1. Einführung

1.1. Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Mitternachtsformel:

$$x_{\{1,2\}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2. Formen

1.2.1. Kreis

Umfang C:

$$C = \pi \cdot 2r$$

Fläche A:

$$A = \pi \cdot r^2$$

1.2.2. Dreieck

Umfang C:

$$C = a + b + c$$

Fläche A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.2.3. Kugel

Volumen V:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche A:

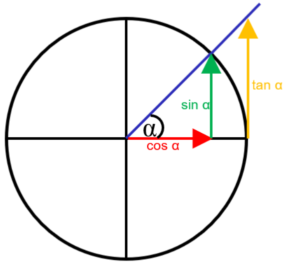
$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

1.3. Trigonometrie

a = Ankathete
g = Gegenkathete
h = Hypothenuse

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \; h = \tfrac{g}{\sin(a)}, \; a = \arcsin\left(\tfrac{g}{h}\right)$$



1.4. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

1.5. Ableitung

Funktion	Ableitung
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(2)^x}$

1.6. Integration

Funktion	Ableitung
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$

2. Statik

2.1. Schwerkraft

m1 = Massepunkt 1
m2 = Massepunkt 2

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Fallbeschleuningung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_E = 6378 \text{ km}$$

$$g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

2.2. Reibung

Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

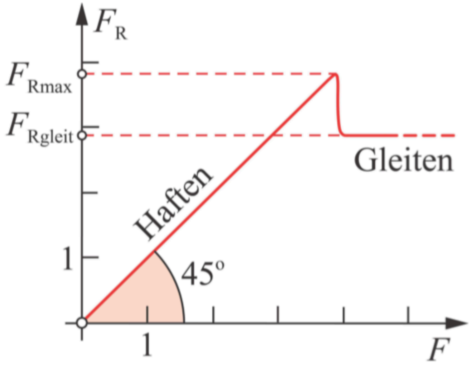
$$F_G = -F_N$$

Gleitreibungskraft:
F_N = Gleitreibung
μ_G = Gleitreibungskoeffizient

$$F_R = \mu_G \cdot F_N$$

Haftreibungskraft:
F_N = Gleitreibung
μ_H = Haftreibungskoeffizient

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

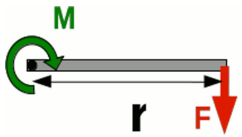


2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M:
a = Hebellänge

$$M = a \cdot F$$



2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m^2,
F = Kraft senkrecht zur Fläche N,
E = Elastizitätsmodul Nm^{-2},
μ = Poissonzahl (< 0.5),
G = Schubmodul
p = Druckspannung

2.4.1. Spannung

Zugspannung σ:

$$\sigma := \frac{F_\perp}{A} = -p$$

$$\sigma \cdot E = \frac{F}{A}$$

Druckspannung p:

$$p = \frac{F}{A} = -\sigma$$

Hook'sche Gesetz
Relative Änderung [0-1]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung $\triangle l$:

$$\triangle l = l\frac{F}{A}$$

Dehnung ε:

$$\varepsilon = \frac{\triangle l}{l}$$

Schubspannung τ:

$$\tau := \frac{F_\parallel}{A}$$

Scherwinkel γ:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε_q:
d = Urprungsdicke
$\triangle d$ = Dickeänderung

$$\varepsilon_q = \frac{\triangle d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

2.4.3. Kompression

Kompression:
$\triangle p$ = Druckänderung
κ = Kompressibilität

$$\frac{\triangle V}{V} = -\kappa \cdot \triangle p$$

2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

2.5. Beispiele

2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante
φ = Winkel der Drehung
G = Schubmodul
l = Länge der Torsionsfeder
r = Radius der Torsionsfeder

Drehmoment Torsionsfeder:

$$M = c \cdot \varphi$$

Federkonstante:

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \to 2l \Rightarrow \varphi \to 2\varphi$$

$$r \to 2r \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{16}$$

$$E \to 2E \Rightarrow \varphi \to \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante
n = Windungszahl
R = Windungsradius
r = Drahtdurchmesser
x = Auslenkung

$$k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$

$$F = kx$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{4nR^3 \cdot F}{Gr^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \to 2r \Rightarrow x \to \frac{x}{16}$$

$$R \to 2R \Rightarrow x \to 8x$$

$$E \to 2E \Rightarrow x \to \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \to \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird grösser}$$

2.5.3. Plattfeder

b = Breite Material
h = Höhe Material
l = Länge Material
p = Dichte des Materials
E = Elastizitätsmodul
z = Auslenkung

Durchbiegung am Ende:

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Durchbiegung in der Mitte:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. Kinematik

3.1. Bewegung

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle t} = \frac{d}{dt} x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{v(t) - v(t - \triangle t)}{\triangle t} = \frac{d}{dt} v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (Höhe h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. Lineare Bewegung

3.2.1. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke (m)
v = Geschwindigkeit (frac(m,s))
t = Zeit (s)

Ort:

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Geschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 = \text{konstant}$$

Beschleunigung:

$$a(t) = 0$$

Anderes:

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

3.2.2. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

a = Beschleunigung ($\frac{m}{s^2}$)
v = Geschwindigkeit ($\frac{m}{s}$)
t = Zeit (s)

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

Was häufiger antreffen sind, sind Aufgaben im Stil von Gesamtzeit 10s, ein Teil beschleunigt, ein Teil konstante Geschwindigkeit, Gesamtstrecke 100m.

$$x = \frac{1}{2} a_0 t_0^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

$$v_0 = a \cdot t_0$$

Ohne Anfangswerte:

x = Ort
v = Geschwindigkeit
a = Beschleunigung

$$x = \frac{v^2}{2a}$$

$$v = \sqrt{2ax}$$

$$a = \frac{v^2}{2x}$$

Mit Anfangswerte:

x = Ort
v = Geschwindigkeit
a = Beschleunigung
x_0 = Anfangsort
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} + x_0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot (x - x_0)}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot (x - x_0)}$$

Idk what this is for:

$$a = \frac{1}{2} \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

3.3. Beliebige Bewegungen

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}$$

$$\triangle \vec{r} = \vec{r}(t + \triangle t) \vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{r}}{\triangle t} = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$$

3.3.1. Beschleunigung

Mittlere Beschleunigung:

$$\bar{a} = \frac{\triangle \vec{v}}{\triangle t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a} := \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \triangle t)}{\triangle t}$$

$$a_{\text{tangential}} = \lim \frac{\triangle v_{\text{tangential}}}{\triangle t} = \frac{d}{dt} v = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \lim \frac{\triangle v_{\text{radial}}}{\triangle t} = \frac{v^2}{r}$$

3.3.2. Gleichförmige Bewegung

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v_{\text{tangential}(t)} = v_0 = \text{konstant}$$

$$s(t) = v_0 t + s_0$$

3.3.3. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$a_{\text{tangential}} = a_0 \neq 0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

3.4. Kreisbewegung

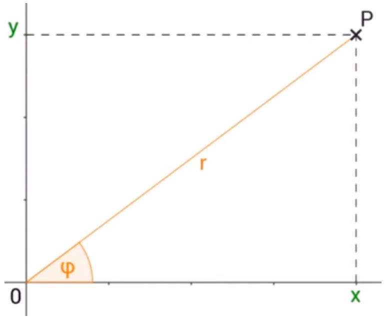
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Polar -> Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ \tan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch -> Polar}}$$



3.4.1. Winkelgeschwindigkeit

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)
f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)
r = Radius
s = Strecke
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit

Winkel φ:

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$v = \omega \cdot r$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\varphi \cdot r}{T} = r \cdot \omega$$

Drehfrequenz f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Umlaufzeit T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

Periode:

$$\omega = 2\pi f$$

3.4.2. Winkelbeschleunigung

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d}{dt}\omega = \dot{w} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{d}{dt}r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

3.4.3. Gleichförmige Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis
φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel

$$a = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a = \alpha \cdot r = 0$$

$$v = w_0 \cdot r = \text{konstant} = v_0$$

$$s = w_0 r t + \varphi_0 r$$

3.4.4. Gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

φ = Zurückgelegte Strecke auf Einheitskreis
φ_0 = Anfangswinkel ω = Pro Zeit Zurückgelegter Winkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$a = a_0 = \text{konstant}$$

$$\omega = a_0 t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

Ohne Anfangswerte:
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit
a = Winkelbeschleunigung

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2a}$$

$$\omega = \sqrt{2a\varphi}$$

$$a = \frac{\omega^2}{2\varphi}$$

Mit Anfangswerte:
φ = Winkel
ω = Winkelgeschwindigkeit
a = Winkelbeschleunigung
φ_0 = Anfangswinkel ω_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2a} + \varphi_0$$

$$\omega = \sqrt{w_0^2 + 2a \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

$$a = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot (\varphi - \varphi_0)}$$

3.5. Wurfbahnen

3.5.1. Senkrechter Wurf

Maximalhöhe erreicht, wenn die Geschwindigkeit 0 ist.

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + v_0(v_0 < 0 = \text{nach unten werfen})$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

3.5.2. Freier Fall

$$a(t) = -g = \text{konstant}$$

$$v(t) = -gt + 0$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + x_0$$

3.5.3. Horizontaler Wurf

$$a_{x(t)} = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0$$

$$x(t) = v_0 t$$

$$a_{y(t)} = -g = \text{konstant}$$

$$v_{y(t)} = -gt + \underbrace{v_0}_{0}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt + y_0$$

Wurfhöhe:
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Steigzeit t:
v_0 = Anfangsgeschwindigkeit

$$t = \frac{v_0}{g}$$

3.5.4. Schiefer Wurf

Wurfweite maximiert bei Abwurfwinkel von 45°.

$$a_x = 0$$

$$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$$

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$$

$$a_y = -g$$

$$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$$

Bahnkurve $y(x)$:

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz d:

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe $h_{\max}$:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe $X_{\max}$:

$$X_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit v_x:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

4. Dynamik

Gewichtskraft:
F_G = Kraft
m = Masse

$$F_G = m \cdot g$$

4.1. Reibungskräfte

μ_{Gleit} = Gleitreibungskoeffizient
μ_{Roll} = Rollreibungskoeffizient
F_N = Normalkraft

Gleitreibung:

$$F_{\text{Gleit, R}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$$

Rollreibung:

$$F_{\text{Roll, R}} = \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N$$

Rollreibungslänge e:

$$e = \frac{r \cdot F_{\text{Reibung}}}{F_N} = r \cdot \mu_R$$

4.2. Arbeit und Energie

Einheit von $W: 1J = 1Nm$
s = Strecke

Arbeit W:

$$W = F_s \cdot s$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potentielle Energie E_{pot}:
m = Masse
h = Höhe ab Referenz

$$E_{\text{pot}} = F_G \cdot h = \underbrace{m \cdot g}_{F_G} \cdot h$$

Elastische Energie E_{ela}:
k = Federkonstante
x = Verschiebung

$$E_{\text{ela}} = \frac{1}{2} k x_0^2$$

Kinetische Energie E_{kin}:
m = Masse
v = Geschwindigkeit

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

Totale Energie E_{tot}:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

Verschiebungsarbeit:

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} a t^2\right) = \frac{1}{2} m v^2$$

Energieerhaltungssatz:

$$W = F_G \cdot h = mgh = mg\frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$$

4.3. Leitung / Wirkungsgrad

Einheit von $P: 1W = 1\frac{J}{s}$
Leistung P:

$$P = \frac{\triangle W}{\triangle t} = \frac{F \cdot \triangle s}{\triangle t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Watt W:

$$1W = 1\frac{J}{s}$$

Wirkungsgrad η:
P_{ab} = Abgeführte Leistung
P_{zu} Zugeführte Leistung

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

4.4. Impuls / Impulserhaltung

Impuls $\vec{p}$:
m = Masse
v = Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

2. Newtonsches Gesetz umschreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

4.5. Stösse

4.5.1. Elastischer Stoss

Wenn sich hier zwei Körper aufeinander zu bewegen, muss die Geschwindigkeit des Körpers, welcher von rechts nach links geht, negativ sein.

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
v_1' = Geschwindigkeit von Körper 1 nach Stoss
v_2' = Geschwindigkeit von Körper 2 nach Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

$$v_2' = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

4.5.2. Total inelastischer Stoss

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2
v' = Gemeinsame Geschwindigkeit nach Stoss

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

4.5.3. Deformationsarbeit

v_1 = Geschwindigkeit von Körper 1 vor Stoss
v_2 = Geschwindigkeit von Körper 2 vor Stoss
m_1 = Masse von Körper 1
m_2 = Masse von Körper 2
μ = Reduzierte Masse

Relativgeschwindigkeit v_{rel}:

$$v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$$

Reduzierte Masse μ:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Deformationsarbeit Q:

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

oder vereinfacht:

$$Q = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}^2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{O} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \dot{\vec{r}_1} + m_2 \dot{\vec{r}_2}\right)$$

$$\vec{O} = m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = \vec{P}_{\text{tot}}$$

Impulssatz:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} \Leftrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Energiesatz total elastisch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 {v_1'}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2'}^2$$

4.6. Rakete

Endgeschwindigkeit in Erdferne ($g = 0$):
u = Ausstoßgeschwindigkeit
m = Verbleibende Masse

$$v_m = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + v_0$$

Geschwindigkeit nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$): m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$v(t) = u \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m° t}\right) - g \cdot t + v_0$$

Steighöhe nach Flugzeit t in Erdnähe ($g \neq 0$):
m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit
v_0 = Startgeschwindigkeit u = Ausstoßgeschwindigkeit

$$h(t) = u \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t - \frac{u}{m}° \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m° \cdot t}\right) \cdot (m_0 - m° \cdot$$

Mit Brenndauer:
m_0 = Startmasse $m°$ = Ausgestossense Masse pro Zeit
m = Verbleibende Masse

$$t = \frac{m_0 - m}{m°}$$

Kepler Gesetze:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht
2. Der Fahrstrahl eines Planeten ¨uberstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der Halbachsen der Planten.

4.6.1. Gravitation

$G = 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
$m_E = 5.96 \cdot 10^{24} kg$ = Erdmasse
m = Beliebige Masse
r_E = Abstand der Masse m von der Erde

$$E_{\text{pot}} = -G \cdot \frac{m_e \cdot m}{r_E}$$

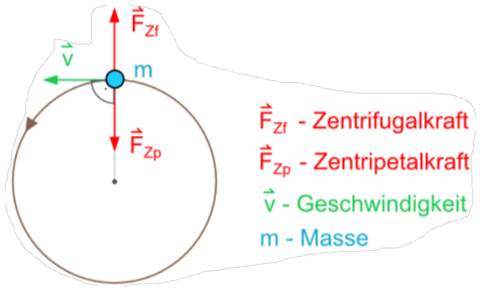
Fluchtgeschwindigkeit V_F:

$$V_F = \sqrt{2\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 11.15 \frac{km}{s}$$

Minimale Kreisbahngeschwindigkeit V_K:

$$V_K = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r_E}} = 7.89 \frac{km}{s}$$

4.7. Zentripetalkraft



Zentrifugalkraft vektoriell:
m = Masse
a_r = Radiale Zentripetalbeschleunigung

$$\vec{F}_Z = -m \cdot \vec{a}_r$$

Zentrifugalkraft:
r = Radius
ω = Winkelgeschwindigkeit
$v = \omega \cdot r$ = Umfangsgeschwindigkeit bei Radius r
$F_Z = m \cdot a_r$ $F_Z = m \cdot \omega^2 \cdot r$ $F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Zentripetalbeschleunigung:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Corioliskraft (Betrag):
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot m \cdot v_r \cdot \omega$$

Tangentielle Coriolisbeschleunigung:
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

Rotationsarbeit:
v_r = Radiale Geschwindigkeit
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$F_C = 2 \cdot v_r \cdot \omega$$

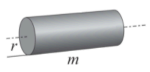
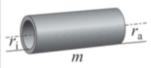
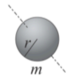
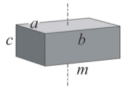
4.8. Drehbewegung

Drehmoment M um eine vorgegebene Achse A:
M = Betrag des Drehmoments um Achse A
a = Winkelbeschleunigung um Achse A
J = Trägheitsmoment bzgl. der Achse A

$$M = J_A \cdot a$$

Trägheitsmoment J einer Punkt-Masse m_0:
m_0 = Punktmasse r = Abstand der Punktmasse von der Achse A

$$J = m_0 \cdot r_A^2$$

Körper		Trägheitsmoment
Vollzylinder		$\frac{m\,r^2}{2}$
Hohlzylinder		$\frac{m\,(r_a^2 + r_i^2)}{2}$
Kugel		$\frac{2}{5} m\,r^2$
Quader		$\frac{m\,(a^2+b^2)}{12}$

4.8.1. Satz von Steiner

Trägheitsmoment J_A bzgl. einer Achse A berechnet aus Schwerpunkts-Trägheitsmoment J_{SP}:
J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt
R_A = Abstand der Achse A vom Schwerpunk SP
m = Masse

$$J_A = J_{SP} + m \cdot R_A^2$$

Trägheitsmoment J_B bzgl. einer Achse B berechnet aus Trägheitsmoment J_A bzgl. Achse A:
J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A
J_B = Trägheitsmoment bzgl. Achse B
R_{AB} = Abstand der parallelen Achse A und B
m = Masse

$$J_B = J_A + m \cdot R_{AB}^2$$

4.9. Drehstuff

Rotationsleistung P:
M = Drehmoment
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$P = M \cdot \omega$$

Totale Energie E_{tot}:
E_{tra} = Translationsenergie E_{rot} = Rotationsenergie

$$E_{tot} = E_{tra} + E_{rot}$$

Rotationsenergie E_{rot}:
J_{SP} = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt ω = Winkelgeschwindigkeit

$$E_{rot} = \frac{J_{SP} \cdot \omega^2}{2}$$

Translationsenergie E_{tra}:
m = Masse v_{SP} = Schwerpunktgeschwindigkeit

$$E_{tra} = \frac{m \cdot v_{SP}^2}{2}$$

Drehimpuls L bei Rotation um eine Achse A:
J_A = Trägheitsmoment bzgl. Achse A ω = Winkelgeschwindigkeit

$$L = J_A \cdot \omega$$

Kreisel:
Ω = Präzessions-Winkelgeschwindigkeit
r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
m = Masse
J = Trägheitsmoment
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{M}{L_r}$$

$$\Omega = \frac{r_{OS} \cdot m \cdot g}{J \cdot \omega}$$

Betrag des Drehmoments durch Gewichtskraft:
$M = |\overline{M}|$ = Betrag des Drehmoment r_{os} = Abstand Drehpunkt zu Schwerpunkt
m = Masse
β = Kegelwinkel der Präzession

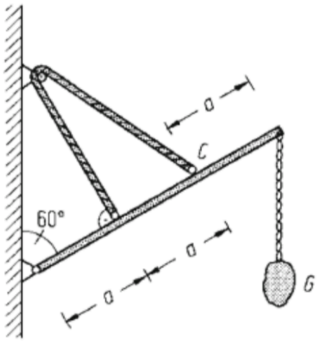
$$M = r_{OS} \cdot m \cdot g \cdot \sin(\beta)$$

Radialer Drehimpuls:
L_r = Radialkomponente des Drehimpuls
$L = J \cdot \omega$ = Totaler Drehimpuls
β = Kegelwinkel der Präzession

$$L_r = L \cdot \sin(\beta) = J \cdot \omega \cdot \sin(\beta)$$

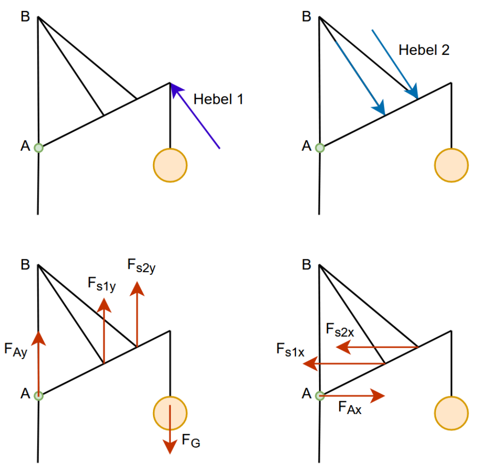
5. Examples

5.1. Drehmoment



Skizze der Krankonstruktion.

Ein Kran hebt einen Stein der Masse $G = 150kg$ wie in der Skizze dargestellt. Der Kranarm ist an Punkt A drehbar gelagert und das Seil ist in Punkt B um eine Umlenkrolle geschleift und am Kranarm fest verbunden. Welcher Kraft F_S ist das Seil ausgesetzt?
Berechnen sie die Kraft, mit welcher das Kranlager an Punkt A auf den Kranarm wirkt, wenn das System im Gleichgewicht ist.



$$M = \text{Hebel } 1 + \text{Hebel } 2 = 0$$

$$F_X = F_{S1} + F_{S2} F_A = 0$$

$$F_Y = F_{S1} + F_{S2} F_A - F_G = 0$$

Einsetzen in Solver:

$$3 \cdot 150kg \cdot 9.81 \cdot \cos(30) - 1 \cdot F_S - 2 \cdot F_S \cdot \cos(30) = 0$$

$$-F_S \cdot \sin(30) - F_S \cdot \sin(60) + F_{\text{Ax}} = 0$$

$$F_S \cdot \cos(30) + F_S \cdot \cos(60) + A_{\text{Ay}} - 150kg \cdot 9.81 = 0$$

5.2. Geschwindigkeit

5.2.1. Tuch wegziehen

Auf einem Tisch steht eine Blumenvase. Wir wollen das Tischtuch wegziehen, ohne dass die Vase herunterfällt.
Das Tuch wird ruckartig auf eine konstante Ohne Anfangswerte Geschwindigkeit v_0 beschleunigt (die für die Beschleunigung benötigte Zeit wird vernachlässigt) und wird dann mit dieser konstanten Geschwindigkeit auf einer Strecke von $60cm$ bewegt. Die Gleitreibung zwischen Vase und Tischtuch hat den Wert $\mu_G = 0.3$. Wie schnell muss daS Tuch bewegt werden, damit sich die Vase in der gleichen Zeit höchstens $5cm$ bewegt.

Zuerst können wir die Zeit durch einige der Grössen ausdrücken:

$$t = \frac{S_T}{v_0}$$

Beschleunigt wird unsere Vase durch die Reibung des durchrutschenden Tischtuches. Dabei können wir sagen, dass die Gesamtkraft für die Beschleunigung der Reibungskraft entsprechen muss.

$$m \cdot a = \mu_G \cdot m \cdot g$$

$$a = \mu_G \cdot g$$

Nun können wir die Strecke des Vase berechnen:

$$t = \frac{S_T}{v_0} S_V = \frac{a_v}{2} \cdot t^2$$

$$t = \frac{0.6}{v_0} 0.05 = \frac{0.3 \cdot 9.81}{2} \cdot t^2$$

$$v = 3.25 \frac{m}{s}$$

5.2.2. Autobahn

Auf einer Autobahn fährt ein Fahrzeug A mit konstanter Geschwindigkeit $v_{A0} = 110 \frac{km}{h}$. In die Autobahn fährt ein Fahrzeug B ein. Zum Zeitpunkt des Einfahren ($t = 0$) hat Fahrzeug B eine Geschwindigkeit $v_{B0} = 110 \frac{km}{h}$ und einen Abstand von Fahrzeug A von $d = 200m$. Welche (konstant angenommene) Beschleunigung aB muss Fahrzeug B haben, wenn ein Mindestabstand der beiden von $d_{\min} = 40m$ eingehalten werden soll?

Überlegung: Der Mindestabstand muss eingehalten werden, wenn beide Fahrzeuge gleich schnell sind. Dieser Mindestabstand muss zum Zeitpunkt tx erreicht sein. Falls A langsamer ist als B, dann vergrössert sich der Abstand, umgekehrt verringert sich der Abstand.
Somit gilt:

$$v_{A0} = v_{B0} + a_B \cdot t_x$$

Ausserdem können wir den Mindestabstand algebraisch ausdrücken. Fahrzeug A bewältigt diese Strecke mit seiner regelmässigen Geschwindigkeit $v_{A0} \cdot tx$. Bei Fahrzeug B ist dies etwas mehr:

$$\text{Beschleunigung: } \frac{a_B}{2} \cdot t_x^2$$

$$\text{Startgeschwindigkeit: } v_{B0} \cdot t_x$$

$$\text{Vorsprung: } 200m$$

Zusammengesetzt:

$$d_{\min} = S_B - S_A$$

$$d_{\min} = \frac{a_B}{2} \cdot t_x^2 + v_{B0} \cdot t_x + d - v_{A0} \cdot t_x$$

$$t_x = 28.8$$

$$a_B = 0.39$$

5.3. Trägheitsmoment

5.3.1. Herabrollen Stahlkugel

Wie lange braucht eine homogene Stahlkugel zum Herabrollen auf einer $1m$ langen, schiefen Ebene mit einem Steigungswinkel von $\varphi = 30°$? Die Bewegung beginne aus dem Stillstand und Kugel rollt ohne zu gleiten. Die Kugel erfährt eine konstante Beschleunigung.
Energiebilanz:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

$$J = \frac{2 \cdot m \cdot R^2}{5}$$

$$s = \frac{a \cdot t^2}{2}$$

$$v = a \cdot t$$

$$h = s \cdot \sin(\varphi)$$

Setzen wir das zusammen, k¨urzt sich der Radius und die Masse der Kugel heraus.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2$$

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot v^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{7 \cdot m \cdot v^2}{10}$$

$$g \cdot h = \frac{7 \cdot v^2}{10}$$

5.3.2. Drehmoment Seiltrommel

An einer Seiltrommel mit einem Durchmesser von $29cm$ und einem Massenträgheitsmoment von $3.3kgm^2$ hängt eine Masse von $70kg$. Welches Drehmoment muss der Motor an der Seiltrommel aufbringen, damit die Last mit einer Beschleunigung von $2 \frac{m}{s^2}$ aufgehoben wird?

Hier müssen wir uns fragen, wo die Kraft des Motors ansetzen wird. Basierend auf der Aufgabenstellung wird wohl die Achse der Seiltrommel rotiert, somit gilt das Drehmoment um eine gegebene Achse ($M = J_A \cdot \alpha$). J_A ist mit $3.3kgm^2$ bereits gegeben. Die Winkelbeschleunigung kann mit $\alpha = \frac{a}{r}$ berechnet werden. a entspricht $2 \frac{m}{s^2}$ und $r = \frac{0.29}{2}$.

Nun soll der Motor auch noch die Masse heben können. Dazu brauchen wir das Drehmoment $M = F \cdot r$. F entspricht hierbei $m \cdot a$, wobei wir a nochmals aufschlüsseln müssen, da einerseits g nach unten zieht, aber wir die Masse mit $2 \frac{m}{s^2}$ hochziehen wollen. Unser finales a ist somit $g + 2 \frac{m}{s^2}$. Stecken wir das alles zusammen erh¨alt man:

$$M_M = J_A \cdot \alpha + F \cdot r$$

$$M_M = 3.3 \cdot \frac{2}{0.145} + 70 \cdot (9.81 + 2) \cdot 0.145$$

$$M_M = 165.389N$$

Es kann auch sein, dass gefragt wird nach der Kraft, welche auf dem Seil wirkt. Die Gleichungen wären:

$$F_{\text{res}} = m \cdot g - s = m \cdot a$$

$$M_{\text{res}} = r \cdot s = J \cdot \frac{a}{r}$$

5.3.3. Raumkapsel

Eine Raumkapsel mit starr befestigten Sonnensegeln soll ausgerichtet werden. Dazu muss sie um den Winkel $\varphi = 180 + {}^\circ$ um ihre Längsachse gedreht werden. Dazu wird ein Elektromotor - dessen Drehachse parallel zur Längsachse des Raumschiffs ausgerichtet wird, eingeschaltet.

Das axiale Massenträgheitsmoment des Rotors des Elektromotors ist $J_M = 0.2kg \cdot m^2$.

Welche Winkelgeschwindigkeit ω_R der Raumkapsel stellt sich ein, wenn der Motor mit der Drehfrequenz $3000min^{-1}$ rotiert? Die Winkelgeschwindigkeit des Motors ist $\omega_M = 2\pi\frac{3000}{60} = 100\pi$.

Der Drehimpuls muss erhalten bleiben, daher kann man die beiden Formeln für den Rotationsimpuls um eine Achse gleich stellen:

$$J_M \cdot \omega_M = J_R \cdot \omega_R$$

$$\cdot 100\pi = 3 \cdot 10^3 \cdot \omega_R$$

$$\omega_R = 0.021s^{-1}$$