні (за умовою колінеарності векторів):

. (4.15)

Дана рівність називається ***умовою паралельності двох прямих.***



***l1***



***l2***

мал.38

2) Якщо *дві прямі перпендикулярні*, то їх нормальні вектори перпендикулярні, а тому виконується умова перпендикулярності векторів – їх скалярний добуток дорівнює нулю:

. (4.16)

Це є ***умова перпендикулярності двох прямих.***

*Завдання 48*. Знайдіть кут між прямими  і .

Розв’язання

За формулою (4.14) отримаємо значення косинуса даного кута:

.

Тоді, значення самого кута ** знайдемо за допомогою обернено тригонометричної функції:

.

Відповідь: .

Розглянемо пряму, задану загальним рівнянням . Нехай точка  не належить даній прямій (мал. 39).

***Означення.******Відстанню від точки до прямої*** *називається довжина перпендикулярного, опущеного з даної точки на пряму. Вона знаходиться за допомогою формули:*

 (4.17)

***l***

***d***

***M0***

мал. 39

*Завдання 49.* Знайдіть відстань від точки  до прямої .

Розв’язання

Перепишемо рівняння даної прямої у загальному вигляді:

.

Користуючись умовою задачі та загальним рівнянням прямої можна зазначимо,що :

.

Скористаємось формулою (4.17), отримаємо:

.

Відповідь: .

**3. Використання прямої при розв’язуванні професійно спрямованих задач**

Основні поняття, методи та формули аналітичної геометрії широко застосовуються в багатьох навчальних дисциплінах вищих економічних навчальних закладів, а також в різноманітних економічних задачах.

Зокрема, рівняння прямої та її графік використовуються при ***визначенні рентабельності транспортного постачання***.

*Завдання 50.* Визначіть рентабельність транспортних перевезень одиниці вантажу  залізничним та автомобільним транспортом на відстань  км, якщо транспортні витрати знаходяться відповідно за формулами , . На яких відстанях який вид транспорту вигідніше використовувати?

Розв’язання

Побудуємо графіки транспортних витрат перевезення (мал.40а)

20

15

10

5

5

10

15

20

*N*



Мал. 40а

Це прямі, які перетинаються в точці . Знайти її координати можна аналітично. Для цього необхідно розв’язати систему, рівняннями якої є рівняння тих прямих, які при перетині дали цю точку. У нашому випадку система



має розв’язок: 

Отже, точка перетину прямих - .

Графіки витрат дозволяють зробити висновок, що і є відповіддю до поставленого завдання.

Відповідь:

1. коли , тобто коли кількість кілометрів менша за 100, транспортні витрати перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;
2. коли , тобто коли кількість кілометрів більша за 100, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

Ще одним прикладом застосування лінії на площині при розв’язуванні економічних задач може бути побудова ***бюджетної прямої***.

*Завдання 51.* Бюджет сім’ї, який становить  грн., витрачається на те, щоб придбати товари двох видів: виду *А* – за ціною  грн. та виду *В* – за ціною  грн. за одиницю. В яких кількостях можна придбати ці товари?

Розв’язання

Позначимо через  кількість товару виду *А*, через  - товару *В*, які планується закупити. Зрозуміло, що змінні ,  повинні задовольняти рівність

.

Побудована пряма, що задається даним рівнянням і проходить через точки ,  називається ***бюджетною*** (мал. 40б).

мал. 40б

0



*х*

*у*

мал. 40в

0

2

5

*у*

*х*

Реальний зміст в даній задачі має відрізок . Надавши конкретних значень змінним (мал. 40в), наприклад  (тис. грн.), зробимо *висновок:*

1. сім’я може витратити всі гроші на придбання двох товарів виду *А;*
2. сім’я може витратити всі гроші на придбання п’яти товарів виду *В*;
3. сім’я може витратити гроші на придбання одного товару виду *А*, двох товарів виду *В* (у цьому випадку бюджет буде використано не повністю).

** В результаті вивчення теми необхідно:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * поняття рівняння лінії на площині; * різновиди рівнянь прямої лінії на площині; * умови паралельності та перпендикулярності прямих, заданих загальним рівнянням; * означення та формулу для обчислення кута між двома прямими. | * переходити від однієї форми запису прямої до іншої; * визначати кут між прямими та їх рівняннями; * знаходити відстань від точки до прямої, відстань між точками, координати ділення відрізка; * записувати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки; * застосовувати знання з аналітичної геометрії до дослідження властивостей геометричних фігур (зокрема, трикутника); * застосовувати вивчені формули та властивості до розв’язування задач на дослідження найраціональнішим способом (таким, що потребує менших затрат часу, зусиль та швидше приводить до шуканого результату). |