Стабилизация переключаемой линейной системы с заданным временем задержки

Студент: Спиркина Дарья Олеговна, 414 группа
Науч. рук.: Фурсов Андрей Серафимович

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики,
Кафедра Нелинейных Динамических Систем и Процессов Управления

Постановка задачи

Рассмотрим переключаемую систему,

$$\dot{x} = A_\sigma x + b_\sigma u,$$

где:

- $x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы
- $\sigma \in S_{\tau_0}$, где S_{τ_0} – множетсво таких переключаемых сигналов, где минимальное время переключения не меньше чем τ_0
- $\sigma(t) : [0, +\infty) \to \{1, \dots, m\}$ – кусочно-постоянная функция переключения
- $A_i \in R^{n \times n}$, $b_i \in R^n$ – матрицы и векторы коэффициентов для i-го режима

Постановка задачи

В определенный момент времени происходит переключение правой части и один из режимов нашей системы становится активным.

Для обеспечения устойчивости используем линейный регулятор

$$u = -kx$$

Подставляя уравнение регулятора, получаем замкнутую систему вида

$$\dot{x} = (A_\sigma - b_\sigma k)x$$

Требуется найти регулятор, который обеспечит стабилизацию всей системы с заданым временем задержки τ_0.

Алгоритм работы

- 1) Метод квадратичной стабилизации
- 2) Генетическим алгоритмом находим *k*, который обеспечивает устойчивость каждого режима. Затем оцениваем время задержки двумя способами:
  - Метод функции Ляпунова
  - Метод диагонализации

  Пусть τ_{res} - минимальное получившееся время задержки. Если $\tau_{res} < \tau_0$, то стабилизация системы гарантирована, иначе - нет.

Метод квадратичной стабилизации

Будем искать регулятор, обеспечивающий существование общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ) для всех замкнутых режимов

$$\dot{x} = (A_i - b_i k)x$$

Данную задачу можно свести к задаче решения системы матричных неравенств

$$\begin{cases} (A_i - b_i k)^T H + H(A_i - b_i k) < 0 \\ H > 0, \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \tag{1}$$

Решение этой системы — пара (H, k). Если решение существует, то обратная связь $u = -kx$ обеспечивает ОКФЛ вида $V(x) = x^T Hx$.

Метод квадратичной стабилизации

Систему можно свести к системе линейных матричных неравенств (LMI). Умножаем первое неравенство на H^{-1} с двух сторон

$$H^{-1}(A_i - b_i k)^T + (A_i - b_i k)H^{-1} < 0$$

$$H^{-1}A_i^T - H^{-1}k^T b_i^T + A_i H^{-1} - b_i k H^{-1} < 0$$

Обозначим $H^{-1} = Y$ ($Y^T = Y$)

$$YA_i^T - Yk^T b_i^T + A_i Y - b_i k Y < 0$$

Введем $z = -kY \Rightarrow z^T = -Yk^T$

Метод квадратичной стабилизации

Тогда получаем

$$\begin{cases} YA_i^T + A_i Y + z^T b_i^T + b_i z < 0 \\ Y > 0, \quad i = 1, \overline{m} \end{cases}$$

Решение системы — пара (z, Y). Система является системой линейных матричных неравенств, и если (z, Y) — решение, то обратная связь $u = -kx$, где $k = -zY^{-1}$, является стабилизирующей обратной связью для исходной системы, так как в силу неравенств (1) она обеспечивает ОКФЛ для всех режимов переключаемой системы.
Получаем управление обеспечивающее устойчивость режимов и всей системы вне зависимости от τ_0.

Генетический алгоритм

Генетическим алгоритмом находим k, которые обеспечивают устойчивость каждого режима.

Целевая функция:

$$F_1 = \max_i(\max \operatorname{Re} \lambda(A_i - b_i k))$$

$$F_2 = \begin{cases} -\tau + \dfrac{2}{\theta}\ln(\rho), & \text{если } F_1 < 0 \\ F_1, & \text{если } F_1 \geq 0 \end{cases}$$

Цель: $F_2 < 0$

Метод функций Ляпунова

- Проверим, что каждый режим управляемый
- Проверим, что $H_i = A_i - b_i k$ устойчива для всех $i = \overline{1, m}$
- Решим уравнение Ляпунова:

$$H_i^\top Q_i + Q_i H_i = -I$$

- Введем параметры:

$$M_i = \lambda_{\max}(Q_i), \quad m_i = \lambda_{\min}(Q_i), \quad c_i = \sqrt{\frac{M_i}{m_i}}, \quad \nu_i = \frac{1}{2M_i}$$

Метод функций Ляпунова

- Определим:

$$\rho = \max_i c_i, \quad \theta = \min_i \nu_i$$

- Критерий устойчивости:

$$\tau > \frac{2}{\theta} \ln(\rho)$$

Оптимальная оценка: минимальное значение $\frac{2}{\theta} \ln(\rho)$ среди всех допустимых k

Метод диагонализации

- Проверить, что каждый режим управляемый
- Найти такую k^j, что матрицы $A_i - b_i k^j$ устойчивы $\forall i = \overline{1, m}$
- Проверить, что все собтвенные значения $\lambda_1^i, ..., \lambda_n^i$ вещественные и различные
- Введем $\gamma = \max_i |\lambda_1^i, ..., \lambda_n^i|$
- Введем матрицу T_i, как матрицу диагонализации: $T_i^{-1}(A_i - b_i k^j)T_i = \Lambda_i$
- Вычислим: $\mu_i = \|T_i\| \cdot \|T_i^{-1}\|$, где $\|T_i\| = \max_k \sum_l |t_{kl}|$
- Определим $\mu = \max_i \mu_i$
- Оценка:

$$\tau = \frac{2}{\gamma} \ln(\mu)$$

Список литературы

- Б.Т. Поляк М.В. Хлебников П.С. Щербаков "Управление линейными системами при внешних возмущениях"