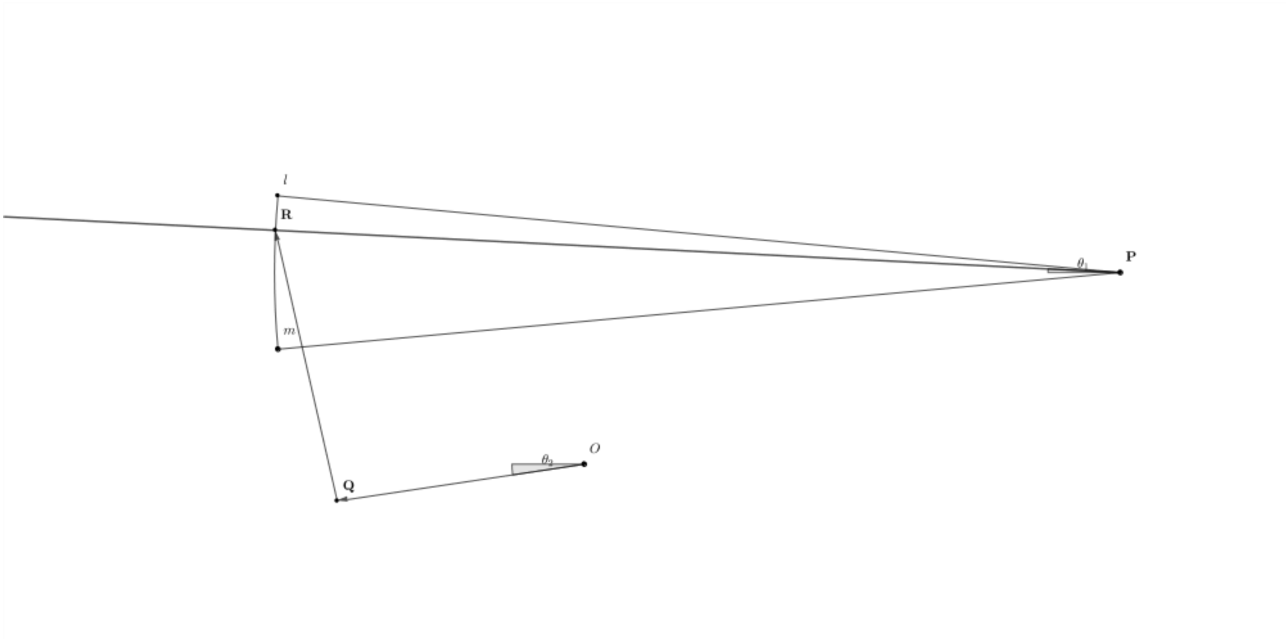
직접 힌지를 만들어 실험을 하는 과정을 반복하다보니 상당히 번거롭고 불편한 작업이 되었다. 힌지, 레일플레이트, 암 부분만을 간단한 수학적 모형으로 만들어 컴퓨터를 통해 실험을 해보는 것이 효율적일까 라는 의문을 시작으로 모형을 만들어보게 되었다.




위 그림과 같이 레일플레이트와 힌지만을 간단하게 나타내어 보자. 레일플레이트가 힌지와 고정된 지점을 $P$, 서보모터의 회전축의 위치를 $O$, 어퍼암과 레일플레이트의 연결점을 $R$, 로워암을 선분 $\overline{OQ}$, 어퍼암을 선분 $\overline{QR}$라고 하자. 또한 선분 $\overline{OQ}$의 길이를 $x$, 선분 $\overline{QR}$의 길이를 $y$, 선분 $\overline{PR}$의 길이를 $\alpha$라고 하자.

레일플레이트의 최대 회전한도 $\theta_{limit}$가 주어졌을때, 레일플레이트는 $-\theta_{limit}$, $\theta_{limit}$범위 내에서 회전 가능하다. 그렇다면 점 R 은 반지름이 a 이고, $-\theta_{limit}$, $\theta_{limit}$사이에서 정의된 호 위의 한 점이다.

정리 1. 점 $P$에서부터 반지름을 $\alpha$, $[-\theta_{limit}, \theta_{limit}]$사이에 정의된 호 $\widehat{lm}$ 위의 임의의 점 $R$를 잡자. 점 $P$를 지나고 x 축과 평행한 선분과 $\overline{PR}$ 사이의 각을 $\theta_1$, 점 $O$를 지나고 x 축과 평행한 선분과 $\overline{OQ}$ 사이의 각을 $\theta_2$이라고 하자. 그러면 삼각형 $ORQ$가 성립하는 모든 점 $R$에 대해, 점 $R$을 $\theta_2$, $x$, $y$의 식으로 표현할수있는 $\theta_2$가 최대 두개가 존재하며 $\overline{OR}$ 에 대해 대칭이다.

보충설명: $\theta_2$가 한개만 존재하는 경우는 점 $R$, $O$, $Q$, $P$가 공선(colinear)인 경우이므로 장치 구성상 불가능하다.

$\theta_1$ 이 주어졌을 때, 점 $R$에 대한 위치벡터 $\boldsymbol{R}$은 $\boldsymbol{P} + (\boldsymbol{\alpha}\cos(\pi - \theta_1), \boldsymbol{\alpha}\sin(\pi - \theta_1))$ 로 표현된다. 그러면 코사인 정리에 의해:

$$\cos\left(\theta_2 + \operatorname{acos}\frac{\boldsymbol{R}\cdot(1,0)}{|\boldsymbol{R}|}\right) = \frac{|\boldsymbol{R}|^2 + x^2 - y^2}{2x|\boldsymbol{R}|}$$

이를 $\theta_2$에 대해 풀면 $g(\theta_1)$이 된다:

$$\theta_2 = \operatorname{acos}\frac{|\boldsymbol{R}|^2 + x^2 - y^2}{2xy} - \operatorname{acos}\frac{\boldsymbol{R}\cdot(1,0)}{|\boldsymbol{R}|}$$

마찬가지로 서보의 각도뿐만 아니라, 로워암과 어퍼암 사이의 각 $\angle\overline{OQR}$ 도 같은 방식으로 구할수 있다:

$$\cos\left(\angle\overline{OQR}\right) = \frac{x^2 + y^2 - |\boldsymbol{R}|^2}{2xy}$$

$$\angle\overline{OQR} = \mathrm{acos}\frac{x^2 + y^2 - |\boldsymbol{R}|^2}{2xy}$$

이제 최적 암의 길이를 고르는 기준들에 대해 생각해보자. 우선 $\angle\overline{OQR}$이 180 도보다 큰 경우, 각도를 보정한 방향의 반대방향으로 암이 회전하므로, 구동에 치명적이게 된다. 이를 방지하기 위해선 $\angle\overline{OQR}$ 과 $\theta_2$에 대해 합당한 범위를 제한해야 한다.

두번째로 레일플레이트의 미세한 조정과 안정성을 위해서는, $\theta_1$의 변화량이 $\theta_2$의 변화량에 최대한 민감하지 않게끔 설정하는 것이 좋을 것이라 생각된다. 이는 위에서 설정한 각도 범위와 비슷한 역할을 하며, 특히 암의 각이 커짐에 따라 레일플레이트가 심하게 기울게 만드는 암들의 길이를 필터링할 역할을 해줄 것이라고 생각된다.

이는 다르게 말하면 임의의 각 $\theta_1, -\theta_{limit} \leq \theta_1 \leq \theta_{limit}$에 대해, $\theta_1 = \theta_1'$ 을 만족시키는 점 $R$을 $\theta_2 = \theta_2'$로 표현하는 $\theta_2'$가 존재하면, $\left|1-\frac{d\theta_2'}{d\theta_1'}\right|$ 를 최소화시키는 $x, y$를 찾는게 목표가 된다. 즉 $\theta_2'$을 반환하는 함수 $g(\theta_1)$가 있을때, $\frac{dg}{d\theta} = 1$이 될수록, 그리고 $g(\theta)$가 단조 증가/감소하면 레일플레이트를 부드럽게 움직이게 된다.

설명: 정리 1 에 의해 임의의 $\theta_1$에 대해 $\theta_2$가 항상 존재한다. 이는 정리 1 을 만족하는 점 $R$을 $x, y$를 통해 표현이 가능하다. 하지만 $x, y$가 고정된 상황에서는 $\theta_2$의 변화와 $\theta_1$의 변화의 차이는 클수 있다. 즉, $\theta_1$를 통해 $\theta_2$을 충분히 잘 나타내는 $x, y$는$\theta_1$의 변화량에 비해 $\theta_2$의 변화량이 크거나 작지 않을 경우가 된다.

이제 위의 기준들을 통해, 모형을 여러 암 길이 조합에 적용하여 최적 암을 선택해야 한다. 각 $x, y$를 정해진 범위 내에서 고른 간격으로 선정한 후, 두 길이를 조합하여 최종길이를 선택했다.

직접 여러 테스트 암을 구성하지 않고 많은 암 길이의 조합을 실험해볼수 있었다는 점에서 효율적이었으나, 실제로 만들어서 실험해본 것에 비해 정확도와 신뢰도가 낮은점, 또한 측정/계산 오차들이 존재할수 있다는 점이 한계이다. 결론적으로 실제 테스팅을 대체하기보단 만들어 봐야할 암의 개수를 대폭 줄일수 있는 것이 이 모형의 사용 효과라고 볼수 있겠다.