

Задание 7

Численное интегрирование

3.1.7(b) Метод парабол (Симпсона)

Дано: $f(x)$ - функция

a, b - пределы интегрирования

б)-формула Симпсона-(парабол)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + 4 \sum_{i=1}^m f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f_{2i} + f_{2m} \right)$$

$$|R_{n,2}[f]| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4 \quad n=2m$$

Реализация:

```
In[ ]:= parabol[n_] :=
  (b-a)/(2*3*n) * (f[a] + f[b] + 4 * Sum[f[a + (b-a)/(2*n)*(2*i+1)], {i, 0, n-1}] + 2 * Sum[f[a + (b-a)/(2*n)*(2*i)], {i, 1, n-1}]);

In[ ]:= Clear[simpson]
(*очистить*)
simpson[f[x_], a1_, b1_] := Module[{a = a1, b = b1, M4, answer = {}},
  (*программный модуль*)
  M4 = Max[f''''[#] & /@ {a, b}];
  (*максимум*)
  Do[If[Abs[parabol[n] - parabol[2*n]] <= (b-a)/180 * ((b-a)/(2*n))^4 * M4,
    (*абсолютное значение*)
    AppendTo[answer, {parabol[n], n}], {n, 1, 20}];
  answer]
```

Пример:

```
In[ ]:= f[x_] := Sin[x^2 + 0.2];
(*синус*)
```

На отрезке $[1, \text{Pi}/2]$:

```
In[ ]:= a = 1; b = Pi/2;
(*число пи*)
```

Результат:

```
In[ ]:= simpson[f[x_], a, b] // TableForm
```

табличная форма

```
Out[ ]//TableForm=
```

0.497665	1
0.496598	2
0.496537	3
0.496527	4
0.496524	5
0.496523	6
0.496523	7
0.496523	8
0.496522	9
0.496522	10
0.496522	11
0.496522	12
0.496522	13
0.496522	14
0.496522	15
0.496522	16
0.496522	17
0.496522	18
0.496522	19
0.496522	20

С увеличением n точность интеграла увеличивается, начиная с $n=9$, результаты встроенной функции и полученное с использованием алгоритма Симпсона, отличаются менее чем на 0.0001

Проверка:

Сверяемся со встроенной функцией

$$\text{In[]}:= \int_1^{\pi/2} f[x] \, dx$$

```
Out[ ]:= 0.496522
```

Пример 2:

$$\text{In[]}:= f[x_] := \frac{\cos[x]}{2 + \sin[x]};$$

Рассматриваем функцию на отрезке [2;8]:

```
In[ ]:= a = 2; b = 8;
```

Результат:

```
In[ ]:= N[simpson[f[x_], a, b]] // TableForm
```

численное приближение табличная форма

```
Out[ ]:= J/TableForm=
```

0.0270999	8.
0.027153	9.
0.0271457	10.
0.0271463	11.
0.0271468	12.
0.0271468	13.
0.0271469	14.
0.0271469	15.
0.027147	16.
0.027147	17.
0.027147	18.
0.027147	19.
0.0271471	20.

Проверка:

Сверяемся со встроенной функцией

```
In[ ]:= N[ $\int_2^8 \frac{\cos[x]}{2 + \sin[x]} dx$ ]
```

численное приближение

```
Out[ ]:= 0.0271471
```