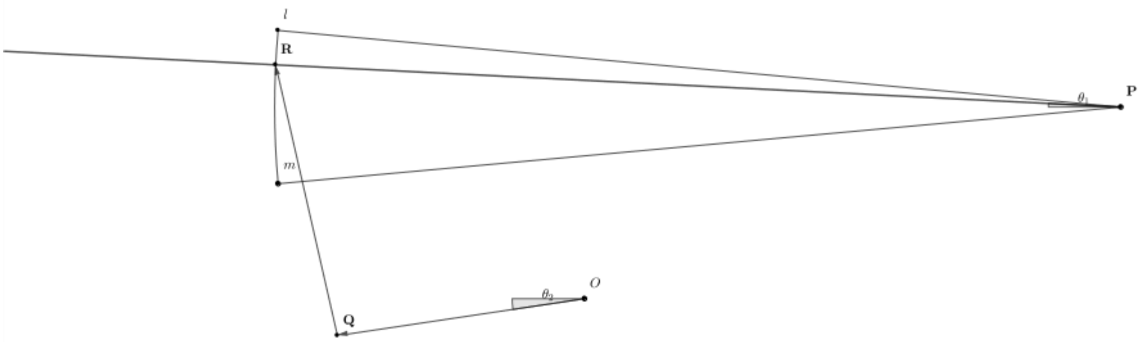
직접 힌지를 만들어 실험을 하는 과정을 반복하다보니 상당히 번거롭고 불편한 작업이 되었다. 힌지, 레일플레이트, 암 부분만을 간단한 수학적 모형으로 만들어 컴퓨터를 통해 실험을 해보는 것이 효율적일까 라는 의문을 시작으로 모형을 만들어보게 되었다.



위 그림과 같이 레일플레이트와 힌지만을 간단하게 나타내어 보자. 레일플레이트가 힌지와 고정된 지점을 $\mathbf{P}$, 서보모터의 회전축의 위치를 O, 즉 원점, 어퍼암과 레일플레이트의 연결점을 $\mathbf{R}$, 로워암과 어퍼암의 연결점을 $\mathbf{Q}$, 로워암을 선분 $\overline{OQ}$, 어퍼암을 선분 $\overline{QR}$라고 하자. 또한 선분 $\overline{OQ}$의 길이를 x, 선분 $\overline{QR}$의 길이를 y, 선분 $\overline{PR}$의 길이를 α라고 하자. 또한, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 를 각 x 축, y 축의 단위 기저벡터라고 하자. 일반적으로 한 점에 대해 볼드체로 표현된 경우는 위치벡터로, 그렇지 않은 경우 제한적으로 좌표평면 상의 한 점으로 취급한다.

레일플레이트의 최대 회전한도 θ_{limit}가 주어졌을때, 레일플레이트는 $-\theta_{limit}$, θ_{limit}범위 내에서 회전 가능하다. 그렇다면 점 $\mathbf{R}$은 반지름이 α 이고, $-\theta_{limit}$, θ_{limit}사이에서 정의된 호 위의 한 점이다.

정리 1. 점 P에서부터 반지름을 α, $[-\theta_{limit}, \theta_{limit}]$사이에 정의된 호 $\widehat{lm}$ 위의 임의의 점 $\mathbf{R}$를 잡자. $\mathbf{R} = \mathbf{P} + (\alpha \cos\theta_1, \alpha \sin\theta_1)$ 를 성립하는 벡터 $\mathbf{R}$이 주어졌을때 $\mathbf{R} - \mathbf{P}$ 와 $\mathbf{u}$ 사이의 각을 θ_1, $(-\theta_{limit} \le \theta_1 \le \theta_{limit})$, 벡터 $\mathbf{Q}$와 $\mathbf{u}$ 사이의 각을 $\theta_2, (0 \le \theta_2 \le 2\pi)$ 라고 하자. 그러면 코사인 정리에 의해 삼각형 ORQ가 성립하는 모든 점 $\mathbf{R}$에 대해, 점 $\mathbf{R}$을 삼각형 ORQ의 세 변의 길이인 x, y, $|\mathbf{R}|$ 과 삼각형의 한 각 $\angle\overline{ROQ}$ 로 표현할수 있다.

정리 2. $\triangle ORQ$ 가 성립하는 임의의 점 $\mathbf{R}$가 주어지면, $\triangle ORQ$이 해결되므로 $\angle\overline{QOR}$ 도 마찬가지로 코사인 정리를 통해 구할수 있다. 그러면 $\theta_{\mathbf{R}}$가 $\mathbf{R}$과 $\mathbf{u}$사이의 각일때, θ_2의 크기는 $\angle QOR \pm \theta_{\mathbf{R}}$ 가 되고, 이로 인해 형성된 점 $\mathbf{Q}$는 $\overline{OR}$에 대해 대칭이다.

θ_1 이 주어졌을 때, 점 R에 대한 위치벡터 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + (\boldsymbol{\alpha}\cos(\pi - \theta_1), \boldsymbol{\alpha}\sin(\pi - \theta_1))$ 로 표현된다. 그러면 정리 1 에 의해:

$$\angle QOR = \arccos\frac{|\mathbf{R}|^2+x^2-y^2}{2x|\mathbf{R}|}$$

마찬가지로:

$$\angle OQR = \arccos\frac{x^2+y^2-|\mathbf{R}|^2}{2xy}$$

$$\theta_{\mathbf{R}} = \arccos\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{R}|}$$

하지만 $\theta_{\mathbf{R}}$의 경우 $0 \le \theta_{\mathbf{R}} \le \frac{\pi}{2}$ 에서 정의되었으므로 $\boldsymbol{R}$의 y 축방향에 따라 $0 \le \theta_{\mathbf{R}} \le \pi$ 로 바꿔줘야 한다:

$$\theta_{\mathbf{R}} = \begin{cases} 2\pi - \theta_{\mathbf{R}} & \text{if } \dfrac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{R}|} < 0 \\ \theta_{\mathbf{R}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

θ_2의 경우, 정리 2 에 의해 두개의 $\mathbf{Q}$가 생성된다. 그중 $\overline{OR}$의 왼쪽에 항상 있는 $\mathbf{Q}$를 사용하도록 제한하자. 이 조건은 서보모터가 레일플레이트의 각도 θ_1를 증가시키기 위해선 시계방향으로, 감소시키기 위해선 시계 반대방향으로만 회전하게끔 제한하는 역할을 한다. 위와 같은 조건을 수학적으로 변형하여 $\mathbf{Q}$를 선택하기 위해선, 정리 2 를 활용하여 다음 조건을 구성할수 있다:

벡터 $\mathbf{R}$을 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하여 $\mathbf{R}$과 수직인 새로운 벡터 $\mathbf{R}'$을 만들었을때, $\overline{OR}$의 왼쪽에 있는 벡터 $\mathbf{Q}$는 $\mathbf{R}'\cdot\mathbf{Q} > 0$ 가 되어야 한다. 즉 임의의 벡터를 $-\frac{\pi}{2}$만큼 회전시키는 회전행렬 T가 있을 때:

$$\theta_2 = \begin{cases} \theta_{\mathbf{R}} - \angle QOR & \text{if}\Big(x\cos(\theta_{\mathbf{R}} - \angle QOR), x\sin(\theta_{\mathbf{R}} - \angle QOR)\Big)\cdot T\mathbf{R} > 0 \\ \theta_{\mathbf{R}} + \angle QOR & \text{if}\Big(x\cos(\theta_{\mathbf{R}} + \angle QOR), x\sin(\theta_{\mathbf{R}} + \angle QOR)\Big)\cdot T\mathbf{R} > 0 \end{cases}$$

만약 두 조건을 전부 만족하지 않는 경우, $\mathbf{Q}$의 제약을 만족하는 θ_2가 주어진 $x, y, \alpha, \theta_1, \mathbf{P}$에 대해 존재하지 않는다.

마지막으로 점 $\mathbf{Q}$를 다음과 같이 구할수 있다:

$$\mathbf{Q} = (x\cos\theta_2, x\sin\theta_2)$$

해석의 편리함을 위해 $-\mathbf{v}$와 같은 방향일 경우를 0 으로 두기 위해 $\theta_2 = \pi - \theta_2$로 변환한다. 이 경우 로워암의 최대 회전한도를 지정하는데 더욱 수월하다.

이제 최적 암의 길이를 고르는 기준에 대해 생각해보자. 먼저 $\mathbf{Q}$의 방향을 제한함으로써 서보모터는 증가, 감소를 각각 한 방향으로만 할수 있게된다. 원활한 구동을 위해선 일차적으로 각 로워암과 어퍼암의 회전범위, 각 $\theta_2, \angle OQR$ 에 대해 제한을 둬야한다.

두번째로 레일플레이트의 미세한 조정과 안정성을 위해서는, θ_2 의 변화량이 θ_1의 변화량에 최대한 민감하지 않게끔 설정하는 것이 좋을 것이라 생각된다. 이는 위에서 설정한 각도

범위제한과 비슷한 역할을 하며, 특히 레일플레이트의 회전량이 클 때 암을 지나치게 기울게 만드는 암들의 길이를 필터링할 역할을 해줄 것이라고 생각된다.

이는 다르게 말하면 임의의 각 $\theta_1, -\theta_{limit} \leq \theta_1 \leq \theta_{limit}$에 대해, $\theta_1 = \theta_1'$ 을 만족시키는 점 R을 $\theta_2 = \theta_2'$로 표현하는 θ_2'가 존재하면, $\left|1 - \frac{d\theta_2'}{d\theta_1'}\right|$ 를 최소화시키는 x, y를 찾는게 목표가 된다. 즉 θ_2'을 반환하는 함수 $g(\theta_1)$가 있을때, $\frac{dg}{d\theta} = 1$이 될수록, 그리고 $g(\theta)$가 단조 증가/감소하면 레일플레이트를 부드럽게 움직이게 된다. 단조 증가/감소는 $\mathbf{Q}$의 제약에 의해 보장된다.

이제 위의 기준들을 통해, 모형을 여러 암 길이 조합에 적용하여 최적 암을 선택해야 한다. 각 x, y, α를 정해진 범위 내에서 고른 간격으로 선정한 후, 각 길이를 조합하여 최종길이를 선택했다.

직접 여러 테스트 암을 구성하지 않고 많은 암 길이의 조합을 실험해볼수 있었다는 점에서 효율적이었으나, 실제로 만들어서 실험해본 것에 비해 정확도와 신뢰도가 낮은점, 또한 측정/계산 오차들이 존재할수 있다는 점이 한계이다. 결론적으로 실제 테스팅을 대체하기보단 만들어 봐야할 암의 개수를 대폭 줄일수 있는 것이 이 모형의 사용 효과라고 볼수 있겠다.