1. Einführung

1.1. Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Mitternachtsformel:

$$x_{\{1,2\}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2. Formen

1.2.1. Kreis

Umfang C:

$$C = \pi \cdot 2r$$

Fläche A:

$$A = \pi \cdot r^2$$

1.2.2. Dreieck

Umfang C:

$$C = a + b + c$$

Fläche A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.2.3. Kugel

Volumen V:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche A:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

1.3. Trigonometrie

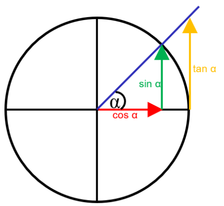
$$a = \text{Ankathete}$$

$$g = \text{Gegenkathete}$$

$$h = \text{Hypothenuse}$$

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \; h = \frac{g}{\sin(a)}, \; a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$$



1.4. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.5. Ableitung

Funktion	**Ableitung**
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

1.6. Integration

Funktion	**Ableitung**
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

m1 = Massepunkt 1
m2 = Massepunkt 2

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Fallbeschleunigung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_E = 6378 \text{ km}$$

$$g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

2.2. Reibung

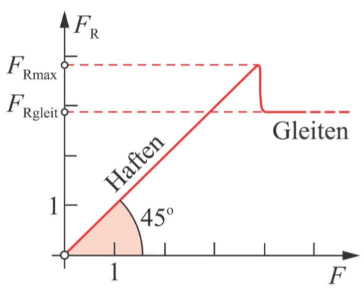
Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$$F_G = -F_N$$

Haft-/Gleitreibungskraft:

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

$$F_{\text{Gleit}} \approx \mu_H \cdot F_N$$

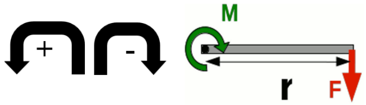


2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M (a = Hebellänge):

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2,
F = Kraft senkrecht zur Fläche N,
E = Elastizitätsmodul Nm^{-2},
μ = Poissonzahl (< 0.5),
G = Schubmodul
p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ:

$$\sigma := \frac{F_\perp}{A} = -p$$

$$\sigma \cdot E = \frac{F}{A}$$

Druckspannung p:

$$p = \frac{F}{A} = -\sigma$$

Hook'sche Gesetz
(relative Änderung [0-1]):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung $\triangle l$:

$$\triangle l = l\frac{F}{A}$$

Dehnung ε:

$$\varepsilon = \frac{\triangle l}{l}$$

Schubspannung τ:

$$\tau := \frac{F_\parallel}{A}$$

Scherwinkel:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε_q (d = Urprungsdicke, $\triangle d$ = Dickeänderung):

$$\varepsilon_q = \frac{\triangle d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression ($\triangle p$ = Druckänderung):
κ = Kompressibilität

$$\frac{\triangle V}{V} = -\kappa \cdot \triangle p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante
φ = Winkel der Drehung
G = Schubmodul
l = Länge der Torsionsfeder
r = Radius der Torsionsfeder

Drehmoment Torsionsfeder:

$$M = c \cdot \varphi$$

Federkonstante:

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \to 2l \Rightarrow \varphi \to 2\varphi$$

$$r \to 2r \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{16}$$

$$E \to 2E \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante
n = Windungszahl
R = Windungsradius
r = Drahtdurchmesser
x = Auslenkung

$$k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4nR^3 \cdot F}{Gr^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \to 2r \Rightarrow x \to \frac{x}{16}$$

$$R \to 2R \Rightarrow x \to 8x$$

$$E \to 2E \Rightarrow x \to \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattfeder

b = Breite Material
h = Höhe Material
l = Länge Material
p = Dichte des Materials
E = Elastizitätsmodul
z = Auslenkung

Durchbiegung am Ende:

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Durchbiegung in der Mitte:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{v(t) - v(t - \triangle t)}{\triangle t} = \frac{d}{dt} v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Lineare Bewegung

3.2.1. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke (m)
v = Geschwindigkeit (frac(m,s))
t = Zeit (s)

Ort:

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 = \text{konstant}$$

Beschleunigung:

$$a(t) = 0$$

Anderes:

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

3.2.2. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

a = Beschleunigung ($\frac{m}{s^2}$)
v = Geschwindigkeit ($\frac{m}{s}$)
t = Zeit (s)

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

Was häufiger antreffen sind, sind Aufgaben im Stil von Gesamtzeit 10s, ein Teil beschleunigt, ein Teil konstante Geschwindigkeit, Gesamtstrecke 100m.

$$x = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

$$v_0 = a \cdot t_0$$

Ohne Anfangswerte:
x = Ort
v = Geschwindigkeit
a = Beschleunigung

$$x = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2ax}$$

$$a = \frac{v^2}{2x}$$

Mit Anfangswerte:
x = Ort
v = Geschwindigkeit
a = Beschleunigung
x_0 = Anfangsort
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + x_0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot (x - x_0)}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot (x - x_0)}$$

Idk what this is for:

$$a = \frac{1}{2}\frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

3.3. Beliebige Bewegungen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}$$

$$\triangle \vec{r} = \vec{r}(t + \triangle t) \vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{r}}{\triangle t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

3.3.1. Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a} := \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \triangle t)}{\triangle t}$$

$$a_{\text{tangential}} = \lim \frac{\triangle v_{\text{tangential}}}{\triangle t} = \frac{d}{dt} v = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \lim \frac{\triangle v_{\text{radial}}}{\triangle t} = \frac{v^2}{r}$$

3.3.2. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v_{\text{tangential}(t)} = v_0 = \text{konstant}$$

$$s(t) = v_0 t + s_0$$

3.3.3. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$a_{\text{tangential}} = a_0 \neq 0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

3.4. Kreisbewegung

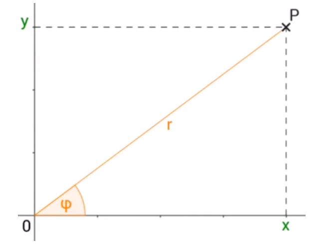
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Polar -> Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ \tan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch -> Polar}}$$



3.4.1. Winkelgeschwindigkeit

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)
f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)
r = Radius
s = Strecke
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit

Winkel φ:

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega \cdot r$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\varphi \cdot r}{T} = r \cdot \omega$$

Drehfrequenz f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Umlaufzeit T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Periode:

$$\omega = 2\pi f$$

3.4.2. Winkelbeschleunigung

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d}{dt} \omega = \dot{w} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

3.4.3. Gleichförmige Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis
φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel

$$a = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a = \alpha \cdot r = 0$$

$$v = w_0 \cdot r = \text{konstant} = v_0$$

$$s = w_0 r t + \varphi_0 r$$

3.4.4. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis
φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$a = a_0 = \text{konstant}$$

$$\omega = a_0 t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Ohne Anfangswerte:
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit
a = Winkelbeschleunigung

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2a}$$

$$\omega = \sqrt{2a\varphi}$$

$$a = \frac{\omega^2}{2\varphi}$$

Mit Anfangswerte:
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit
a = Winkelbeschleunigung
φ_0 = Anfangswinkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a} + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{w_0^2 + 2a \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

$$a = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

3.5. Wurfbahnen

3.5.1. Senkrechter Wurf

Maximalhöhe erreicht, wenn die Geschwindigkeit 0 ist.

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + v_0 (v_0 < 0 = \text{nach unten werfen})$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

3.5.2. Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + x_0$$

3.5.3. Horizontaler Wurf

$$a_{x(t)} = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$a_{y(t)} = -g = \text{konstant}$$

$$v_{y(t)} = -gt + \underbrace{v_0}_{0}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt + y_0$$

Wurfhöhe:
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Steigzeit t:
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$t = \frac{v_0}{g}$$

3.5.4. Schiefer Wurf

Wurfweite maximiert bei Abwurfwinkel von 45°.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$$

Bahnkurve y(x):

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz:

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe:

$$X_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik

Gewichtskraft:
F_G = Kraft
m = Masse

$$F_G = m \cdot g$$

4.1. Reibungskräfte

μ_{Gleit} = Gleitreibungskoeffizient
μ_{Roll} = Rollreibungskoeffizient
F_N = Normalkraft

Gleitreibung:

$$F_{\text{Gleit, R}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$$

Rollreibung:

$$F_{\text{Roll, R}} = \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N$$

Rollreibungslänge e:

$$e = \frac{r \cdot F_{\text{Reibung}}}{F_N} = r \cdot \mu_R$$

4.2. Arbeit und Energie

Einheit von $W : 1J = 1Nm$
s = Strecke

Arbeit W:

$$W = F_s \cdot s$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potentielle Energie E_{pot}:
m = Masse
h = Höhe ab Referenz

$$E_{\text{pot}} = F_G \cdot h = \underbrace{m \cdot g}_{F_G} \cdot h$$

Elastische Energie E_{ela}:
k = Federkonstante
x = Verschiebung

$$E_{\text{ela}} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Kinetische Energie E_{kin}:
m = Masse
v = Geschwindigkeit

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

Totale Energie E_{tot}:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

Verschiebungsarbeit:

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} a t^2\right) = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltungssatz:

$$W = F_G \cdot h = mgh = mg\frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$$

4.3. Leitung / Wirkungsgrad

Einheit von $P : 1W = 1\frac{J}{s}$
Leistung P:

$$P = \frac{\triangle W}{\triangle t} = \frac{F \cdot \triangle s}{\triangle t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Watt W:

$$1W = 1\frac{J}{s}$$

Wirkungsgrad η:
P_{ab} = Abgeführte Leistung
P_{zu} Zugeführte Leistung

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

4.4. Impuls / Impulserhaltung

Impuls $\vec{p}$:
m = Masse
v = Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newtonsches Gesetz umschreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

4.5. Stösse

4.5.1. Elastischer Stoss

Wenn sich hier zwei Körper aufeinander zu bewegen, muss die Geschwindigkeit des Körpers, welcher von rechts nach links geht, negativ sein.

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
v_1' = Geschwindigkeit von Körper 1 nach Stoss
v_2' = Geschwindigkeit von Körper 2 nach Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

4.5.2. Total inelastischer Stoss

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2
v' = Gemeinsame Geschwindigkeit nach Stoss

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

4.5.3. Deformationsarbeit

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2
μ = Reduzierte Masse

Relativgeschwindigkeit v_{rel}:

$$v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$$

Reduzierte Masse μ:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Deformationsarbeit Q:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

oder vereinfacht:

$$Q = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{O} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2\right)$$

$$\vec{O} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{P}_{\text{tot}}$$

Impulssatz:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Energiesatz total elastisch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2$$

4.6. Rakete

Endgeschwindigkeit in Erdferne ($g = 0$):
u = Ausstoßgeschwindigkeit
m = Verbleibende Masse

$$v_m = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + v_0$$

Geschwindigkeit nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$): m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m° t}\right) - g \cdot t + v_0$$

Steighöhe nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$): m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$h(t) = u \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{u}{m°} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m° \cdot t}\right) \cdot (m_0 - m° \cdot t)$$

Mit Brenndauer: m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit m = Verbleibende Masse

$$t = \frac{m_0 - m}{m°}$$

Kepler Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht
2. Der Fahrstrahl eines Planeten ¨uberstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der Halbachsen der Planten.

4.6.1. Gravitation

$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
$m_E = 5.96 \cdot 10^{24} kg$ = Erdmasse
m = Beliebige Masse
r_E = Abstand der Masse m von der Erde

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m_e \cdot m}{r_E}$$

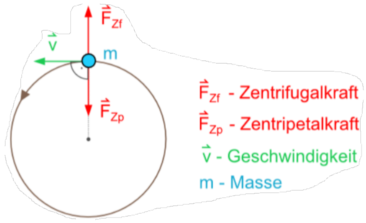
Fluchtgeschwindigkeit V_F:

$$V_F = \sqrt{2\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 11.15\frac{km}{s}$$

Miniimale Kreisbahngeschwindigkeit V_K:

$$V_K = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 7.89\frac{km}{s}$$

4.7. Zentripetalkraft



Zentrifugalkraft vektoriell:
m = Masse
a_r = Radiale Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{a}_r$$

Zentrifugalkraft:
r = Radius
ω = Winkelgeschwindigkeit
$v = \omega \cdot r$ = Umfangsgeschwindigkeit bei Radius r

$F_Z = m \cdot a_r$ $\quad F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$
$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Zentripetalbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Corioliskraft (Betrag):
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_r \cdot \omega$$

Tangentielle Coriolisbeschleunigung:
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

Rotationsarbeit:
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

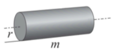
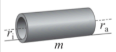
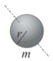
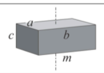
4.8. Drehbewegung

Drehmoment M um eine vorgegebene Achse A:
M = Betrag des Drehmoments um Achse A
a = Winkelbeschleunigung um Achse A
J = Trägheitsmoment bzgl. der Achse A

$$M = J_A \cdot a$$

Trägheitsmoment J einer Punkt-Masse m_0:
m_0 = Punktmasse r = Abstand der Punktmasse von der Achse A

$$J = m_0 \cdot r_A^2$$

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m (r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5} m r^2$
Quader		$\frac{m (a^2 + b^2)}{12}$

4.8.1. Satz von Steiner

Trägheitsmoment J_A bzgl. einer Achse A berechnet aus Schwerpunkts-Trägheitsmoment J_{SP}

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt
R_A = Abstand der Achse A vom Schwerpunk SP
m = Masse

$$J_A = J_{\text{SP}} + m \cdot R_A^2$$

Trägheitsmoment J_B bzgl. einer Achse B berechnet aus Trägheitsmoment J_A bzgl. Achse A

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
J_B = Trägheitsmoment bzgl. Achse B
R_{AB} = Abstand der parallelen Achse A und B
m = Masse

$$J_B = J_A + m \cdot R_{\text{AB}}^2$$

4.9. Drehstuff

Rotationsleistung P:
M = Drehmoment
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$P = M \cdot \omega$$

Totale Energie E_{tot}:
E_{tra} = Translationsenergie E_{rot} = Rotationsenergie

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{tra}} + E_{\text{rot}}$$

Rotationsenergie E_{rot}:
J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt ω = Winkelgeschwindigkeit

$$E_{\text{rot}} = \frac{J_{\text{SP}} \cdot \omega^2}{2}$$

Translationsenergie E_{tra}:
m = Masse v_{SP} = Schwerpunktgeschwindigkeit

$$E_{\text{tra}} = \frac{m \cdot v_{\text{SP}}^2}{2}$$

Drehimpuls L bei Rotation um eine Achse A:
J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A ω = Winkelgeschwindigkeit

$$L = J_A \cdot \omega$$

Kreisel:
Ω = Präzessions-Winkelgeschwindigkeit
r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
m = Masse
J = Trägheitsmoment
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{M}{L_r}$$

$$\Omega = \frac{r_{\text{OS}} \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega}$$

Betrag des Drehmoments durch Gewichtskraft:
$M = |\overrightarrow{M}|$ = Betrag des Drehmoment r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
m = Masse
β = Kegelwinkel der Präzession

$$M = r_{\text{OS}} \cdot m \cdot g \cdot \sin(\beta)$$

Radialer Drehimpuls:
L_r = Radialkomponente des Drehimpuls
$L = J \cdot \omega$ = Totaler Drehimpuls
β = Kegelwinkel der Präzession

$$L_r = L \cdot \sin(\beta) = J \cdot \omega \cdot \sin(\beta)$$