Лекція 9. Криві другого порядку на площині. Коло та еліпс: означення, рівняння, основні властивості, побудова.

**План**

1. Коло.

2. Еліпс.

3. Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду.

4. Застосування ліній другого порядку до розв’язування задач економічного змісту.

*Основні поняття та твердження:* коло, рівняння кола, еліпс, фокус, велика і мала осі, ексцентриситет еліпса, параметричні рівняння, загальне та канонічне рівняння лінії другого порядку.

Введемо спочатку поняття лінії другого порядку.

***Означення. Лінія другого порядку*** *– це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду*

*,* (6.1)

*де коефіцієнти  - дійсні числа, причому хоча б одне з чисел  відмінне від нуля, тобто*

.

До ліній другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх можна отримати як лінії перерізу кругового конуса площиною, тому їх інколи називають конічними перерізами.

**1. Коло**

***Означення. Колом*** *називається множина точок площини, відстані від яких до заданої точки площини (****центр кола****) дорівнюють сталому числу (****радіусу****).*

Нехай центр кола знаходиться в точці , а відстань від будь-якої точки , що лежить на колі до центру С дорівнює R.

***y***

***y0***

***x0***

***x***

***0***





мал. 46

Знайдемо відстань від центра кола до довільної точки :

.

Згідно з означенням кола, маємо  тому  або

. (6.2)

***Це рівняння кола з центром в точці ***

Якщо центр кола знаходиться в початку координат, тобто , то рівняння кола набуде вигляду:

***у***

***х***

***с***

мал.47

 (6.3 )

Це є ***рівняння кола з центром в початку координат*** або ***канонічне рівняння кола.***

Піднесемо обидві частини рівності (6.2) до квадрату:

;

.

Введемо позначення: . Отримаємо ***загальне рівняння кола***:

. (6.4)

*Завдання 59.* Запишіть рівняння кола з центром в початку координат і радіусом *R = 3* .

Розв’язання

Користуючись формулою (6.3) матимемо .

Відповідь: .

*Завдання 60*. Дослідіть, яке рівняння має коло, якщо відомі координати кінцевих точок

одного з його діаметрів: А (2; 0); В (-4; 6).

Розв’язання

Діаметр – це 2 радіуса. Тоді, центр кола знаходиться в точці – середині прямої АВ. Знайдемо координати середини відрізка:

; .

Отже, центр знаходиться в точці С (-1; 3 ). Тоді

.

Користуючись рівнянням (6.2) маємо:

.

Відповідь: .

**2. Еліпс**

***Означення. Еліпсом*** *називається множина всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються* ***фокусами*** *є величина стала і дорівнює 2а.*

Розмістимо на площині дві точки  (фокуси еліпса) так, щоб початок прямокутної системи координат ділив відстань між ними навпіл.

***у***

***х***

***0***

мал. 48

***F1(-c; 0)***

***F2(c; 0)***

***A2(a; 0)***

***A1(-a; 0)***

***B1(0; b)***

***B2(0; -b)***

***M(x; y)***

Позначимо . Тоді  (-с, 0 ),  (с, 0 ). Нехай  - довільна точка площини і

. (6.5)

Причому, за означенням еліпса  тому і . Оскільки

 і ,

то користуючись рівністю (6.5) отримаємо:

.

Розв’язавши дане ірраціональне рівняння і ввівши позначення , отримаємо рівняння

.

Поділивши обидві частини рівності на  отримаємо ***канонічне рівняння еліпса з центром в початку координат:***

, (6.6 )

де  –відповідно велика та мала півосі еліпса, велика вісь дорівнює 2, мала вісь дорівнює 2.

Якщо центр еліпса знаходиться в точці С (), а осі еліпса паралельні осям координат, то отримаємо рівняння еліпса з центром в довільній точці С:

. (6.7 )

Якщо центр еліпса знаходиться в початку координат, то осі координат є осями симетрії еліпса. В цьому випадку еліпс перетинає осі координат в точках А(), В(), С, Д.

***Означення.*** *Точки перетину еліпса з осями координат називають* ***вершинами еліпса.***

***Означення.*** *Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною* ***е****, яка називається* ***ексцентриситетом еліпса*** *і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:*

** (6.8)

*причому , оскільки .*

Якщо *е=0*, то еліпс вироджується в коло. Якщо *е*1, то еліпс вироджується у відрізок. Для еліпса має місце формула:

. (6.9)

*Завдання 61*. Відстань між фокусами 2с=8, а велика вісь 2=10. Запишіть рівняння еліпса.

Розв’язання

За умовою задачі 2=10, отже =5 ; 2с=8 тому с=4. Використовуючи рівність (6.9) отримаємо . Отже,

, .

Тоді на основі рівності (9.6) можна стверджувати , що рівняння еліпса буде:

.

Відповідь: .

**3. Параметричні рівняння кола і еліпса**

Нехай в прямокутній системі координат задано коло  (рис. 49). Кут між віссю  і радіус – вектором позначимо через *t.* Точка  лежить на колі тоді і тільки тоді, коли параметричне рівняння еліпса:

. (6.10)

Це ***параметричні рівняння кола.***

мал.49

***у***

***х***

***0***

***у***

***х***

***R***

***t***

***M(x; y)***

Для еліпса будемо мати такі ***параметричні рівняння еліпса***:

. (6.11)

**4. Гіпербола**

***Означення. Гіперболою*** *називається множина точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала менша відстаней між фокусами.*

Виконуючи перетворення аналогічні як і при написанні рівняння еліпса та враховуючи, що  і отримаємо рівняння гіперболи

, (6.12)

де - дійсна, - уявна півосі гіперболи. Це ***канонічне рівняння гіперболи з центром в початку координат*** (рис. 50).

Якщо центр гіперболи знаходиться у точці С , а осі гіперболи паралельні координатам, то ***канонічне рівняння гіперболи з центром в довільній точці*** запишеться так:

. (6.13)

Гіпербола складається із двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти, рівняння яких

. (6.14)

мал. 50

***y***

***x***





***-b***

***-a***

***0***

***l1***

***l2***









Осі симетрії називаються ***осями гіперболи***, точка перетину осей – ***центр гіперболи***. Величини , ,  зв’язані співвідношенням:

. (6.15)

Гіпербола перетинає вісь ОХ у точці  і . Ці точки називаються ***вершинами* *гіперболи.*** Якщо , то гіпербола називається ***рівносторонньою*** і її рівняння буде:

 (6.16)

***Означення. Ексцентриситетом*** *гіперболи називають відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:*

**

*причому*.

***Означення.*** *Прямі , де  - дійсна піввісь гіперболи, а  - її ексцентриситет, називаються* ***директрисами гіперболи****.*

*Завдання 62.* Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі *ОХ* симетрично осям координат, якщо:

1) дійсна вісь =8, а відстань між фокусами 2с=10;

2) якщо рівняння асимптот гіперболи і уявна вісь .

Розв’язання

1) Оскільки , то . Підставимо відомі значення:

, тобто .

Тоді рівняння гіперболи запишеться у вигляді: .

2) якщо рівняння асимптот гіперболи і уявна вісь .

Маємо . Тоді , тому =10. Підставимо у рівняння гіперболи отримані значення, що дозволяє записати шукане рівняння:

.

Відповідь: 1) ; 2) .

**5. Парабола**

***Означення. Параболою*** *називається множина точок площини, рівновіддалених від однієї точки, яка називається фокусом і прямої, що називається* ***директрисою****.*

Для того, щоб одержати рівняння параболи розмістимо фокус  на осі ОХ, а рівняння директриси запишемо у вигляді:

, (6.17)

де  - параметр параболи і це відстань від фокуса до директриси.

Тоді, використовуючи означення параболи, одержимо її рівняння:

2. (6.18)

Це є ***рівняння параболи з центром в початку координат, і вітками, що симетричні ОХ та направлені вправо.***

Випадки розміщення параболи зображено на малюнках 51 – 54.

Якщо ***вершина параболи знаходиться у точці С ,*** а вісь симетрії параболи паралельна одній з осей координат, то рівняння будуть мати вигляд:

; . (6.19)

Після піднесення до квадрату і спрощення рівнянь (6.19) дістанемо

, (6.20)

що також є рівнянням параболи з центром у довільній точці та віссю симетрії, яка паралельна осі .

*Завдання 63.* Запишіть рівняння параболи, якщо віссю симетрії є вісь ОХ, вітки параболи направлені вліво, вершина знаходиться у початку координат і параметр p=6.

Розв’язання

Користуючись умовою задачі, можна записати рівняння параболи:

.

***у***

***х***

***0***



мал.52





0



мал. 51



***х***

***0***



мал.54



***х***

***0***



мал. 53

**6. Загальне рівняння лінії другого порядку і її зведення до канонічного виду**

Загальне рівняння лінії другого порядку має вигляд:

.

Якщо у цьому рівнянні =0, то його можна звести до канонічного рівняння:

* кола (  );
* еліпса ;
* гіпербола ;
* параболи (або ).

Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного відбувається шляхом виділення повних квадратів.

*Завдання 64.* Встановіть, яка лінія визначається рівнянням ?

Розв’язання



Це є рівняння еліпса з центром в точці С (-1; -2; ), причому , =.

*Завдання 65.* Встановіть тип лінії другого порядку  та зведіть її до канонічного вигляду.

Розв’язання

Оскільки , то дана лінія є параболою.

;

.

Відповідь: це парабола з центром в точці  та параметром *p*=2.

**7. Застосування ліній другого порядку до розв’язування задач економічного змісту**

Розглянемо дане питання на конкретних прикладах.

*Завдання 66.* Дві фабрики розташовані у двох містах, віддаль між якими 300 км, виготовляють однотипні вироби. Оптова відпускна ціна на ці вироби однакова на обох фабриках і становить *m* грн за один виріб. Фабрика *А* має в розпорядженні транспорт якісно кращий, ніж фабрика *В*: витрати на перевезення одного виробу на 1 км для фабрики *А* становлять 10 грн, а для фабрики *В* – 20 грн. Як доцільніше територіально закріпити споживачів до цих фабрик, щоб витрати при перевезенні виробів були найменшими?

Розв’язування

Позначимо віддаль від фабрики *А* до споживачів через , а від фабрики *В* - . Тоді витрати споживачів можна записати за допомогою функцій

; .

Встановимо розміщення споживачів, коли :

.

Отже, .

Якщо фабрика А знаходиться в деякій точці, наприклад у початку координат , то територія радіусом в 1 км обмежується колом, рівняння якого . З іншого боку, віддаль до споживачів позначено . Тому

.

Координати фабрики В, що знаходиться від А на відстані 300 км, будуть . Отже, по аналогії з попередніми міркуваннями,

.

Враховуючи, що  матимемо:

;

200

100

400

200

***A***

***B***

мал 55

.

Останнє рівняння можна записати у

вигляді .

Це канонічне рівняння кола з центром

в точці (400;0) та радіусом 200 км.

Економічно отримані результати можна трактувати так: споживачеві в межах записаного кола (мал 55) доцільніше придбати вироби на фабриці В, а поза його межами – на фабриці А. Вздовж контуру кола вибір фабрики не має значення.

*Завдання 67*. Підприємство розпочало виробництво верстатів нового типу. Їх випуск відбувається рівномірно, вартість річного обсягу продукції становить 1,5 млн грн., а термін експлуатації верстатів дорівнює 15 рокам. Дослідіть, як зміниться вартість парку верстатів після 2, 5 та 11 років експлуатації.

Розв’язування

Шукану вартість верстатів позначимо через . Згідно з умовою, вартість змінюватиметься в залежності від часу експлуатації , тобто є функцією по часу: . Зрозуміло, що в момент початку виробництва верстатів час дорівнює нулю () і вартість виробництва також рівна нулю. По закінченні деякого часу експлуатації вартість парку верстатів становить . Проте фактично вартість є меншою, адже за цей час відбулося фізичне спрацювання.

Рівномірний випуск верстатів вказує на те, що в часовому проміжку , який розглядається, одночасно працюють як ті верстати, які були виготовлені на початку періоду, так і ті, що вводилися до експлуатації пізніше. Вартість останніх є меншою за вартість перших навіть враховуючи спрацювання. Оскільки верстати впроваджувалися в експлуатацію щорічно, то середній вік верстата становить .

Тоді річне спрацювання буде

.

Таким чином, фактична вартість парку верстатів у  році буде дорівнювати різниці вартості та річного спрацювання, тобто

.

Отримане рівняння є рівнянням параболи із зсуненою вершиною. Якщо порівняти його (9.20), то побачимо, що , , .

Надавши конкретних значень змінній  матимемо:

- за час  роки фактична вартість парку верстатів дорівнюватиме  млн. грн. в той час, як вартість їх була 3 млн. грн. Тобто, річне спрацювання відповідає сумі в 200 тис. грн.

- при  років фактична вартість  млн. грн. на відміну від початкової вартості 7,5 млн. грн. Річне спрацювання дорівнює 1,25 млн. грн.;

- при ,  млн. грн., а сума спрацювання 6,05 млн. грн.

** В результаті вивчення теми необхідно:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***знати*** | ***вміти*** |
| * означення та канонічні рівняння ліній другого порядку: кола, еліпса, гіперболи та параболи; * умови, які допомагають визначати вид лінії другого порядку. | * визначати параметри та координати фокусів еліпса, гіперболи, параболи, їх ексцентриситети; * записувати канонічні рівняння кривих другого порядку; * будувати криві другого порядку за їх канонічним рівнянням; * визначати вид лінії другого порядку за її загальним рівнянням; * зводити загальне рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду шляхом виділення повного квадрату; * використовувати отримані знання з теми для розв’язування задач економічного змісту. |