

1. Einführung

1.1. Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0$

Mitternachtsformel:

$$x_{\{1,2\}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2. Formen

1.2.1. Kreis

Umfang C:

$C = \pi \cdot 2r$

Fläche A:

$A = \pi \cdot r^2$

1.2.2. Dreieck

Umfang C:

$C = a + b + c$

Fläche A:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$

Pythagoras:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.2.3. Kugel

Volumen V:

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Oberfläche A:

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

1.3. Trigonometrie

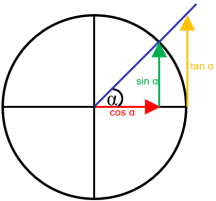
a = Ankathete

g = Gegenkathete

h = Hypothenuse

$\sin(a) = \frac{g}{h}, \cos(a) = \frac{a}{h}, \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$

$g = h \cdot \sin(a), h = \frac{g}{\sin(a)}, a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$



1.4. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.5. Ableitung

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

1.6. Integration

Funktion	Ableitung
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

m1 = Massepunkt 1

m2 = Massepunkt 2

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Fallbeschleunigung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_E = 6378 \text{ km}$$

$$g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

2.2. Reibung

Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$$F_G = -F_N$$

Gleitreibungskraft:

F_N = Gleitreibung

μ_G = Gleitreibungskoeffizient

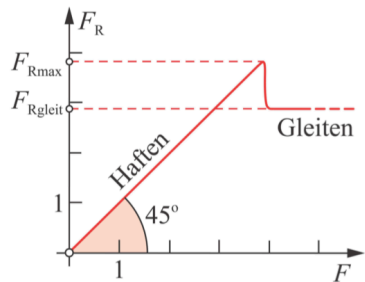
$$F_R = \mu_G \cdot F_N$$

Haftreibungskraft:

F_N = Gleitreibung

μ_H = Haftreibungskoeffizient

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

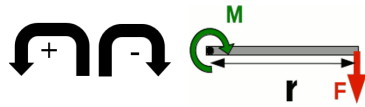


2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M (a = Hebellänge):

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2 ,

F = Kraft senkrecht zur Fläche N ,

E = Elastizitätsmodul Nm^{-2} ,

μ = Poissonzahl (< 0.5),

G = Schubmodul

p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ :

$$\sigma := \frac{F_{\perp}}{A} = -p$$

$$\sigma \cdot E = \frac{F}{A}$$

Druckspannung p:

$$p = \frac{F}{A} = -\sigma$$

Hook'sche Gesetz

(relative Änderung [0-1]):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung Δl :

$$\Delta l = l \frac{F}{A}$$

Dehnung ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Schubspannung τ :

$$\tau := \frac{F_{\parallel}}{A}$$

Scherwinkel:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε_q (d = Ursprungsdicke,
 Δd = Dickenänderung):

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression (Δp = Druckänderung):

κ = Kompressibilität

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante

φ = Winkel der Drehung

G = Schubmodul

l = Länge der Torsionsfeder

r = Radius der Torsionsfeder

Drehmoment Torsionsfeder:

$$M = c \cdot \varphi$$

Federkonstante:

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \rightarrow 2l \Rightarrow \varphi \rightarrow 2\varphi$$

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{16}$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante

n = Windungszahl

R = Windungsradius

r = Drahtdurchmesser

x = Auslenkung

$$k = \frac{G r^4}{4 n R^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4 n R^3 \cdot F}{G r^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{16}$$

$$R \rightarrow 2R \Rightarrow x \rightarrow 8x$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattefeder

b = Breite Material

h = Höhe Material

l = Länge Material

p = Dichte des Materials

E = Elastizitätsmodul

z = Auslenkung

Durchbiegung am Ende:

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Durchbiegung in der Mitte:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Lineare Bewegung

3.2.1. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke (m)

v = Geschwindigkeit (frac(m,s))

t = Zeit (s)

Ort:

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 = \text{konstant}$$

Beschleunigung:

$$a(t) = 0$$

Anderes:

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

3.2.2. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

a = Beschleunigung ($\frac{m}{s^2}$)

v = Geschwindigkeit ($\frac{m}{s}$)

t = Zeit (s)

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

Was häufiger antreffen sind, sind Aufgaben im Stil von Gesamtzeit 10s, ein Teil beschleunigt, ein Teil konstante Geschwindigkeit, Gesamtstrecke 100m.

$$x = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

$$v_0 = a \cdot t_0$$

Ohne Anfangswerte:

x = Ort

v = Geschwindigkeit

a = Beschleunigung

$$x = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2ax}$$

$$a = \frac{v^2}{2x}$$

Mit Anfangswerte:

x = Ort

v = Geschwindigkeit

a = Beschleunigung

x_0 = Anfangsort

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + x_0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot (x - x_0)}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot (x - x_0)}$$

Idk what this is for:

$$a = \frac{1}{2} \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

3.3. Beliebige Bewegungen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

3.3.1. Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a} := \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$a_{\text{tangential}} = \lim \frac{\Delta v_{\text{tangential}}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \lim \frac{\Delta v_{\text{radial}}}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

3.3.2. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v_{\text{tangential}(t)} = v_0 = \text{konstant}$$

$$s(t) = v_0 t + s_0$$

3.3.3. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$a_{\text{tangential}} = a_0 \neq 0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

3.4. Kreisbewegung

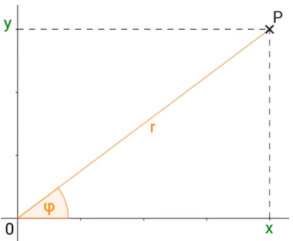
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Polar} \rightarrow \text{Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ \tan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch} \rightarrow \text{Polar}}$$



3.4.1. Winkelgeschwindigkeit

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)

f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)

r = Radius

s = Strecke

φ = Winkel

ω = Winkelgeschwindigkeit

Winkel φ :

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega \cdot r$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\varphi \cdot r}{T} = r \cdot \omega$$

Drehfrequenz f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Umlaufzeit T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Periode:

$$\omega = 2\pi f$$

3.4.2. Winkelbeschleunigung

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d}{dt} \omega = \dot{\omega} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{d}{dt} r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

3.4.3. Gleichförmige Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis

φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel

$$a = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a = \alpha \cdot r = 0$$

$$v = \omega_0 \cdot r = \text{konstant} = v_0$$

$$s = \omega_0 r t + \varphi_0 r$$

3.4.4. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis

φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$a = a_0 = \text{konstant}$$

$$\omega = a_0 t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Ohne Anfangswerte:

φ = Winkel

ω = Winkelgeschwindigkeit

a = Winkelbeschleunigung

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2a}$$

$$\omega = \sqrt{2a\varphi}$$

$$a = \frac{\omega^2}{2\varphi}$$

Mit Anfangswerte:

φ = Winkel

ω = Winkelgeschwindigkeit

a = Winkelbeschleunigung

φ_0 = Anfangswinkel ω_0 = Anfangs-
geschwindigkeit

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a} + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{w_0^2 + 2a \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

$$a = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

3.5. Wurfbahnen

3.5.1. Senkrechter Wurf

Maximalhöhe erreicht, wenn die Geschwindigkeit 0 ist.

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + v_0 (v_0 < 0 = \text{nach unten werfen})$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

3.5.2. Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + x_0$$

3.5.3. Horizontaler Wurf

$$a_{x(t)} = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0$$

$$x(t) = v_0t$$

$$a_{y(t)} = -g = \text{konstant}$$

$$v_{y(t)} = -gt + \underbrace{v_0}_0$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt + y_0$$

Wurfhöhe:

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Steigzeit t:

v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$t = \frac{v_0}{g}$$

3.5.4. Schiefer Wurf

Wurfweite maximiert bei Abwurfwinkel von 45°.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$$

Bahnkurve y(x):

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz:

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe:

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe:

$$X_{\text{max}} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik

Gewichtskraft:

F_G = Kraft

m = Masse

$$F_G = m \cdot g$$

4.1. Reibungskräfte

μ_{Gleit} = Gleitreibungskoeffizient

μ_{Roll} = Rollreibungskoeffizient

F_N = Normalkraft

Gleitreibung:

$$F_{\text{Gleit, R}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$$

Rollreibung:

$$F_{\text{Roll, R}} = \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N$$

Rollreibungslänge e:

$$e = \frac{r \cdot F_{\text{Reibung}}}{F_N} = r \cdot \mu_R$$

4.2. Arbeit und Energie

Einheit von W : $1J = 1Nm$

s = Strecke

Arbeit W :

$$W = F_s \cdot s$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potentielle Energie E_{pot} :

m = Masse

h = Höhe ab Referenz

$$E_{\text{pot}} = F_G \cdot h = \underbrace{m \cdot g}_{F_G} \cdot h$$

Elastische Energie E_{ela} :

k = Federkonstante

x = Verschiebung

$$E_{\text{ela}} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Kinetische Energie E_{kin} :

m = Masse

v = Geschwindigkeit

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

Totale Energie E_{tot} :

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

Verschiebungsarbeit:

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} a t^2\right) = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltungssatz:

$$W = F_G \cdot h = mgh = mg \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$$

4.3. Leitung / Wirkungsgrad

Einheit von P : $1W = 1 \frac{J}{s}$

Leistung P :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Watt W :

$$1W = 1 \frac{J}{s}$$

Wirkungsgrad η :

P_{ab} = Abgeführte Leistung

P_{zu} Zuführte Leistung

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

4.4. Impuls / Impulserhaltung

Impuls \vec{p} :

m = Masse

v = Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newtonsches Gesetz umschreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

4.5. Stöße

4.5.1. Elastischer Stoss

Wenn sich hier zwei Körper aufeinander zu bewegen, muss die Geschwindigkeit des Körpers, welcher von rechts nach links geht, negativ sein.

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss

v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss

v'_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 nach Stoss

Stoss

v'_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 nach Stoss

m_1 = Masse von Körper 1

m_2 = Masse von Körper 2

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v'_2 = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

4.5.2. Total inelastischer Stoss

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss

v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss

m_1 = Masse von Körper 1

m_2 = Masse von Körper 2

v' = Gemeinsame Geschwindigkeit nach Stoss

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

4.5.3. Deformationsarbeit

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss

v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss

m_1 = Masse von Körper 1

m_2 = Masse von Körper 2

μ = Reduzierte Masse

Relativgeschwindigkeit v_{rel} :

$$v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$$

Reduzierte Masse μ :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Deformationsarbeit Q :

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

oder vereinfacht:

$$Q = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{O} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2)$$

$$\vec{O} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{P}_{\text{tot}}$$

Impulssatz:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Energiesatz total elastisch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

4.6. Rakete

Endgeschwindigkeit in Erdferne ($g = 0$):

u = Ausstoßgeschwindigkeit

m = Verbleibende Masse

$$v_m = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + v_0$$

Geschwindigkeit nach Flugzeit t in

Erdnähe ($g \neq 0$): m_0 = Startmasse

m° = Ausgestossene Masse pro

Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit u =

Ausstoßgeschwindigkeit

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m^\circ t}\right) - g \cdot t + v_0$$

Steighöhe nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$):

m_0 = Startmasse m° = Ausgestossene

Masse pro Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit

u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$h(t) = u \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{u^\circ}{m^\circ} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m^\circ t}\right) \cdot (m_0 - m^\circ t)$$

Mit Brenndauer:

m_0 = Startmasse m° = Ausgestossene

Masse pro Zeit m = Verbleibende Masse

$$t = \frac{m_0 - m}{m^\circ}$$

Kepler Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht

2. Der Fahrstrahl eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der Halbachsen der Planeten.

4.6.1. Gravitation

$$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$m_E = 5.96 \cdot 10^{24} kg = \text{Erdmasse}$$

m = Beliebige Masse

r_E = Abstand der Masse m von der Erde

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m_e \cdot m}{r_E}$$

Fluchtgeschwindigkeit V_F :

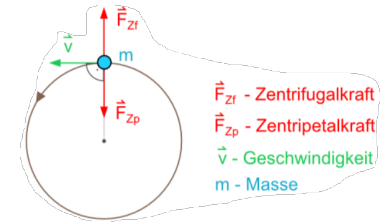
$$V_F = \sqrt{2 \frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 11.15 \frac{km}{s}$$

Minimale Kreisbahngeschwindigkeit

V_K :

$$V_K = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 7.89 \frac{km}{s}$$

4.7. Zentripetalkraft



Zentrifugalkraft vektoriell:

m = Masse

a_r = Radiale Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{a}_r$$

Zentrifugalkraft:

r = Radius

ω = Winkelgeschwindigkeit

$v = \omega \cdot r$ = Umfangsgeschwindigkeit bei Radius r

$$F_Z = m \cdot a_r$$

$$F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Zentripetalbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Corioliskraft (Betrag):

v_r = Radiale Geschwindigkeit

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_r \cdot \omega$$

Tangentielle Coriolisbeschleunigung:

v_r = Radiale Geschwindigkeit

ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

Rotationsarbeit:
 v_r = Radiale Geschwindigkeit
 ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

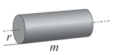

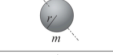
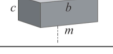
4.8. Drehbewegung

Drehmoment M um eine vorgegebene Achse A:
 M = Betrag des Drehmoments um Achse A
 a = Winkelbeschleunigung um Achse A
 J = Trägheitsmoment bzgl. der Achse A

$$M = J_A \cdot a$$

Trägheitsmoment J einer Punkt-Masse m_0 :
 m_0 = Punktmasse r = Abstand der Punktmasse von der Achse A

$$J = m_0 \cdot r_A^2$$

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m (r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5} m r^2$
Quader		$\frac{m (a^2 + b^2)}{12}$

4.8.1. Satz von Steiner

Trägheitsmoment J_A bzgl. einer Achse A berechnet aus Schwerpunkts-Trägheitsmoment J_{SP}
 J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
 J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt
 R_A = Abstand der Achse A vom Schwerpunkt SP
 m = Masse

$$J_A = J_{SP} + m \cdot R_A^2$$

Trägheitsmoment J_B bzgl. einer Achse B berechnet aus Trägheitsmoment J_A bzgl. Achse A

J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
 J_B = Trägheitsmoment bzgl. Achse B
 R_{AB} = Abstand der parallelen Achse A und B
 m = Masse

$$J_B = J_A + m \cdot R_{AB}^2$$

4.9. Drehstuff

Rotationsleistung P:
 M = Drehmoment
 ω = Winkelgeschwindigkeit

$$P = M \cdot \omega$$

Totale Energie E_{tot} :
 E_{tra} = Translationsenergie E_{rot} = Rotationsenergie

$$E_{tot} = E_{tra} + E_{rot}$$

Rotationsenergie E_{rot} :
 J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt ω = Winkelgeschwindigkeit

$$E_{rot} = \frac{J_{SP} \cdot \omega^2}{2}$$

Translationsenergie E_{tra} :
 m = Masse v_{SP} = Schwerpunkts-geschwindigkeit

$$E_{tra} = \frac{m \cdot v_{SP}^2}{2}$$

Drehimpuls L bei Rotation um eine Achse A:
 J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A ω = Winkelgeschwindigkeit

$$L = J_A \cdot \omega$$

Kreisel:
 Ω = Präzessions-Winkelgeschwindigkeit
 r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
 m = Masse
 J = Trägheitsmoment
 ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{M}{L_r}$$

$$\Omega = \frac{r_{OS} \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega}$$

Betrag des Drehmoments durch Gewichtskraft:
 $M = |\overline{M}|$ = Betrag des Drehmoment r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt

m = Masse
 β = Kegelwinkel der Präzession

$$M = r_{OS} \cdot m \cdot g \cdot \sin(\beta)$$

Radialer Drehimpuls:
 L_r = Radialkomponente des Drehimpuls
 $L = J \cdot \omega$ = Totaler Drehimpuls
 β = Kegelwinkel der Präzession

$$L_r = L \cdot \sin(\beta) = J \cdot \omega \cdot \sin(\beta)$$