

1. Einführung

1.1. Trigonometrie

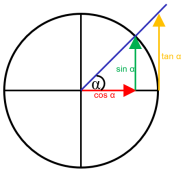
a = Ankathete

g = Gegenkathete

h = Hypotenuse

$\sin(a) = \frac{g}{h}, \cos(a) = \frac{a}{h}, \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$

$g = h \cdot \sin(a), h = \frac{g}{\sin(a)}, a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$



1.2. Vektor

Kreuzprodukt:

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$

1.3. Ableitung

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

Gravitationsgesetz:

$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Gravitationskonstante G:

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$

Fallbeschleunigung g:

$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}, r_E = 6378 \text{ km}$

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

2.2. Reibung

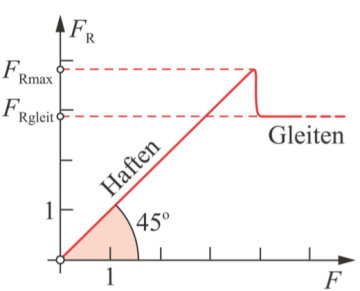
Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$F_G = -F_N$

Haft-/Gleitreibungskraft:

$F_R = \mu_H \cdot F_N$

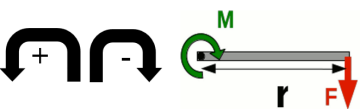
$F_{\text{Gleit}} \approx \mu_H \cdot F_N$



2.3. Drehmoment

Drehmoment M (a = Hebellänge):

$M = a \cdot F$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2 ,
F = Kraft senkrecht zur Fläche N ,
E = Elastizitätsmodul Nm^{-2} ,
 μ = Poissonzahl (< 0.5),
G = Schubmodul
p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ :

$\sigma := \frac{F_{\perp}}{A} = -p$

Hook'sche Gesetz

(relative Änderung [0-1]):

$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$

2.4.2. Dehnung

Dehnung (Δl = Verlängerung):

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

Schubspannung τ :

$\tau := \frac{F_{\parallel}}{A}$

Scherwinkel:

$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$

Schubmodul G:

$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$

Querkontraktion ε_q (d = Ursprungsdicke,
 Δd = Dickeänderung):

$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$

$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$

2.4.3. Kompression

Kompression (Δp = Druckänderung):

κ = Kompressibilität

$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante

φ = Winkel der Drehung

G = Schubmodul

l = Länge der Torsionsfeder

r = Radius der Torsionsfeder

$M = c \cdot \varphi$

$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$

Bei M konstant:

$l \rightarrow 2l \Rightarrow \varphi \rightarrow 2\varphi$

$r \rightarrow 2r \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{16}$

$E \rightarrow 2E \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{2}$

$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante

n = Windungszahl

R = Windungsradius

r = Drahtdurchmesser

x = Auslenkung

$k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$

$F = kx$

$x = \frac{F}{k} = \frac{4nR^3 \cdot F}{Gr^4}$

Bei konstanter Kraft F:

$r \rightarrow 2r \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{16}$

$R \rightarrow 2R \Rightarrow x \rightarrow 8x$

$E \rightarrow 2E \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{2}$

$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow x$ wird grösser

2.5.3. Plattfeder

b = Breite Material

h = Höhe Material

l = Länge Material

p = Dichte des Materials

E = Elastizitätsmodul

z = Auslenkung

$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$

Maximale Durchbiegung:

$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Beschleunigung:

$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

Momentane Beschleunigung:

$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v(t)$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$v = \sqrt{2gh}$

3.2. Schiefer Wurf

$a_x = 0$

$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$

$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$

$a_y = -g$

$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$

$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$

Bahnkurve y(x):

$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$

Maximale Wurfdistanz:

$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$

Maximale Wurfhöhe:

$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe:

$$X_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik
