

基于局部最优策略的多波束测线布设优化

摘 要

本文针对多波束测深海底地形勘测的问题，在仔细研究了工程背景和应用实际之后，建立了关于多波束测深覆盖宽度及重叠率求解的数学模型。在此基础上，根据**先验水深**给出了在拟合下多波束测深布线策略的优化策略，在海洋测绘中具有普适价值。

针对问题一，基于坐标系的灵活选择，建立了多波束测深中波束与海底坡面截面的**二维模型**深入挖掘平面几何中角与线的性质。利用**正弦定理**求出覆盖宽度及重叠率的数学表达，利用 Matlab 精确求解，发现随着测量船点位处的水深增加，重叠率逐渐降低甚至出现漏测的情况，详细结果见表 1。

针对问题二，考虑测线方向与海底等深线不一致的情况，建立以海底水平面为基准的**三维立体模型**。基于问题一已知的数学模型，利用解析几何中的**平面法向量叉积**求出交线方向进而解得海水深度、实际坡度与测线方向的关系，最终得到普适情况下覆盖宽度的函数表达定性分析发现当测线方向与海底等深线平行时，覆盖宽度可达到最大值，详细结果见表 2。

针对问题三，考虑到采用贪心算法的短视性，我们设计了一种**带约束条件的优化算法**，并得到了目标函数的显式表达式，分别对决策变量进行求导，得出了目标函数取最大值时的解，这种算法更不容易陷入局部最优决策。对于题目所给数据，求解出一个可以使测线总长度最短的**全局最优**方案，并证明了应采用测线方向与等深线方向平行作为布设依据，最优测线的总长度为 122232m。

针对问题四，利用已知的海水深度数据，构建海底等深线图，通过观察等深线图的特征，将待测海区分成四个区。再通过分析 Excel 附件中的具体海水深度数据，确定四个分区的边界。在四个分区中，根据其等深线的走向分别运用斜平面、球面、椭球面进行**拟合**，并基于**最小二乘法**得到拟合的结果。以拟合的平面或曲面来近似替代该处海域地形，沿拟合出的等深线布设平行测线，利用 Matlab 计算出测线的总长度、漏测海区占总待测海域面积的百分比，重叠率超过 20% 的测线总长度。

关键词：多波束测深 计算几何 局部优化 曲面拟合

一、问题重述

1.1 问题背景

随着国家对于海洋开发的日渐重视，一系列勘察海底资源，调查海底地貌的高精尖技术应运而生，多波束测深技术即是其中一种用于地形测量、水下工程检测等工作的高度集成技术^[1]。基于单波束测深利用声波在水中传播特性的原理，多波束测深可在与航迹垂直的平面内一次性发射上百条波束，有效地规避了单波束测深数据分布不均匀的缺陷。

在海底地形勘测工程中，多波束测线的布设对于海底地形描绘的精细程度至关重要。若测线布设过密，虽然满足了地形分辨率的要求，但是会增加冗余数据，降低勘测效率；若布设过疏，则无法保证全覆盖，造成漏测^[2]。因此，合理的多波束测线必须在全覆盖勘测的前提下，尽可能地降低重叠率，保持较高的测量效率。

1.2 问题的提出

1.2.1 问题一的提出

假设测量船航行的轨迹方向为测线方向，与测线方向相垂直的平面与海底坡面的交线为一条坡度的斜线。已知多波束换能器的开角为 120° 、坡度为 1.5° 和海域中心点处的海水深度为 $70m$ ，需要建立多波束测深覆盖宽度和重叠率的数学模型，构造覆盖宽度和重叠率关于测线距中心点处的距离的函数关系，并以表格的形式呈现计算结果。

1.2.2 问题二的提出

在问题一的基础上，使测线方向，可变引入测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角 β 。已知多波束换能器的开角为 120° 、坡度为 1.5° 和海域中心点处的海水深度为 $120m$ ，需要建立一个矩形待测海域内多波束测线覆盖宽度的数学模型，构造覆盖宽度关于测量船距中心点处的距离 d 、测线方向角 β 的函数关系，并针对 8 个特殊的 β 值进行计算，以表格的形式呈现结果。

1.2.3 问题三的提出

现有一西深东浅，坡度为 1.5° 的待测矩形海域，该海域南北长 2 海里、东西宽 4 海里。已知海域中心点的海水深度为 $110m$ ，多波束换能器的开角为 120° 。需要设计一组能完全覆盖整个待测海域的测线，且测线满足测量长度最短、相邻条带的重叠率在 10% 至 20% 之间的要求。

1.2.4 问题四的提出

已知若干年前由单波束测量得到的南北长 5 海里，东西宽 4 海里的某海域测深数据，现希望基于这些已测得的数据为多波束测量的测线布设提供帮助，在使得沿测线形成的条带尽可能覆盖整个海域、相邻条带重叠率控制在 20% 以下、测线总长度尽可能短，并计算出测线的总长度、漏测海区占总待测海域面积的百分比，重叠率超过 20% 的测线总长度。

二、问题的分析

2.1 问题一的分析

等深线是指在海洋或湖泊中，相同深度的各点连接成的封闭曲线^[3]。问题一中由于与测线方向相垂直的平面与海底坡面的交线坡度为定值，可认为测线方向与海水的等深线方向水平。当测量船沿着测线方向前进时，其距离海底的深度不发生变化。因此可以以光束所在平面为截面，将三维问题转化为二维的平面几何模型，并将测量船距海面中心的距离扩展为各平行测线距中心测线的距离，大大地简化了问题。在二维平面示意图中，可利用三角函数及正弦定理，描述各个线段与角度的度量关系，最终得出海水深度、覆盖宽度以及重叠率关于测线距中心点处的距离的函数关系，利用 Matlab 计算即可得到结果。

2.2 问题二的分析

考虑测线方向与海底等深线不平行的其他情况，测线方向角 β 可以在 0° 到 360° 的范围内变动。此时当 β 为一般角度时，测量船沿着测线方向前进时，其距离海底的深度会不断变化，必须建立以海底水平面为基准的三维立体直角坐标系。通过问题一的分析，可以得知覆盖宽度由海水深度、坡面角度和测量船距中心点距离共同决定。当测量船沿固定测线方向行进时，即当 β 为定值时，光束界面与海底坡面交线的坡度为定值，由斜坡坡角 α 和 β 共同决定。在三维直角坐标系中，利用已知的平面方程及其法向量，可以求得交线的方向向量，继而得到海水深度、坡面角度关于测线方向角和测量船距中心点距离的函数，最终得到覆盖宽度的函数表达，利用 Matlab 计算即可得到结果。

2.3 问题三的分析

问题三要求设计一组测量长度最短，且能覆盖整个待测海域的测线。一个朴素的想法是采用贪心算法，贪心算法，是一种在每一步选择中都采取在当前状态下最好或最优（即最有利）的选择，从而希望导致结果是最好或最优的算法。通过分析问题二的结果，我们可以证明，对于海底是坡面的情况，当测线方向与等深线平行时，水深条

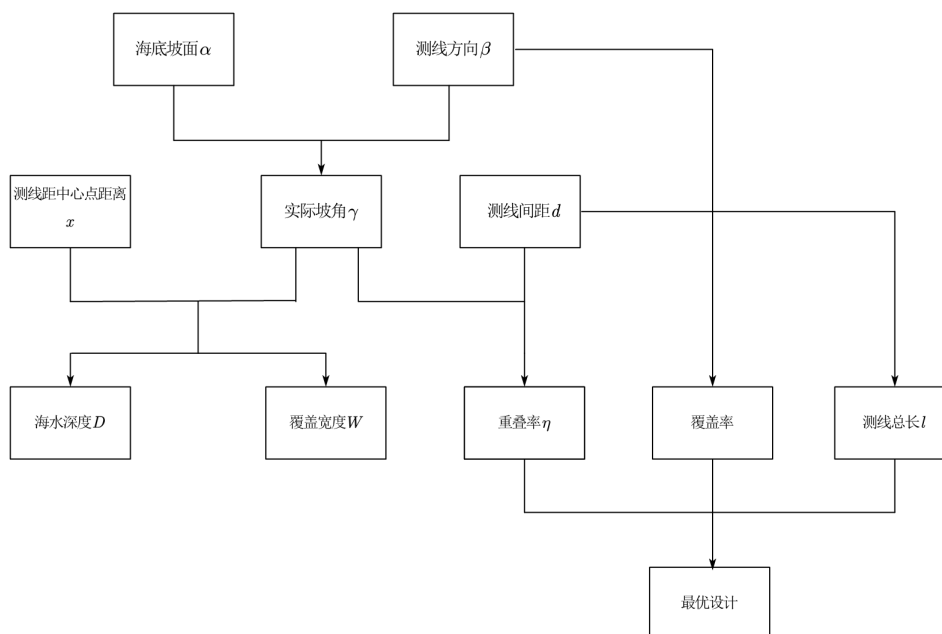
带的面积最大；同时从直观上而言，取 $\eta = 10\%$ 可以使相邻两条测线的间距最大，从而减小所需要的测线条数。按照此思路设计的测线能够满足局部最优的结果。

但是贪心策略过于短视，不一定能保证全局最优。因此我们采用了带约束的优化算法，通过建立测线间距关于测量船沿测线方向的行驶距离 d 与重叠率 η 的函数关系，分别对 d 与 η 求偏导，我们得到了能够使 Δl 最大的 d 与 η 的取值，从而确定了测线布设的依据，这种方法避免了贪心策略的缺点。再以测线方向角 β 作为变量，利用 Matlab 编程计算得到不同情况下测线的总长度，得出了当 β 取 90° ，即测线方向与等深线平行时，测量总长度最短的结论。这与问题二结果的推论是一致的。

2.4 问题四的分析

问题四给定若干年前某海域单波束测量的测深数据，并希望基于这些数据来优化多波束测线的布设。通过对 Excel 中已知数据的观察与分析，我们发现其海底地形大致可分为四块。对分割好的四块地形分别基于地形特征进行最小二乘法拟合，得到任一点处海水深度与其坐标的函数关系。基于问题二和问题三结论的推广，在不同地形条件下将测线沿等深线布设，即可在尽量满足覆盖宽度和重叠率的约束条件下最大化测量效率，并利用 Matlab 编程计算得到测线的总长度、漏测海区占比、超出最大重叠率的测线总长度。

流程图如下：



三、模型的假设

1. 假设多波束换能器左右发射的波束数相等且按换能器垂线方向对称
2. 假设测船航行的测线方向垂直于所有波束
3. 假设测量船航行过程中速度均匀
4. 假设测船在平稳状态施测，即忽略各种效应对测深的影响
5. 忽略船只发生的纵摇、横摇偏差及导航延迟、电罗经偏差等

四、符号说明

符号	说明
θ	多波束换能器的开角
α	海底坡面的坡度
D_0	初始点海水深度
x	测量船与初始点的水平坐标差
$D(x)$	x 处海水深度
$\tilde{W}_1(x)$	x 处测量左边界点与正下方对应点在斜坡上的距离
$\tilde{W}_2(x)$	x 处测量右边界点与正下方对应点在斜坡上的距离
$W(x)$	x 处覆盖宽度
$l(x)$	x 处测量左边界点的水平坐标
$r(x)$	x 处测量右边界点的水平坐标
η	重叠率
γ	测线不与等深线平行时的坡度

五、模型的建立与求解

5.1 问题一：测线和等深线平行时覆盖宽度与重叠率的求解模型

以测量船发出的波束平面为截面，建立二维平面几何模型，针对测量船分别在海域中心点和距中心点 x 处测线上航行的两种情况，画出其最边缘发出光束与海底坡面形成的三角形。

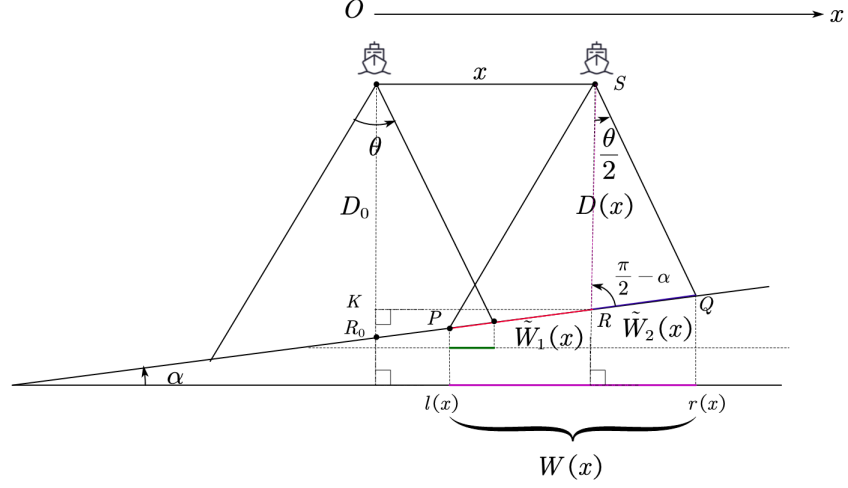


图 1 测线与等深线平行

5.1.1 海水深度 $D(x)$ 的求解

由于测线方向与海底等深线平行，当测量船沿测线方向航行时，其所在点位的海水深度不变，以海域中心点位置为参考点 O ，设水深变浅方向为 x 轴的正方向。设测量船距中心点距离为 x 时的位置为 S ，记 O 点与水平面垂线交海底坡面于 R_0 点，记 S 点与水平面垂线交海底坡面于 R 点，过 R 点作的垂线交于点 K ，可以发现 $\text{RT}\triangle KRR_0$ 中， $KR = x$ ， $\angle KRR_0 = \alpha$ ，则海水深度的减少量 $KR = x \tan \alpha$ ，得到海水深度 $D(x) = D_0 - x \tan \alpha$ 。

5.1.2 覆盖宽度 $W(x)$ 的求解

假设忽略船体的横摇和纵摇误差，则波束在截面中均匀散开，即 $\angle PSR = \angle QSR = \frac{\theta}{2}$ 。覆盖宽度即为最边缘的两条波束与坡面交点连线的水平投影 $W(x)$ 。在 $\triangle SPR$ 和 $\triangle SQR$ 中，由正弦定理可得

$$\begin{cases} \frac{SR}{\sin \angle SPR} = \frac{PR}{\sin \angle PSR} \\ \frac{SR}{\sin \angle SQR} = \frac{QR}{\sin \angle QSR} \end{cases}$$

将 $SR = D(x)$, $PR = \tilde{W}_1(x)$, $QR = \tilde{W}_2(x)$, $\angle SPR = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\theta}{2}$, $\angle SQR = \frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\theta}{2}$ 和 $\angle PSR = \angle QSR = \frac{\theta}{2}$ 代入上面的方程组中可得

$$\begin{cases} \tilde{W}_1(x) = PR = \frac{SR \sin \angle PSR}{\sin \angle SPR} = \frac{D(x) \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} \\ \tilde{W}_2(x) = QR = \frac{SR \sin \angle QSR}{\sin \angle SQR} = \frac{D(x) \sin \frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \end{cases}$$

$$\text{则 } W(x) = (\tilde{W}_1(x) + \tilde{W}_2(x)) \cos \alpha = D(x) \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha \left(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \right)$$

5.1.3 重叠率 $\eta(x)$ 的求解

若测线相互平行且海底地形平坦, 则相邻条带之间的重叠率定义为 $\eta = 1 - \frac{d}{W}$, 其中 d 为相邻两条测线的间距, W 为条带的覆盖宽度. 而在本题中, 由于海底地形有一定坡度, 无法直接使用定义中的公式, 需要计算前后两条条带实际的重合长度. 设第 i 条测线上的测量船发出的波束交坡面最低处为 P_i , 交坡面最高处为 Q_i , 则实际重合长度为 P_i 与 Q_{i-1} 的横坐标之差, 若为负值则表示无重叠产生漏测. 记 P 点横坐标为 $l(x)$, Q 点横坐标为 $r(x)$

$$\begin{cases} l(x) = x - \tilde{w}_1(x)\cos\alpha = x - \frac{(D-x\tan\alpha)\sin\frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2}+\alpha)}\cos\alpha \\ r(x) = x + \tilde{w}_2(x)\cos\alpha = x + \frac{(D-x\tan\alpha)\sin\frac{\theta}{2}}{\cos(\frac{\theta}{2}-\alpha)}\cos\alpha \end{cases}$$

则第 i 条测线与前一条侧线的重叠率 $\eta(x_i) = \frac{r(x_{i-1})-l(x_i)}{w(x_i)}$, $i = 2, 3, \dots, n$

5.1.4 问题一的结果

表 1

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70.0000	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度/m	315.7051	297.5256	279.3460	261.1665	242.9870	224.8074	206.6279	188.4484	170.2688
与前一条测线的重叠率/%	—	35.6954	31.5106	26.7431	21.2622	14.8949	7.4072	-1.5252	-12.3650

5.2 问题二：测线和等深线成任意角时覆盖宽度与重叠率的求解模型

在问题一的基础上, 考虑测线方向与海底等深线不平行的情况, 建立三维立体直角坐标系描述几何关系. 根据问题一以及求得的覆盖宽度函数, 可以发现其与海水深度, 坡面角度和测量船距海域中心点处的距离有关.

5.2.1 海水深度 $D(d)$ 的求解

记海面中心点为 S , 测量船沿测线方向角 β 行进距离 d 后位置为 N 点. 问题一中已经解释当测线方向与海底等深线重合时海底深度不变, 故将位移 \vec{d} 沿 x 和 y 方向分解为 \vec{d}_x 和 \vec{d}_y 两段位移, 由 \vec{d}_x 方向前进至 M 点, M 点处海水深度也为 D_0 . 于是我们就将三维问题转换到 MN 所在的二维垂面上, 记 M 点处垂线与坡面交点为 R_0 , N 点处垂线与坡面交点为 R . 此时平面 $MNRK$ 的几何特征与问题一类似, 不同点在于需要用本题中的 d_y 替换问题一中的 x .

$$d_y = d \cos(\pi - \beta) = -d \cos \beta$$

那么

$$D(d) = D_0 - d_y \tan \alpha = D_0 + d \cos \beta \tan \alpha$$

向向量 $\vec{n}_2 = (\sin \beta, -\cos \beta, 0)$ 即为波束平面的法向量. 根据立体解析几何知识, 海底坡面与波束平面交线 $P'Q'$ 的方向向量 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta)$. 水平指示线垂直于测线方向, 其方向向量 $\vec{m} = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$, 所以

$$\cos \gamma = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \beta \tan^2 \alpha}}$$

5.2.3 覆盖宽度 $W(d)$ 的求解

问题一中已知

$$W(x) = D(x) \sin \frac{\theta}{2} \cos \alpha \left(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \right)$$

而在本题中已经求得

$$D(d) = D_0 - d_y \tan \alpha = D_0 + d \cos \beta \tan \alpha$$

代入得到

$$W(d) = (D_0 + d \cos \beta \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma \left(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)} \right)$$

5.2.4 问题二的结果

表 2

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/ $^\circ$	0	415.6922	466.0911	516.4899	566.8888	617.2876	667.6865	718.0854	768.4842
	45	416.1202	451.7943	487.4683	523.1424	558.8165	594.4905	630.1646	665.8387
	90	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491
	135	416.1202	380.4461	344.7721	309.0980	273.4239	237.7498	202.0758	166.4017
	180	415.6922	365.2933	314.8945	264.4956	214.0967	163.6979	113.2990	62.9002
	225	416.1202	380.4461	344.7721	309.0980	273.4239	237.7498	202.0758	166.4017
	270	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491	416.5491
	315	416.1202	451.7943	487.4683	523.1424	558.8165	594.4905	630.1646	665.8387

5.3 问题三：约束条件下测线布设的优化方案

5.3.1 仅有一条测线时测线的最优方向

问题二已知：

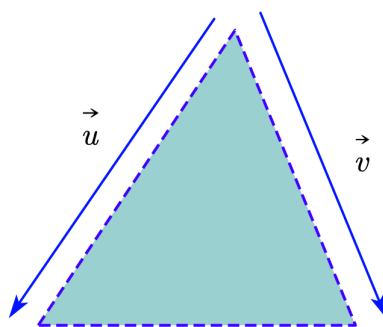
$$W(d) = (D_0 + d \cos \beta \tan \alpha) \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma \left(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)} \right)$$

对于固定方向的测线、固定开角的换能器而言，式中 $\cos\gamma(\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2}+\gamma)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2}-\gamma)})$ 与 $\sin\frac{\theta}{2}$ 为一与 d 无关的常数。因此可将 $W(d)$ 写为 $W(d) = (D_0 + \cos\beta \tan\alpha)f(\gamma)$ ，测线的条带面积相当于对其沿测线的方向做积分，即 $S = \int_{-l}^l W(x)dx$

计算得 $S = 2f(\gamma)D_0l$ ，易知 $f(\gamma)$ 的值与 $W(d=0)$ 的值成正比，由问题二的数据知， β 为 90° 时 $f(\gamma)$ 的值最大，即对于一组关于某海域中心点对称且长度相等的测线而言，测线方向与等深线方向平行时条带面积最大。故仅有一条测线时，测线方向应与等深线方向平行。

5.3.2 相邻测线布设的原则

在本题中我们假设测线的布设应满足两两相互平行的要求，是因为不平行的两条测线会导致严重的漏测情况。对两条不平行的测线定性分析，如图所示， \vec{u}, \vec{v} 分别表示测线方向，三角形所围部分为两条测线的漏测面积，漏测区域随着测量船行驶距离 d 的增加逐渐变大。因此测线的布设应满足相邻测线相互平行的原则。



5.3.3 建立带约束的优化模型

Step1. 目标函数

题目中提及，要使测线的测量总长度最短，因此在测线互相平行的情况下，我们希望使测线间的间距尽可能的大。

要寻找的目标函数为

$$\Delta l$$

假设初始最优解为

$$x_0$$

注意到对于固定的 β ，测线坡度 γ 为一定值，因此 $l(x), r(x), W(x)$ 三式可以写成 $Kx + C$ 的线性函数形式。

不妨将三式的系数显式表达出：

$$k_l = 1 + \tan\alpha \sin\frac{\theta}{2} \cos\gamma \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)}$$

$$c_l = -D_0 \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)}$$

$$k_r = 1 - \tan \alpha \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)}$$

$$c_r = D_0 \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)}$$

$$k_w = \tan \alpha \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma (\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)})$$

$$c_w = D_0 \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma (\frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} + \gamma)} + \frac{1}{\cos(\frac{\theta}{2} - \gamma)})$$

并由

$$\eta(x_i) = \frac{r(x_{i-1}) - l(x_i)}{W(x_i)}, i = 2, 3, \dots, n$$

$$x_i = x_{i-1} + \Delta l \sin^2 \beta$$

求解该方程组可以得到的 Δl 显式表达式

由于每个最优点 x_i 都可由初始最优点 x_0 递推得出, 并考虑引入测量船起始位置离该条测线在海域内最浅处的距离 d 作为变量. η 的表达式可以写成

$$\eta(x_i) = \frac{k_r(x_0 - d \cos \beta) + c_r - k_l(x_0 - d \cos \beta + \Delta l \sin^2 \beta) - c_l}{k_w(x_0 - d \cos \beta + \Delta l \sin^2 \beta)}$$

求解该方程得到目标函数

$$\max \Delta l = \csc^2 \beta (\frac{k_r x_0 + c_r - c_l - k_r d \cos \beta - c_w \eta}{k_w \eta + k_l} - x_0 + d \cos \beta)$$

式中的变量为 d, η .

Step2. 约束条件

约束条件 1:

重叠率应处处满足 10% 至 20% 的要求.

即

$$10\% \leq \eta \leq 20\%$$

约束条件 2:

测量船起始位置离该条测线在海域内最浅处的距离应不超过每条测线未越过海域边界时的长度.

设海域宽度为 $S = 2 \times 1852m$, 则有

$$0 \leq d \leq \frac{S}{\sin \beta}$$

Step3. 优化模型的求解

根据上述分析，我们可以得到确定测线布设依据的单目标最优化模型：

$$\begin{aligned} \max \Delta l &= \csc^2 \beta \left(\frac{k_r x_0 + c_r - c_l - k_r d \cos \beta - c_w \eta}{k_w \eta + k_l} - x_0 + d \cos \beta \right) \\ \text{s.t. } &\begin{cases} 10\% \leq \eta \leq 20\% \\ 0 \leq d \leq \frac{s}{\sin \beta} \end{cases} \end{aligned}$$

将 Δl 对 d 与 η 分别求偏导，得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta l}{\partial d} = \csc^2 \beta \cos \beta d \left(\frac{k_w \eta + k_l - k_r}{k_w \eta + k_l} \right) \\ \frac{\partial \Delta l}{\partial \eta} = \csc^2 \beta \frac{k_r k_w \cos \beta d - k_r c_w - k_w k_r x_0}{(k_w \eta + k_l)^2} \end{cases}$$

分析上式，因为 $k_w + k_l = k_r$ ，且 η 恒小于 1，因此式中右项恒为负数，因此 $\frac{\partial \Delta l}{\partial d}$ 恒为一负值。

分析下式，由于 $\alpha = 1.5^\circ$ ，注意到 γ 的值在很小的范围变动，所以当测线方向角 β 变化时， c_w 与 k_w 的变化微小，可以忽略不计，因此可以当成常量处理，当 d 取最优值 0 时，计算求得式中右项仍为一负值，因此我们得到了恒为一负值的结论。

通过对优化模型的求解，我们得出了测线布设的依据，即取 $d = 0, \eta = 0.1$ 为最优的方案。

Step4. 初始最优点的选取

本题中，我们假设布设完测线后，测量船总是先沿着靠近海域边缘的测线测量，再沿着到达海域另一边的方向依次走完所有测线。因此有由海域深处向海域浅处依次测量和由海域浅处向海域深处依次测量的区别。两种测量方式会影响初始最优点的选取。我们认为，选择由深往浅依次测量的策略可以使相邻两条测线的间距更大。证明如下：

$$\text{若采用由深往浅的策略，} \eta_1(x_i) = \frac{r(x_{i-1}) - l(x_i)}{w(x_i)}$$

$$\text{若采用由浅往深的策略，} \eta_2(x_i) = \frac{r(x_{i-1}) - l(x_i)}{w(x_{i-1})}$$

已知 $W(x_i) < W(x_{i-1})$ ，因此 $\eta_1(x_i) > \eta_2(x_i)$ 若要满足相同的重复率（在本题中 $\eta = 0.1$ ），需要增加由深往浅测量时测线间的间距，即由深往浅依次测量的策略可以使相邻两条测线的间距更大。

故我们将初始最优点选取在海域深处的一侧。

为满足覆盖整个待测海域的要求，有 $l(x_0) = k_l x_0 + c_l = 0$ ，解得 $x_0 = -\frac{c_l}{k_l}$ 。

Step5. 测线的不同情况

定义一条测线的标准长度为：

$$l_{std} = \frac{S}{\sin \beta}$$

测线越过左边界时，测线长度为 $\frac{x_0}{\cos \beta}$

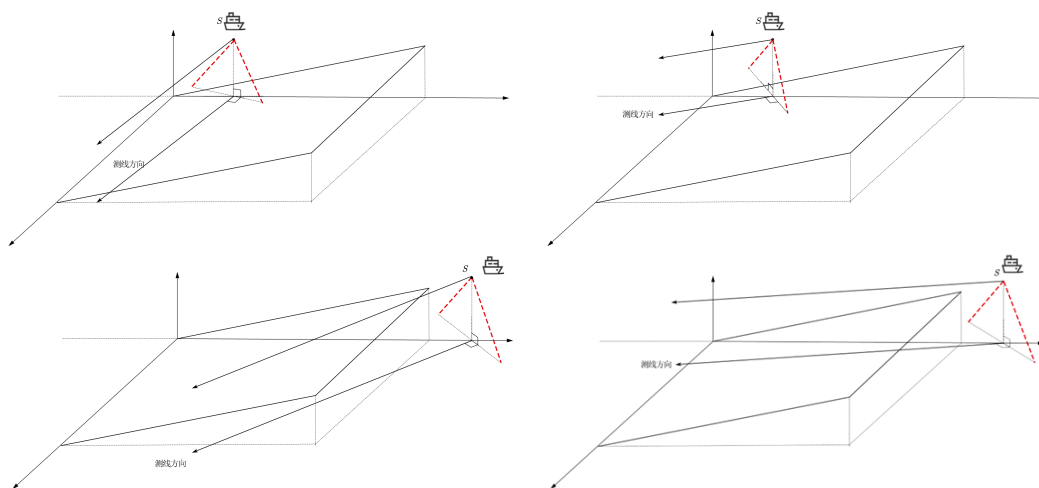


图 4 四种测线情况

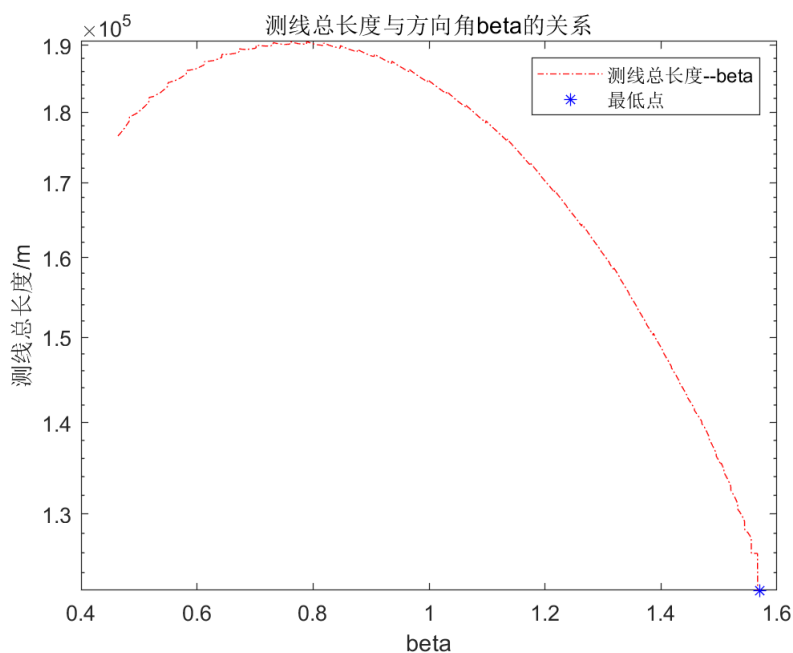
测线越过右边界时，测线长度为 $l_{std} \frac{x_0-L}{\cos\beta}$

测线同时穿过左右边界,此时测线方向角过小,导致测量船沿着测线航行时覆盖宽度的变化显著无法保证相邻两条测线上的所有区域重叠率 η 都满足处于 10% 至 20% 的要求. 因此在测量总长度时,选择测线方向角 β 的范围在 $\arctan(\frac{S}{L})$ 至 90° 之间,式中 S 为海域宽度、 L 为海域长度. 这样即可忽略测线同时穿过左右边界的问题.

Step6. 测量总长度关于 β 的变化

利用 Matlab 编程计算可以得到问题三的所有最优点,并计算出该组测线的测量总长度.

改变 β 的值,我们绘制出了测线总长度与方向角 β 的关系.

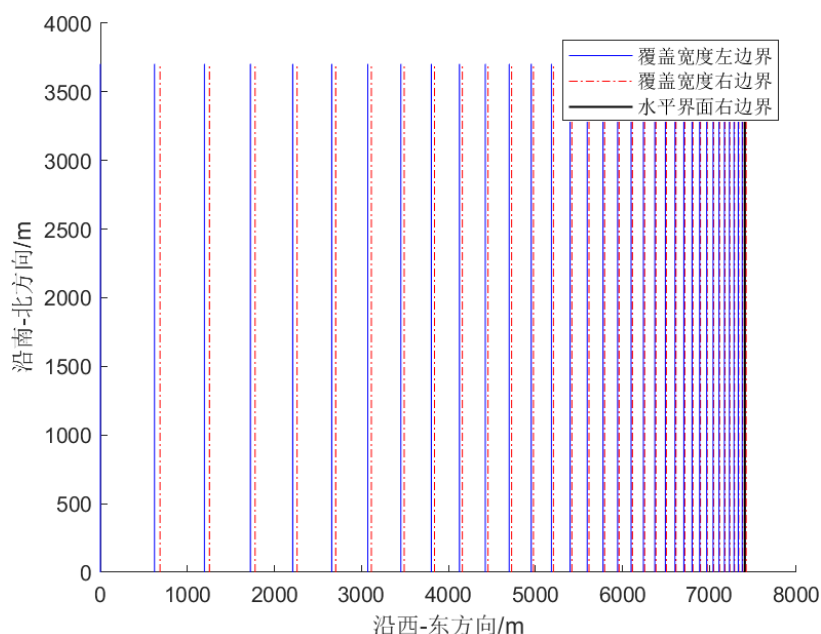


可以看出,当 β 取 90° 即测线方向与等深线平行时,测线总长度最短. 这与问题

二结果的推论是一致的.

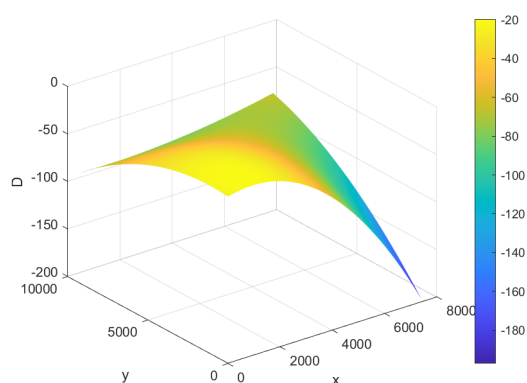
Step7. 优化方案的最终结果

根据上述分析, 我们得出当测量船起始位置离该条测线在海域内最浅处的距离 $d = 0$, 每两条相邻测线重叠率 $\eta = 0.1$, 测线方向角为 90° 时布设的一组测线为最优的方案. 测线总长度为 $122232m$. 并用 Matlab 编程绘制出了海域内整组测线覆盖宽度的图表.



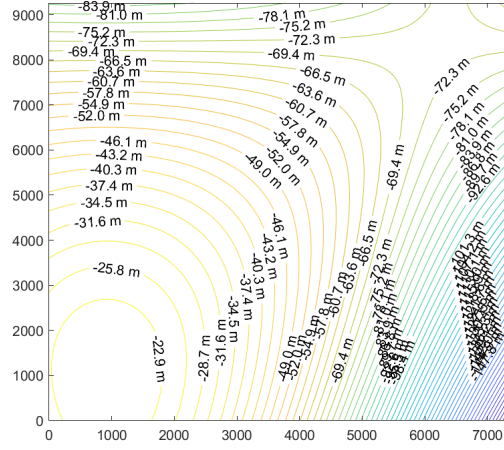
5.4 问题四：基于先验知识的测线布设优化方案

可视化已知的水深数据

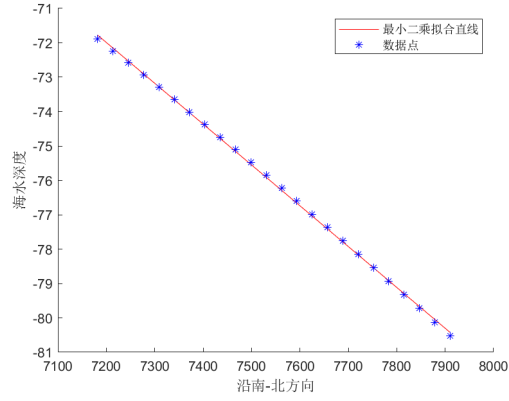


对海水深度数据作等深线图

通过观察等深线图, 我们发现, 图片左上角的地形可近似为一个斜面, 右上角的地形可近似为一个球面, 左下角的地形可近似为一个椭球面, 右下角的地形可近似为一个倾斜的斜面. 以 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示左上, 右上, 左下, 右的分区.



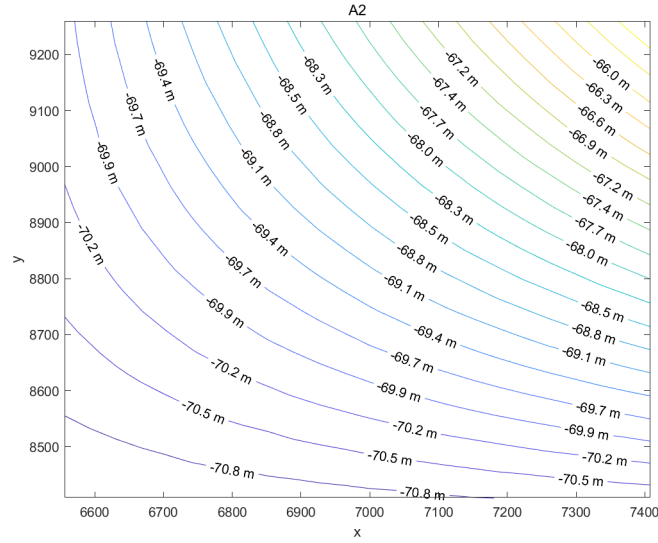
拟合的结果如图所示



可以看出，拟合的结果与原数据点的差距较小，拟合效果较好，所得斜面的倾角 $\alpha = \arctan(-k_1)$ ，利用第三问的结论即可得到 A_1 分区内最优的测线布设方法．侧线总长度为 $22582m$ ．

5.4.2 A_2

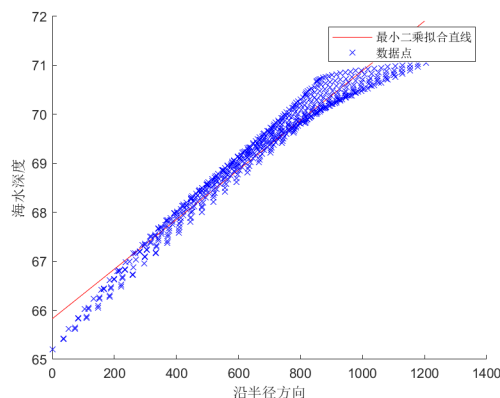
A_2 的等高线如图所示



可将 A_2 处的地形看作一个球面，其海水深度只与其到右上边界点的距离有关，令变量 $z_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$ ，则

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } Y = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \text{ 则 } \begin{pmatrix} b_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = (Y^T Y)^{\dagger} Y^T D = \begin{pmatrix} 65.8282 \\ 0.0051 \end{pmatrix}$$



拟合的结果如图所示

可以看出，拟合的结果与原数据点的差距较小，拟合效果较好，所得斜面的倾角 $\alpha = \arctan(-k_2)$ ，利用第三问的结论即可得到 A_1 分区内最优的测线布设方法．侧线总长度为 3166.8m.

六、模型的评价及推广

6.1 模型的优点

1. 对于问题一与问题二，在进行必要假设后建立了严格的几何数学模型，充分运用平面与解析几何知识解决问题，为模型打下了良好的基础.
2. 对于问题三，采用分步优化的思想方法，分别对测线方向与重叠率两个决策变量进行优化，综合数学分析与图像拟合，最终得到全局最优解.
3. 对于问题四，在前三问的基础上基于先验水深数据设计了实际海底测深的布线策略，体现了理论指导和实践探索的辩证统一.

6.2 模型的缺点

1. 问题三中的模型只保证重叠率为 10%，然而在实际测绘中，考虑避让过往船只和海底分辨率的要求，需要将实际重叠率提高到 15% 以上.
2. 根据《海道测量规范》^[4] 的相关规定，本题中所有测线均平行布设，未考虑非平行的情况.

6.3 模型的推广

1. 本文基于多波束测深技术的应用场景，构建了覆盖宽度和重叠率的数学模型，对不同类型的海底形态测线布设问题进行了探讨和优化. 多波束测深技术在海底地形测量、海底目标探测、智慧航道建设等各个领域均有重要应用，在多波束测绘工程中具有普遍的适用性.

2. 本文将测量船中换能器抽象为几何点，对其横摇、纵摇等运动学特性不做讨论，因此所有涉及到光波束测绘的问题均可沿用本模型。

参考文献

- [1] 张旭, 叶小心, 洪德玫. 多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究 [J]. 中国水运. 航道科技, 2017(01):52-55. DOI:10.19412/j.cnki.42-1395/u.2017.01.011.
- [2] 成芳, 胡迺成. 多波束测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术学报, 2016, 35(02):87-91.
- [3] 等深线 - 搜狗百科
- [4] GB12327-2022. 海道测量规范 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2022.

附 录

附录 1：支撑材料目录

文件名	含义
result1.xlsx	问题一结果表格
result2.xlsx	问题二结果表格
GB+12327-2022	海道测量规范
多波束测量测线布设优化方法研究 _ 成芳	
多波束系统在长江航道测量中的测线布设方法研究 _ 张旭	
P_1.m	问题一求解程序
P_2.m	问题二求解程序
P_3.m	问题三求解程序
P_3plot.m	问题三画图程序
P_4.m	问题四求解程序
P_4contour.m	问题四画图程序
附件.xlsx	海水深度数据

附录 2：问题一的 MATLAB 代码

Listing 1: **P1.m**

```

clear;clc;
theta=pi/3*2; % 多波束测量器开角
alpha=1.5/180*pi; % 坡度角
D_0=70; % 海域中心处海水深度
b=200; % 每个测量点的水平间隔

x=-800:b:800;
D=D_0-x*tan(alpha); % 海水深度
W=D* sin(theta/2)* cos(alpha)* ( 1/cos(theta/2+alpha) + 1/cos(theta/2-
    alpha) ); % 覆盖宽度

seq=-4:1:4;
l=seq*b-D*sin(theta/2)/cos(theta/2+alpha)*cos(alpha); % 每个测量点左边界
    坐标
r=seq*b+D*sin(theta/2)/cos(theta/2-alpha)*cos(alpha); % 每个测量点右边界
    坐标

```

```

r=r(1:end-1);
l=l(2:end);
eta=(r-l)./W(2:end); % 与前一条测线重叠率

%% 将计算结果写入result1.xlsx
writematrix(D,"result1.xlsx","Range","B2:J2");
writematrix(W,"result1.xlsx","Range","B3:J3");
writematrix(eta,"result1.xlsx","Range","C4:J4");

```

附录 3：问题二的 MATLAB 代码

Listing 2: P2.m

```

clear;clc;
%% 已知变量
d=0:0.3:2.1;
d=d*1852; % 距海域中心点距离，单位转化为m
beta=0:45:315;
beta=beta/180*pi; % 测线方向夹角 $\beta$ ，单位转化为弧度制
theta=120/180*pi; % 多波束测量器开角
alpha=1.5/180*pi; % 坡度角
D_0=120; % 海域中心处海水深度

%% 覆盖宽度计算
W=zeros(8,8);
for i = 1:8
    for j = 1:8
        beta_now=beta(i);
        d_now=d(j);
        gamma=acos(1/sqrt(1+ sin(beta_now)^2 * tan(alpha)^2 )); % 计算与
            测线垂直的平面的坡度角
        D=D_0+d_now*cos(beta_now)*tan(alpha); % 沿beta方向运动d距离后的水深
        W(i,j)=D*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(
            theta/2-gamma)); % 覆盖宽度
    end
end
%% 将结果写入result2.xlsx文件
writematrix(W,"result2.xlsx","Range","C3:J10")

```

附录 4：问题三的 MATLAB 代码

Listing 3: P3.m

```

clear;clc;
L=4*1852; % 海域的长度
S=2*1852; % 海域的宽度
theta=2/3*pi; % 多波束换能器的开角
alpha=1.5/180*pi; % 坡度
D_center=110; % 海域中心处的海水深度
D_0=D_center+L/2*tan(alpha); % 最深处的海水深度
eta=0.1; % 覆盖率

n=5000; % 选取的点数
beta=linspace(atan(0.5),pi/2,n); % 方向角
l=zeros(1,n); % 存储测线的总长度
for i = 1:n
    beta_now=beta(i);
    gamma=acos(1/sqrt(1+ sin(beta_now)^2 * tan(alpha)^2 ));
    % l(x),r(x),w(x)的系数
    k_l=1+tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(gamma)/(cos(theta/2+gamma));
    c_l=-D_0*sin(theta/2)*cos(gamma)/(cos(theta/2+gamma));

    k_r=1-tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(gamma)/(cos(theta/2-gamma));
    c_r=D_0*sin(theta/2)*cos(gamma)/(cos(theta/2-gamma));

    k_w=-tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(
        (theta/2-gamma)));
    c_w=D_0*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(theta
        /2-gamma));

    x_0=-c_l/k_l; % 初始最优点
    l_std=S/sin(beta_now); % 一条测线的标准长度
    flag=0; % 用于判断测线是否越过右边界
    while(1)
        right=k_r*(x_0-l_std*cos(beta_now))+c_r;
        % 测线探测的范围已覆盖整个海域，退出循环
        if (right>=L)
            break
        end
        % 测线越过右边界
        if (x_0>L)
            flag=1;
            l(i)=l(i)+l_std-(x_0-L)/cos(beta_now);

```

```

% 测线越过左边界
elseif (x_0-l_std*cos(beta_now)<0 )
    l(i)=l(i)+x_0/cos(beta_now);
% 整条侧线都在边界范围内
else
    l(i)=l(i)+l_std;
end
if (flag==0)
    x_0=(k_r*x_0-k_l*x_0-k_w*eta*x_0+c_r-c_l-c_w*eta)/((k_w*eta+
        k_l)*sin(beta_now)^2)+x_0; % 测线未越界时的最优点
else
    x_0=x_0-(k_w*L*eta+c_w*eta-k_r*L+k_l*L+c_l-c_r)/(k_r*sin(
        beta_now)^2); % 测线越界时的最优点
end
end
end

semilogy(beta,l,"r-.");
hold on;
plot(beta(end),l(end),"b*");
hold off;
title("测线总长度与方向角beta的关系")
xlabel("beta");ylabel("测线总长度/m");
legend("测线总长度--beta","最低点");

```

附录 5: 问题四的 MATLAB 代码

Listing 4: **P4.m**

```

clear;clc;
A=readmatrix("附件.xlsx");
A=-A(2:end,3:end);
[m,n]=size(A);
theta=pi*2/3;
eta=0.1;

%% 分割A1,A2,A3,A4
O_x=28;O_y=28; % 海水最浅处
P_1y=228;P_2x=178;P_3x=121; % 分割点,基于Excel数据的分析
A1=A(P_1y:m,1:P_2x);
A2=A(P_1y:m,P_2x:n);

```

```

A3=A(1:P_1y,1:P_3x);
A4=A(1:P_1y,P_3x:n);
% 将A3,A4边界以外的深度设置为-Inf
% for i = 1:57
%     A3(1:4*i,P_3x+i)=-Inf;
%     A4(4*i-2:P_1y,i)=-Inf;
% end

%% 处理A1
A1=mean(A1,2);num_A1=m-P_1y+1;
X=ones(num_A1,2);
Y=zeros(num_A1,1);
for i=1:num_A1
    X(i,2)=(P_1y-2+i)*0.02*1582;
    Y(i)=A1(i);
end
K1=(X'*X)\X'*Y;
num=100;
x=linspace(P_1y-1,m-1,num)'+0.02*1582;
y=[ones(num,1),x]*K1;
hold on;
plot(x,y,"r-");plot((P_1y-1:1:m-1)*0.02*1582,A1,"b*");
legend("最小二乘拟合直线","数据点");
xlabel("沿南-北方向");ylabel("海水深度");
hold off;
alpha=atan(-K1(2));gamma=alpha;
D_0=-A1(end);
L=(m-P_1y+1)*0.02*1582;
k_l=1+tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2+alpha));
c_l=-D_0*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2+alpha));
k_r=1-tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2-alpha));
c_r=D_0*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2-alpha));
k_w=-tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(theta/2-gamma));
c_w=D_0*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(theta/2-gamma));
x_0=-c_l/k_l;
total_l=x_0;
r=k_r*total_l+c_r;
l=k_l*total_l+c_l;
count_l1=1; % 所需测线的条数

```



```

while(r<L)
    count_l1=count_l1+1;
    total_l=(k_r*total_l+c_r-c_l-eta*c_w)/(eta*k_w+k_l); % 每次以最小重叠
        率选取下一条测线
    r=k_r*total_l+c_r;
    l=k_l*total_l+c_l;
end
l_A1=count_l1*P_2x*0.02*1582;
out_A1=r-L; % A1测线超出部分的长度

%% 处理A2
num_A2=(m-P_1y+1)*(n-P_2x+1);
Z=zeros(num_A2,1);
I=ones(num_A2,2);
x_A2=zeros(num_A2,1);
y_A2=zeros(num_A2,1);
for i=1:m-P_1y+1
    for j=1:n-P_2x+1
        count=(i-1)*(m-P_1y+1)+j;
        x_A2(count)=sqrt((i-(n-P_2x+1))^2+(j-(m-P_1y+1))^2)*0.02*1852;
        y_A2(count)=-A(i-1+P_1y,j-1+P_2x);
        Z(count)=y_A2(count);
        I(count,2)=x_A2(count);
    end
end
K2=(I'*I)\I'*Z;
hold on;
x=linspace(0,1200,1000)';
plot(x,[ones(1000,1),x]*K2,"r-");
plot(x_A2,y_A2,"bx");
legend("最小二乘拟合直线","数据点");
xlabel("沿半径方向");ylabel("海水深度");
hold off;

alpha=atan(K2(2));gamma=alpha;
D_0=-A2(m-P_1y+1,1);
L=(n-P_2x+1)*0.02*1582;
k_l=1+tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2+alpha));
c_l=-D_0*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2+alpha));
k_r=1-tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2-alpha));

```

```

c_r=D_0*sin(theta/2)*cos(alpha)/(cos(theta/2-alpha));
k_w=-tan(alpha)*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(
    theta/2-gamma));
c_w=D_0*sin(theta/2)*cos(gamma)*(1/cos(theta/2+gamma)+1/cos(theta/2-
    gamma));
total_l=0;
r=k_r*total_l+c_r;
count_l2=0; % 测线的长度
while(r<L)
    count_l2=count_l2+pi/2*(D_0-total_l*tan(alpha)-K2(1))/K2(2);
    total_l=(k_r*total_l+c_r-c_l-eta*c_w)/(eta*k_w+k_l); % 每次以最小重叠
        率选取下一条测线
    r=k_r*total_l+c_r;
end

%% 处理A3
num_A3=P_1y*P_3x;
x_A3=zeros(num_A3,1);
y_A3=zeros(num_A3,1);
Z=zeros(num_A3,1);
I=ones(num_A3,5);
count=0;
for i=1:P_1y
    for j=1:P_3x
        count=count+1;
        x_A3(count)=sqrt((i-27)^2/4+(j-27)^2)*0.02*1852;
        y_A3(count)=log(-A(i,j));
        Z(count)=y_A3(count);
        I(count,2)=(j-1)*0.2*1852;I(count,3)=I(count,2)^2;
        I(count,4)=(i-1)*0.2*1852;I(count,5)=I(count,4)^2;
    end
end
plot(x_A3,y_A3,"bx");
K3=(I'*I)\I'*Z;

%% 处理A4
num_A4=P_1y*(n-P_3x+1);
x_A4=zeros(num_A4,1);
y_A4=zeros(num_A4,1);
Z=zeros(num_A4,1);
I=ones(num_A4,3);

```

```

count=0;
for i=1:P_1y
    for j=1:n-P_3x+1
        count=count+1;
        Z(count)=-A4(i,j);
        I(count,2)=(j-n)*0.2*1852;
        I(count,3)=(i-1)*0.2*1852;

    end
end
K4=(I'*I)\I'*Z;
alpha=atan(K4(2)^2+K4(3)^2);
D_0=A4(1,n-P_3x+1);

```