1. Einführung

1.1. Trigonometrie

GAGA
HHAG
SCT

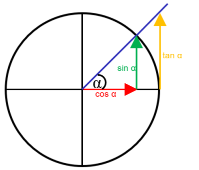
$$a = \text{Ankathete}$$

$$g = \text{Gegenkathete}$$

$$h = \text{Hypothenuse}$$

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \ h = \frac{g}{\sin(a)}, \ a = \arcsin(\tfrac{g}{h})$$



1.2. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.3. Ableitung

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{\text{kgs}^2}$$

Fallbeschleunigung g:
$m_E = 5.972 \cdot 10^{24}$ kg, $r_E = 6378$ km

$$g = 9.81\frac{m}{s^2}$$

2.2. Reibung

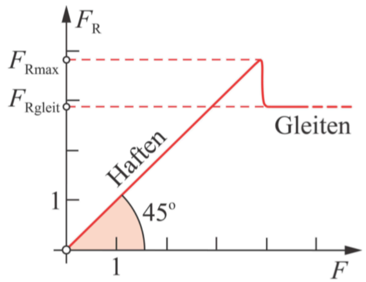
Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$$F_G = -F_N$$

Haft-/Gleitreibungskraft:

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

$$F_{\text{Gleit}} \approx \mu_H \cdot F_N$$

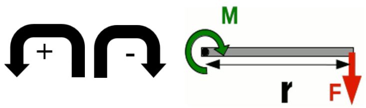


2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M (a = Hebellänge):

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2,
F = Kraft senkrecht zur Fläche N,
E = Elastizitätsmodul Nm^{-2},
μ = Poissonzahl (< 0.5),
G = Schubmodul
p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ:

$$\sigma := \frac{F_\perp}{A} = -p$$

Hook'sche Gesetz
(relative Änderung [0-1]):

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung $\triangle l$:

$$\triangle l = l\frac{F}{A}$$

Dehnung ε:

$$\varepsilon = \frac{\triangle l}{l}$$

Schubspannung τ:

$$\tau := \frac{F_\parallel}{A}$$

Scherwinkel:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε_q (d = Urprungsdicke, $\triangle d$ = Dickeänderung):

$$\varepsilon_q = \frac{\triangle d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression ($\triangle p$ = Druckänderung):
κ = Kompressibilität

$$\frac{\triangle V}{V} = -\kappa \cdot \triangle p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante
φ = Winkel der Drehung
G = Schubmodul
l = Länge der Torsionsfeder
r = Radius der Torsionsfeder

$$M = c \cdot \varphi$$

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \to 2l \Rightarrow \varphi \to 2\varphi$$

$$r \to 2r \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{16}$$

$$E \to 2E \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante
n = Windungszahl
R = Windungsradius
r = Drahtdurchmesser
x = Auslenkung

$$k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4nR^3 \cdot F}{Gr^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \to 2r \Rightarrow x \to \frac{x}{16}$$

$$R \to 2R \Rightarrow x \to 8x$$

$$E \to 2E \Rightarrow x \to \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattfeder

b = Breite Material
h = Höhe Material
l = Länge Material
p = Dichte des Materials
E = Elastizitätsmodul
z = Auslenkung

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Maximale Durchbiegung:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{d}{dt}x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{v(t) - v(t - \triangle t)}{\triangle t} = \frac{d}{dt}v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Lineare Bewegung

3.2.1. Gleichförmige Bewegung

Eine gleichförmige Bewegung ist eine Bewegung, bei der die Beschleunigung 0 ist.

$$a(t) = 0$$

Geschwindigkeit durch Integration:

$$v(t)=v_0=\text{konstant}$$

Ort durch Integration:

$$x(t)=v_0\cdot t+x_0$$

3.2.2. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

Bei einer gleichmässig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant.

$$a(t)=a_0=\text{konstant}$$

$$v(t)=a_0t+v_0$$

$$x(t)=\frac{1}{2}a_0t^2+v_0t+x_0$$

3.3. Beliebige Bewegungen

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v}=\frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t}$$

$$\triangle\vec{r}=\vec{r}(t+\triangle t)\vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t):=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\vec{r}}{\triangle t}=\frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

3.3.1. Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a}=\frac{\triangle\vec{v}}{\triangle t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a}:=\frac{d}{dt}\vec{v}=\dot{\vec{v}}=\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}=\ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\vec{v}(t)-\vec{v}(t-\triangle t)}{\triangle t}$$

$$a_{\text{tangential}}=\lim\frac{\triangle v_{\text{tangential}}}{\triangle t}=\frac{d}{dt}v=\dot{v}$$

$$a_{\text{radial}}=\lim\frac{\triangle v_{\text{radial}}}{\triangle t}=\frac{v^2}{r}$$

3.3.2. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}}=0$$

$$v_{\text{tangential}(t)}=v_0=\text{konstant}$$

$$s(t)=v_0t+s_0$$

3.3.3. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$a_{\text{tangential}}=a_0\neq 0$$

$$v(t)=a_0t+v_0$$

$$s(t)=\frac{1}{2}a_0t^2+v_0t+s_0$$

3.4. Kreisbewegung

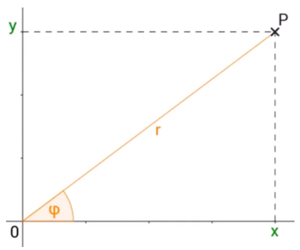
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P}=\binom{x}{y}=\underbrace{\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\\r\cdot\sin(\varphi)\end{pmatrix}}_{\text{Polar -> Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P}=\binom{r}{\varphi}=\underbrace{\begin{pmatrix}|\sqrt{x^2+y^2}|\\\tan(\frac{y}{x})\end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch -> Polar}}$$



3.4.1. Winkelgeschwindigkeit

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)
f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)
r = Radius
s = Strecke
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi=\frac{s}{r}$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v=\frac{s}{T}=\frac{\varphi\cdot r}{T}=r\cdot\omega$$

Drehfrequenz f:

$$f=\frac{1}{T}$$

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

Periode:

$$\omega=2\pi f$$

3.4.2. Winkelbeschleunigung

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha=\frac{d}{dt}\omega=\dot{w}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}r\cdot\omega=r\cdot\alpha$$

3.4.3. Gleichförmige Kreisbewegung

$$a=0$$

$$\omega=\omega_0=\text{konstant}$$

$$\varphi(t)=\omega_0t+\varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a=\alpha\cdot r=0$$

$$v=w_0\cdot r=\text{konstant}=v_0$$

$$s=w_0rt+\varphi_0r$$

3.4.4. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

$$a=a_0=\text{konstant}$$

$$\omega=a_0t+\omega_0$$

$$\varphi=\frac{1}{2}a_0t^2+\omega_0t+\varphi_0$$

3.5. Wurfbahnen

3.5.1. Senkrechter Wurf

$$a(t)=-g=\text{konstant}$$

$$v(t)=-gt+v_0(v_0<0=\text{nach unten werfen})$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0$$

3.5.2. Freier Fall

$$a(t)=-g=\text{konstant}$$

$$v(t)=-gt+0$$

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+x_0$$

3.5.3. Horizontaler Wurf

$$a_{x(t)}=0$$

$$v_{x(t)}=v_0$$

$$x(t)=v_0t$$

$$a_{y(t)}=-g=\text{konstant}$$

$$v_{y(t)}=-gt+\underbrace{v_0}_{0}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}gt+y_0$$

3.5.4. Schiefer Wurf

$$a_x=0$$

$$v_{x(t)}=v_0\cdot\cos(a)$$

$$x(t)=v_0\cdot\cos(a)\cdot t+x_0$$

$$a_y=-g$$

$$v_{y(t)}=v_0\cdot\sin(a)-g\cdot t$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}g\cdot t^2+v_0\cdot\sin(a)\cdot t+y_0$$

Bahnkurve y(x):

$$y(x)=\tan(a)\cdot x-\frac{g}{2\cdot v_0^2\cdot\cos(a)^2}\cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t)=v_0\cdot\cos(a)\cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t)=v_0\cdot t\cdot\sin(a)-\frac{g\cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz:

$$d=\frac{v_0^2}{g}\cdot\sin(2\cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe:

$$h_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe:

$$X_{\max}=\frac{V_0^2}{g}\cdot\sin(a)^2\cdot\cos(a)=\frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit:

$$v_x=v_0\cdot\cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y=v_0\cdot\sin(a)-g\cdot t$$

4. Dynamik