

1. Einführung

1.1. Trigonometrie

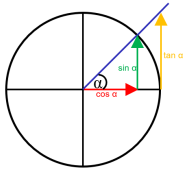
a = Ankathete

g = Gegenkathete

h = Hypotenuse

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \quad h = \frac{g}{\sin(a)}, \quad a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$$



1.2. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Fallbeschleunigung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad r_E = 6378 \text{ km}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

2.2. Reibung

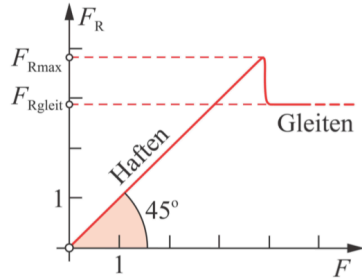
Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$$F_G = -F_N$$

Haft-/Gleitreibungskraft:

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

$$F_{\text{Gleit}} \approx \mu_H \cdot F_N$$



2.3. Drehmoment

Drehmoment M (a = Hebellänge):

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2 ,

F = Kraft senkrecht zur Fläche N ,

E = Elastizitätsmodul $N\text{m}^{-2}$,

μ = Poissonzahl (< 0.5),

G = Schubmodul

p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ :

$$\sigma := \frac{F_{\perp}}{A} = -p$$

Hook'sche Gesetz

(relative Änderung [0-1]):

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

2.4.2. Dehnung

Dehnung (Δl = Verlängerung):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Schubspannung τ :

$$\tau := \frac{F_{\parallel}}{A}$$

Scherwinkel:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε_q (d = Ursprungsdicke,
 Δd = Dickenänderung):

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression (Δp = Druckänderung):

κ = Kompressibilität

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante

φ = Winkel der Drehung

G = Schubmodul

l = Länge der Torsionsfeder

r = Radius der Torsionsfeder

$$M = c \cdot \varphi$$

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \rightarrow 2l \Rightarrow \varphi \rightarrow 2\varphi$$

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{16}$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante

n = Windungszahl

R = Windungsradius

r = Drahtdurchmesser

x = Auslenkung

$$k = \frac{G r^4}{4n R^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4n R^3 \cdot F}{G r^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{16}$$

$$R \rightarrow 2R \Rightarrow x \rightarrow 8x$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattefeder

b = Breite Material

h = Höhe Material

l = Länge Material

p = Dichte des Materials

E = Elastizitätsmodul

z = Auslenkung

$$z = \frac{4l^3}{E b h^3}$$

Maximale Durchbiegung:

$$z = \frac{5p g l^4}{32 E h^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Beschleunigung:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Schiefer Wurf

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$$

Bahnkurve y(x):

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz:

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe:

$$X_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik