

1. Einführung

1.1. Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Mitternachtsformel:

$$x_{\{1,2\}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2. Formen

1.2.1. Kreis

Umfang C:

$$C = \pi \cdot 2r$$

Fläche A:

$$A = \pi \cdot r^2$$

1.2.2. Dreieck

Umfang C:

$$C = a + b + c$$

Fläche A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.2.3. Kugel

Volumen V:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche A:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

1.3. Trigonometrie

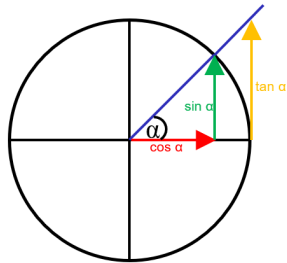
a = Ankathete

g = Gegenkathete

h = Hypothenuse

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \quad h = \frac{g}{\sin(a)}, \quad a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$$



1.4. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.5. Ableitung

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

1.6. Integration

Funktion	Ableitung
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

m1 = Massepunkt 1

m2 = Massepunkt 2

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Fallbeschleunigung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_E = 6378 \text{ km}$$

$$g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

2.2. Reibung

Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$$F_G = -F_N$$

Gleitreibungskraft:

F_N = Gleitreibung

μ_G = Gleitreibungskoeffizient

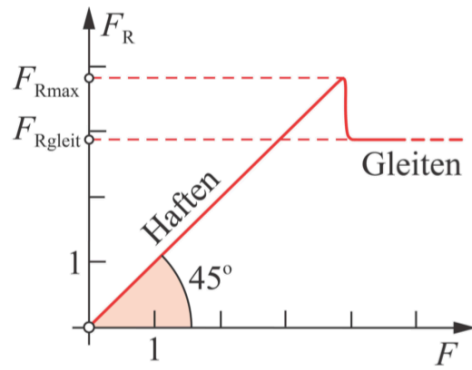
$$F_R = \mu_G \cdot F_N$$

Haftreibungskraft:

F_N = Gleitreibung

μ_H = Haftreibungskoeffizient

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$



2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M:

a = Hebellänge

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2 ,

F = Kraft senkrecht zur Fläche N,

E = Elastizitätsmodul Nm^{-2} ,

μ = Poissonzahl (< 0.5),

G = Schubmodul

p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ :

$$\sigma := \frac{F_{\perp}}{A} = -p$$

$$\sigma \cdot E = \frac{F}{A}$$

Druckspannung p:

$$p = \frac{F}{A} = -\sigma$$

Hook'sche Gesetz

Relative Änderung [0-1]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung Δl :

$$\Delta l = l \frac{F}{A}$$

Dehnung ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Schubspannung τ :

$$\tau := \frac{F_{\parallel}}{A}$$

Scherwinkel γ :

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε_q :

d = Ursprungsdicke

Δd = Dickeänderung

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression:

Δp = Druckänderung

κ = Kompressibilität

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante

φ = Winkel der Drehung

G = Schubmodul

l = Länge der Torsionsfeder

r = Radius der Torsionsfeder

Drehmoment Torsionsfeder:

$$M = c \cdot \varphi$$

Federkonstante:

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \rightarrow 2l \Rightarrow \varphi \rightarrow 2\varphi$$

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{16}$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante

n = Windungszahl

R = Windungsradius

r = Drahtdurchmesser

x = Auslenkung

$$k = \frac{G r^4}{4n R^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4n R^3 \cdot F}{G r^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{16}$$

$$R \rightarrow 2R \Rightarrow x \rightarrow 8x$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattfeder

b = Breite Material

h = Höhe Material

l = Länge Material

p = Dichte des Materials

E = Elastizitätsmodul

z = Auslenkung

Durchbiegung am Ende:

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Durchbiegung in der Mitte:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt}x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Lineare Bewegung

3.2.1. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke (m)

v = Geschwindigkeit (frac(m,s))

t = Zeit (s)

Ort:

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 = \text{konstant}$$

Beschleunigung:

$$a(t) = 0$$

Anderes:

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

3.2.2. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

a = Beschleunigung ($\frac{m}{s^2}$)

v = Geschwindigkeit ($\frac{m}{s}$)

t = Zeit (s)

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$$

$$v(t) = a_0t + v_0$$

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

Was häufiger antreffen sind, sind Aufgaben im Stil von Gesamtzeit 10s, ein Teil beschleunigt, ein Teil konstante Geschwindigkeit, Gesamtstrecke 100m.

$$x = \frac{1}{2}a_0t_0^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

$$v_0 = a \cdot t_0$$

Ohne Anfangswerte:

x = Ort

v = Geschwindigkeit

a = Beschleunigung

$$x = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2ax}$$

$$a = \frac{v^2}{2x}$$

Mit Anfangswerte:

x = Ort

v = Geschwindigkeit

a = Beschleunigung

x_0 = Anfangsort

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + x_0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot (x - x_0)}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot (x - x_0)}$$

Idk what this is for:

$$a = \frac{1}{2} \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

3.3. Beliebige Bewegungen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

3.3.1. Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a} := \frac{d}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$a_{\text{tangential}} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta v_{\text{tangential}}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}v = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta v_{\text{radial}}}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

3.3.2. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v_{\text{tangential}(t)} = v_0 = \text{konstant}$$

$$s(t) = v_0t + s_0$$

3.3.3. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$a_{\text{tangential}} = a_0 \neq 0$$

$$v(t) = a_0t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + s_0$$

3.4. Kreisbewegung

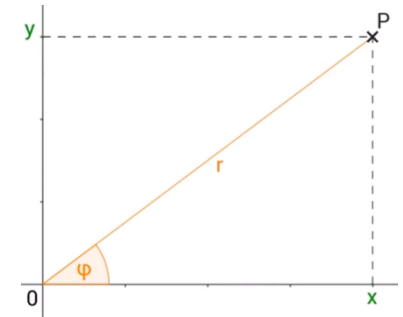
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Polar} \rightarrow \text{Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ \tan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch} \rightarrow \text{Polar}}$$



3.4.1. Winkelgeschwindigkeit

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)

f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)

r = Radius

s = Strecke

φ = Winkel

ω = Winkelgeschwindigkeit

Winkel φ:

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega \cdot r$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\varphi \cdot r}{T} = r \cdot \omega$$

Drehfrequenz f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Umlaufzeit T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Periode:

$$\omega = 2\pi f$$

3.4.2. Winkelbeschleunigung

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d}{dt}\omega = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{d}{dt}r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

3.4.3. Gleichförmige Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreisit

φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel

$$a = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a = \alpha \cdot r = 0$$

$$v = w_0 \cdot r = \text{konstant} = v_0$$

$$s = w_0 r t + \varphi_0 r$$

3.4.4. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreisit

φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$a = a_0 = \text{konstant}$$

$$\omega = a_0 t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Ohne Anfangswerte:

φ = Winkel

ω = Winkelgeschwindigkeit

a = Winkelbeschleunigung

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2a}$$

$$\omega = \sqrt{2a\varphi}$$

$$a = \frac{\omega^2}{2\varphi}$$

Mit Anfangswerte:

φ = Winkel

ω = Winkelgeschwindigkeit

a = Winkelbeschleunigung

φ_0 = Anfangswinkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a} + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{w_0^2 + 2a \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

$$a = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

3.5. Wurfbahnen

3.5.1. Senkrechter Wurf

Maximalhöhe erreicht, wenn die Geschwindigkeit 0 ist.

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + v_0 (v_0 < 0 = \text{nach unten werfen})$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

3.5.2. Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + x_0$$

3.5.3. Horizontaler Wurf

$$a_{x(t)} = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$a_{y(t)} = -g = \text{konstant}$$

$$v_{y(t)} = -gt + \underbrace{v_0}_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt + y_0$$

Wurfhöhe:

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Steigzeit t :

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$t = \frac{v_0}{g}$$

3.5.4. Schiefer Wurf

Wurfweite maximiert bei Abwurfwinkel von 45°.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$$

Bahnkurve $y(x)$:

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t :

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t :

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz d :

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe h_{max} :

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe X_{max} :

$$X_{\text{max}} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit v_x :

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t :

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik

Gewichtskraft:

F_G = Kraft

m = Masse

$$F_G = m \cdot g$$

4.1. Reibungskräfte

μ_{Gleit} = Gleitreibungskoeffizient

μ_{Roll} = Rollreibungskoeffizient

F_N = Normalkraft

Gleitreibung:

$$F_{\text{Gleit, R}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$$

Rollreibung:

$$F_{\text{Roll, R}} = \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N$$

Rollreibungslänge e :

$$e = \frac{r \cdot F_{\text{Reibung}}}{F_N} = r \cdot \mu_R$$

4.2. Arbeit und Energie

Einheit von W : $1J = 1Nm$

s = Strecke

Arbeit W :

$$W = F_s \cdot s$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potentielle Energie E_{pot} :

m = Masse

h = Höhe ab Referenz

$$E_{\text{pot}} = F_G \cdot h = \underbrace{m \cdot g}_{F_G} \cdot h$$

Elastische Energie E_{ela} :

k = Federkonstante

x = Verschiebung

$$E_{\text{ela}} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Kinetische Energie E_{kin} :

m = Masse

v = Geschwindigkeit

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

Totale Energie E_{tot} :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

Verschiebungsarbeit:

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} a t^2\right) = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltungssatz:

$$W = F_G \cdot h = mgh = mg \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$$

4.3. Leitung / Wirkungsgrad

Einheit von P : $1W = 1 \frac{J}{s}$

Leistung P :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Watt W :

$$1W = 1 \frac{J}{s}$$

Wirkungsgrad η :

P_{ab} = Abgeführte Leistung

P_{zu} Zugeführte Leistung

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

4.4. Impuls / Impulserhaltung

Impuls \vec{p} :

m = Masse

\vec{v} = Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newtonsches Gesetz umschreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

4.5. Stösse

4.5.1. Elastischer Stoss

Wenn sich hier zwei Körper aufeinander zu bewegen, muss die Geschwindigkeit des Körpers, welcher von rechts nach links geht, negativ sein.

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss

v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss

v'_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 nach Stoss

v'_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 nach Stoss

m_1 = Masse von Körper 1

m_2 = Masse von Körper 2

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v'_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

4.5.2. Total inelastischer Stoss

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss

v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss

m_1 = Masse von Körper 1

m_2 = Masse von Körper 2

v' = Gemeinsame Geschwindigkeit nach Stoss

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

4.5.3. Deformationsarbeit

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss

v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss

m_1 = Masse von Körper 1

m_2 = Masse von Körper 2

μ = Reduzierte Masse

Relativgeschwindigkeit v_{rel} :

$$v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$$

Reduzierte Masse μ :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Deformationsarbeit Q :

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

oder vereinfacht:

$$Q = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{O} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2)$$

$$\vec{O} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{P}_{\text{tot}}$$

Impulssatz:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Energiesatz total elastisch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

4.6. Rakete

Endgeschwindigkeit in Erdferne ($g = 0$):

u = Ausstoßgeschwindigkeit

m = Verbleibende Masse

$$v_m = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + v_0$$

Geschwindigkeit nach Flugzeit t in Erdnähe

($g \neq 0$): m_0 = Startmasse m° = Ausgestossene

Masse pro Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit u =

Ausstoßgeschwindigkeit

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m^\circ t}\right) - g \cdot t + v_0$$

Steighöhe nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$):

m_0 = Startmasse m° = Ausgestossene Masse pro Zeit

v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$h(t) = u \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{u^\circ}{m} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m^\circ \cdot t}\right) \cdot (m_0 - m^\circ \cdot t)$$

Mit Brenndauer:

m_0 = Startmasse m° = Ausgestossene Masse pro Zeit

m = Verbleibende Masse

$$t = \frac{m_0 - m}{m^\circ}$$

Kepler Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht
2. Der Fahrstrahl eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der Halbachsen der Planeten.

4.6.1. Gravitation

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$m_E = 5.96 \cdot 10^{24} kg$ = Erdmasse

m = Beliebige Masse

r_E = Abstand der Masse m von der Erde

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m_e \cdot m}{r_E}$$

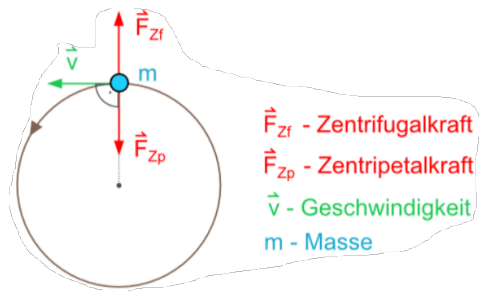
Fluchtgeschwindigkeit V_F :

$$V_F = \sqrt{2 \frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 11.15 \frac{km}{s}$$

Minimale Kreisbahngeschwindigkeit V_K :

$$V_K = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 7.89 \frac{km}{s}$$

4.7. Zentripetalkraft



Zentrifugalkraft vektoriell:

m = Masse

a_r = Radiale Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{a}_r$$

Zentrifugalkraft:

r = Radius

ω = Winkelgeschwindigkeit

$v = \omega \cdot r$ = Umfangsgeschwindigkeit bei Radius r

$$F_Z = m \cdot a_r \quad F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r \quad F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Zentripetalbeschleunigung:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Corioliskraft (Betrag):

v_r = Radiale Geschwindigkeit

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_r \cdot \omega$$

Tangentielle Coriolisbeschleunigung:

v_r = Radiale Geschwindigkeit

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

Rotationsarbeit:

v_r = Radiale Geschwindigkeit

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

4.8. Drehbewegung

Drehmoment M um eine vorgegebene Achse A:

M = Betrag des Drehmoments um Achse A

a = Winkelbeschleunigung um Achse A

J = Trägheitsmoment bzgl. der Achse A

$$M = J_A \cdot a$$

Trägheitsmoment J einer Punkt-Masse m_0 :

m_0 = Punktmasse r = Abstand der Punktmasse von der Achse A

$$J = m_0 \cdot r_A^2$$

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m (r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5} m r^2$
Quader		$\frac{m (a^2 + b^2)}{12}$

4.8.1. Satz von Steiner

Trägheitsmoment J_A bzgl. einer Achse A berechnet aus Schwerpunkts-Trägheitsmoment J_{SP} :

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A

J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt

R_A = Abstand der Achse A vom Schwerpunkt SP

m = Masse

$$J_A = J_{SP} + m \cdot R_A^2$$

Trägheitsmoment J_B bzgl. einer Achse B berechnet aus Trägheitsmoment J_A bzgl. Achse A:

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A

J_B = Trägheitsmoment bzgl. Achse B

R_{AB} = Abstand der parallelen Achse A und B

m = Masse

$$J_B = J_A + m \cdot R_{AB}^2$$

4.9. Drehstuf

Rotationsleistung P :

M = Drehmoment

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$P = M \cdot \omega$$

Totale Energie E_{tot} :

E_{tra} = Translationsenergie E_{rot} = Rotationsenergie

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{tra}} + E_{\text{rot}}$$

Rotationsenergie E_{rot} :

J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt ω = Winkelgeschwindigkeit

$$E_{\text{rot}} = \frac{J_{SP} \cdot \omega^2}{2}$$

Translationsenergie E_{tra} :

m = Masse v_{SP} = Schwerpunktgeschwindigkeit

$$E_{\text{tra}} = \frac{m \cdot v_{SP}^2}{2}$$

Drehimpuls L bei Rotation um eine Achse A:

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A ω = Winkelgeschwindigkeit

$$L = J_A \cdot \omega$$

Kreisel:

Ω = Präzessions-Winkelgeschwindigkeit

r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt

m = Masse

J = Trägheitsmoment

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{M}{L_r}$$

$$\Omega = \frac{r_{OS} \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega}$$

Betrag des Drehmoments durch Gewichtskraft:

$M = |\vec{M}|$ = Betrag des Drehmoment r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt

m = Masse

β = Kegelwinkel der Präzession

$$M = r_{OS} \cdot m \cdot g \cdot \sin(\beta)$$

Radialer Drehimpuls:

L_r = Radialkomponente des Drehimpuls

$L = J \cdot \omega$ = Totaler Drehimpuls

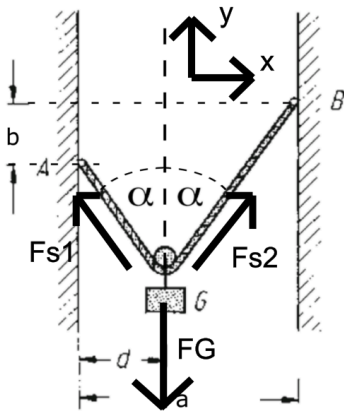
β = Kegelwinkel der Präzession

$$L_r = L \cdot \sin(\beta) = J \cdot \omega \cdot \sin(\beta)$$

5. Examples

5.1. Kräfte

5.1.1. Gewicht am Seil



Ein (masseloses) Seil ist an den Punkten A und B an zwei gegenüberliegenden Wänden befestigt, wobei die Wände im Abstand $a = 2m$ stehen. Der Befestigungspunkt A befindet sich $1m$ unterhalb vom Befestigungspunkt B. Eine Masse $m_G = 20kg$ werde an das Seil gehängt (wobei sich die Masse entlang des Seils bewegen kann). Die beiden Seilenden haben einen Winkel von $\alpha = 30^\circ$ zum Lot hin.

a) Wie gross sind die einzelnen Seilkräfte?

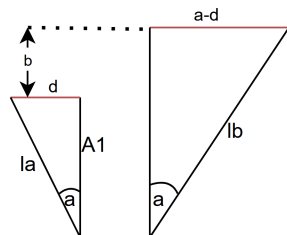
$$x = \underbrace{0}_{F_G} + \underbrace{\cos(60) \cdot F_{s1}}_{F_{s1}} - \underbrace{\cos(60) \cdot F_{s2}}_{F_{s2}} = 0$$

$$y = \underbrace{-F_G}_{F_G} + \underbrace{\cos(30) \cdot F_{s1}}_{F_{s1}} + \underbrace{\cos(30) \cdot F_{s2}}_{F_{s2}} = 0$$

Nach F_{s1} und F_{s2} auflösen oder im TR lösen gibt:

$$F_{s1} = F_{s2} = 113.27N$$

b) Wie lang sind die einzelnen Seilabschnitte?



Formel für x herausfinden:

$$\frac{d}{l_a} = \sin(\alpha) \Rightarrow d = l_a \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{a-d}{l_b} = \sin(\alpha) \Rightarrow a-d = l_b \cdot \sin(\alpha)$$

$$x : \underbrace{l_a \cdot \sin(\alpha)}_d + \underbrace{l_b \cdot \sin(\alpha)}_{a-d} = a$$

Formel für y herausfinden:

$$\frac{A_1}{l_a} = \cos(\alpha) \Rightarrow A_1 = \cos(\alpha) \cdot l_a$$

$$\frac{A_1 + b}{l_b} = \cos(\alpha) \Rightarrow A_1 + b = \cos(\alpha) \cdot l_b$$

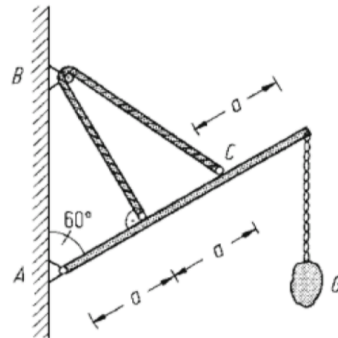
$$y : b + \underbrace{\cos(\alpha) \cdot l_a}_{A_1} = \underbrace{\cos(\alpha) \cdot l_b}_{A_1 + b}$$

x und y nach l_a und l_b im TR auflösen:

$$l_a = 1.422m$$

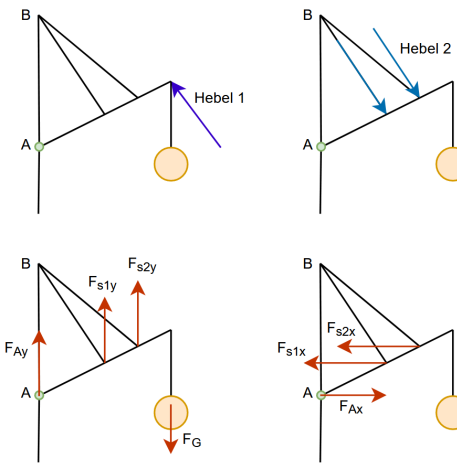
$$l_b = 2.577m$$

5.2. Drehmoment



Skizze der Krankonstruktion.

Ein Kran hebt einen Stein der Masse $G = 150kg$ wie in der Skizze dargestellt. Der Kranarm ist an Punkt A drehbar gelagert und das Seil ist in Punkt B um eine Umlenkrolle geschleift und am Kranarm fest verbunden. Welcher Kraft F_S ist das Seil ausgesetzt? Berechnen sie die Kraft, mit welcher das Kranlager an Punkt A auf den Kranarm wirkt, wenn das System im Gleichgewicht ist.



$$M = \text{Hebel 1} + \text{Hebel 2} = 0$$

$$F_X = F_{s1} + F_{s2} F_A = 0$$

$$F_Y = F_{s1} + F_{s2} F_A - F_G = 0$$

Einsetzen in Solver:

$$3 \cdot 150kg \cdot 9.81 \cdot \cos(30) - 1 \cdot F_S - 2 \cdot F_S \cdot \cos(30) = 0$$

$$-F_S \cdot \sin(30) - F_S \cdot \sin(60) + F_{Ax} = 0$$

$$F_S \cdot \cos(30) + F_S \cdot \cos(60) + A_{Ay} - 150kg \cdot 9.81 = 0$$

5.3. Geschwindigkeit

5.3.1. Tuch wegziehen

Auf einem Tisch steht eine Blumenvase. Wir wollen das Tischtuch wegziehen, ohne dass die Vase herunterfällt.

Das Tuch wird ruckartig auf eine konstante Geschwindigkeit v_0 beschleunigt (die für die Beschleunigung benötigte Zeit wird vernachlässigt) und wird dann mit dieser konstanten Geschwindigkeit auf einer Strecke von $60cm$ bewegt. Die Gleitreibung zwischen Vase und Tischtuch hat den Wert $\mu_G = 0.3$. Wie schnell muss das Tuch bewegt werden, damit sich die Vase in der gleichen Zeit höchstens $5cm$ bewegt?

Zuerst können wir die Zeit durch einige der Grössen ausdrücken:

$$t = \frac{S_T}{v_0}$$

Beschleunigt wird unsere Vase durch die Reibung des durchrutschenden Tischtuches. Dabei können wir

sagen, dass die Gesamtkraft für die Beschleunigung der Reibungskraft entsprechen muss.

$$m \cdot a = \mu_G \cdot m \cdot g$$

$$a = \mu_G \cdot g$$

Nun können wir die Strecke der Vase berechnen:

$$t = \frac{S_T}{v_0} S_V = \frac{a_v}{2} \cdot t^2$$

$$t = \frac{0.6}{v_0} 0.05 = \frac{0.3 \cdot 9.81}{2} \cdot t^2$$

$$v = 3.25 \frac{m}{s}$$

5.3.2. Autobahn

Auf einer Autobahn fährt ein Fahrzeug A mit konstanter Geschwindigkeit $v_{A0} = 110 \frac{km}{h}$. In die Autobahn fährt ein Fahrzeug B ein. Zum Zeitpunkt des Einfahrens ($t = 0$) hat Fahrzeug B eine Geschwindigkeit $v_{B0} = 110 \frac{km}{h}$ und einen Abstand von Fahrzeug A von $d = 200m$. Welche (konstant angenommene) Beschleunigung a_B muss Fahrzeug B haben, wenn ein Mindestabstand der beiden von $d_{min} = 40m$ eingehalten werden soll?

Überlegung: Der Mindestabstand muss eingehalten werden, wenn beide Fahrzeuge gleich schnell sind. Dieser Mindestabstand muss zum Zeitpunkt t_x erreicht sein. Falls A langsamer ist als B, dann vergrößert sich der Abstand, umgekehrt verringert sich der Abstand.

Somit gilt:

$$v_{A0} = v_{B0} + a_B \cdot t_x$$

Ausserdem können wir den Mindestabstand algebraisch ausdrücken. Fahrzeug A bewältigt diese Strecke mit seiner regelmässigen Geschwindigkeit $v_{A0} \cdot t_x$. Bei Fahrzeug B ist dies etwas mehr:

$$\text{Beschleunigung: } \frac{a_B}{2} \cdot t_x^2$$

$$\text{Startgeschwindigkeit: } v_{B0} \cdot t_x$$

$$\text{Vorsprung: } 200m$$

Zusammengesetzt:

$$d_{min} = S_B - S_A$$

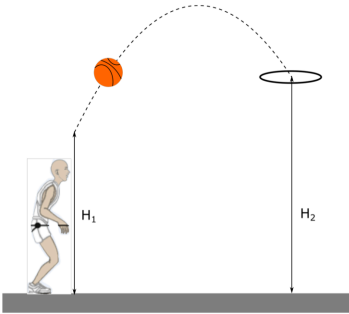
$$d_{min} = \frac{a_B}{2} \cdot t_x^2 + v_{B0} \cdot t_x + d - v_{A0} \cdot t_x$$

$$t_x = 28.8$$

$$a_B = 0.39$$

5.4. Würfe

5.4.1. Schiefer Wurf mit Basketball



Ein Basketball mit 30cm Durchmesser soll in einem Abwurfwinkel von 70° zur Horizontalen direkt in den Basketball-Korb geworfen werden aus einer Höhe von 2.1m (Ballmittelpunkt). Die Mitte des Korbrings von 35cm Durchmesser befindet sich in einer Distanz von 2.7m und in 3.2m Höhe.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(\varphi)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t + \underbrace{0}_{\text{Anfangshöhe}}$$

$$a_y = -g$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \sin(\varphi) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t + \underbrace{2.1m}_{\text{Anfangshöhe}}$$

a) Was ist die Abwurf-Geschwindigkeit unter der Annahme eines perfekten Wurfs (Ballmittelpunkt passiert genau in der Korbmitte)? Wie lange braucht der Ball bis zur Korbmitte? Formel für Abwurfgeschwindigkeit:

$$x(t) : v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t = 2.7m \Rightarrow v_0 = \frac{2.7m}{\cos(\varphi) \cdot t}$$

Formel zum t herausfinden:

$$y(t) : -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t + 2.1m = 3.2m$$

x und y nach t und v_0 im TR auflösen:

$$t = 1.13s$$

$$v_0 = 6.95 \frac{m}{s}$$

c) Welche maximale Höhe erreicht der Ball (Referenzpunkt: Ballmitte)?

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2(\varphi) + 2.1m$$

$$h_{\max} = \frac{6.95^2 \frac{m}{s}}{2 \cdot g} \cdot \sin^2(70^\circ) + \underbrace{2.1m}_{\text{Abwurfhöhe}}$$

$$h_{\max} = 4.27m$$

d) In welcher Distanz und Höhe relativ zur Abwurfstelle befindet sich der Ball nach 1.1s?

$$x(1.1) = 6.95 \cdot \cos(70^\circ) \cdot 1.1 = 2.7m$$

$$y(1.1) = -\frac{1}{2}g \cdot 1.1^2 + 6.95 \cdot \sin(70^\circ) \cdot 1.1 = 1.1m$$

5.4.2. Schiefer Wurf mit Schlauch

Ein Schlauch wird so gehalten, dass ein kollimierter Wasserstrahl mit $15 \frac{m}{s}$ unter 55° gegenüber der Horizontalen nach oben spritzt. In 7.0m Entfernung befindet sich eine Wand.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(\varphi)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t + \underbrace{x_0}_{\text{Anfangshöhe}}$$

$$a_y = -g$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \sin(\varphi) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t + \underbrace{x_0}_{\text{Anfangshöhe}}$$

a) Wo befindet sich das Wasser 0.5 s nach Verlassen der Schlauchdüse und welche Geschwindigkeit hat es? Ort:

$$x(0.5) = 15 \frac{m}{s} \cdot \cos(55^\circ) \cdot 0.5s = 4.3m$$

$$y(0.5) = -\frac{1}{2}g \cdot 0.5^2 + 15 \frac{m}{s} \cdot \sin(55^\circ) \cdot 0.5 = 4.9m$$

Geschwindigkeit:

$$v_{x(0.5)} = 15 \frac{m}{s} \cos(55^\circ) = 8.6 \frac{m}{s}$$

$$v_{y(0.5)} = 15 \frac{m}{s} \cdot \sin(55^\circ) - g \cdot t = 7.3 \frac{3}{s}$$

b) Nach welcher Zeit und in welcher Höhe über der Schlauchdüse trifft das Wasser auf die Wand?

$$\underbrace{7m}_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t$$

$$t = \frac{7m}{15 \frac{m}{s} \cdot \cos(55^\circ)} = 0.8s$$

$$y(0.8) = -\frac{1}{2}g \cdot 0.8^2 + 15 \frac{m}{s} \cdot \sin(55^\circ) \cdot 0.8 = 6.7m$$

c) Wie weit (auf der Höhe der Düse) und wie hoch würde das Wasser ohne Wand spritzen?

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) = 21.55m$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \cdot \sin^2(\varphi) = 7.6m$$

5.5. Trägheitsmoment

5.5.1. Herabrollen Stahlkugel

Wie lange braucht eine homogene Stahlkugel zum Herabrollen auf einer 1m langen, schiefen Ebene mit einem Steigungswinkel von $\varphi = 30^\circ$? Die Bewegung beginne aus dem Stillstand und Kugel rollt ohne zu gleiten. Die Kugel erfährt eine konstante Beschleunigung.

Energiebilanz:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$J = \frac{2 \cdot m \cdot R^2}{5}$$

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v = a \cdot t$$

$$h = s \cdot \sin(\varphi)$$

Setzen wir das zusammen, kürzt sich der Radius und die Masse der Kugel heraus.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot v^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right)$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{7 \cdot m \cdot v^2}{10}$$

$$g \cdot h = \frac{7 \cdot v^2}{10}$$

5.5.2. Drehmoment Seiltrommel

An einer Seiltrommel mit einem Durchmesser von 29cm und einem Massenträgheitsmoment von $3.3kgm^2$ hängt eine Masse von 70kg. Welches Drehmoment muss der Motor an der Seiltrommel aufbringen, damit die Last mit einer Beschleunigung von $2 \frac{m}{s^2}$ aufgehoben wird?

Hier müssen wir uns fragen, wo die Kraft des Motors ansetzen wird. Basierend auf der Aufgabenstellung wird wohl die Achse der Seiltrommel rotiert, somit gilt das Drehmoment um eine gegebene Achse ($M = J_A \cdot \alpha$). J_A ist mit $3.3kgm^2$ bereits gegeben. Die Winkelbeschleunigung kann mit $\alpha = \frac{a}{r}$ berechnet werden. a entspricht $2 \frac{m}{s^2}$ und $r = \frac{0.29}{2}$.

Nun soll der Motor auch noch die Masse heben können. Dazu brauchen wir das Drehmoment $M = F \cdot r$. F entspricht hierbei $m \cdot a$, wobei wir a nochmals aufschlüsseln müssen, da einerseits g nach unten zieht, aber wir die Masse mit $2 \frac{m}{s^2}$ hochziehen wollen. Unser finales a ist somit $g + 2 \frac{m}{s^2}$. Stecken wir das alles zusammen erhält man:

$$M_M = J_A \cdot \alpha + F \cdot r$$

$$M_M = 3.3 \cdot \frac{2}{0.145} + 70 \cdot (9.81 + 2) \cdot 0.145$$

$$M_M = 165.389N$$

Es kann auch sein, dass gefragt wird nach der Kraft, welche auf dem Seil wirkt. Die Gleichungen wären:

$$F_{\text{res}} = m \cdot g - s = m \cdot a$$

$$M_{\text{res}} = r \cdot s = J \cdot \frac{a}{r}$$

5.5.3. Raumkapsel

Eine Raumkapsel mit starr befestigten Sonnensegeln soll ausgerichtet werden. Dazu muss sie um den Winkel $\varphi = 180^\circ$ um ihre Längsachse gedreht werden. Dazu wird ein Elektromotor - dessen Drehachse parallel zur Längsachse des Raumschiffs ausgerichtet wird, eingeschaltet.

Das axiale Massenträgheitsmoment des Rotors des Elektromotors ist $J_M = 0.2kg \cdot m^2$.

Welche Winkelgeschwindigkeit ω_R der Raumkapsel stellt sich ein, wenn der Motor mit der Drehfrequenz

3000min⁻¹ rotiert? Die Winkelgeschwindigkeit des Motors ist $\omega_M = 2\pi \frac{3000}{60} = 100\pi$.

Der Drehimpuls muss erhalten bleiben, daher kann man die beiden Formeln für den Rotationsimpuls um eine Achse gleich stellen:

$$J_M \cdot \omega_M = J_R \cdot \omega_R$$

$$\cdot 100\pi = 3 \cdot 10^3 \cdot \omega_R$$

$$\omega_R = 0.021s^{-1}$$