

# 1. Einführung

## 1.1. Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Mitternachtsformel:

$$x_{\{1,2\}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 1.2. Formen

### 1.2.1. Kreis

Umfang C:

$$C = \pi \cdot 2r$$

Fläche A:

$$A = \pi \cdot r^2$$

### 1.2.2. Dreieck

Umfang C:

$$C = a + b + c$$

Fläche A:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### 1.2.3. Kugel

Volumen V:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberfläche A:

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

## 1.3. Trigonometrie

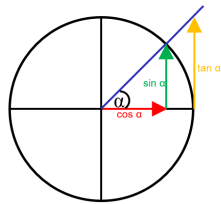
a = Ankathete

g = Gegenkathete

h = Hypotenuse

$$\sin(a) = \frac{g}{h}, \quad \cos(a) = \frac{a}{h}, \quad \tan(a) = \frac{g}{a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$$g = h \cdot \sin(a), \quad h = \frac{g}{\sin(a)}, \quad a = \arcsin\left(\frac{g}{h}\right)$$



## 1.4. Vektor

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

## 1.5. Ableitung

Funktion	Ableitung
$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

## 1.6. Integration

Funktion	Ableitung
$x^a$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + \text{const}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + \text{const}$

# 2. Statik

## 2.1. Schwerkraft

m1 = Massepunkt 1

m2 = Massepunkt 2

Gravitationsgesetz:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Fallbeschleunigung g:

$$m_E = 5.972 \cdot 10^{24} kg$$

$$r_E = 6378 km$$

$$g = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m_E}{r_E^2}$$

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

## 2.2. Reibung

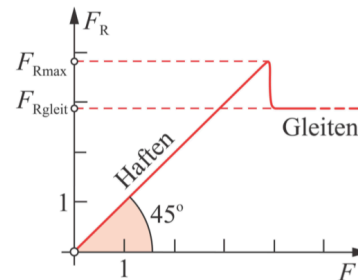
Wenn Körper auf horizontale Fläche liegt:

$$F_G = -F_N$$

Haft-/Gleitreibungskraft:

$$F_R = \mu_H \cdot F_N$$

$$F_{\text{Gleit}} \approx \mu_H \cdot F_N$$



## 2.3. Drehmoment

Linke Hand Regel (Schraubenzieher):

Drehmoment M (a = Hebellänge):

$$M = a \cdot F$$



## 2.4. Deformierbarer Körper

A = Fläche m<sup>2</sup>,

F = Kraft senkrecht zur Fläche N,

E = Elastizitätsmodul Nm<sup>-2</sup>,

μ = Poissonzahl (< 0.5),

G = Schubmodul

p = Druckspannung

### 2.4.1. Spannung

Zugspannung σ:

$$\sigma := \frac{F_{\perp}}{A} = -p$$

$$\sigma \cdot E = \frac{F}{A}$$

Druckspannung p:

$$p = \frac{F}{A} = -\sigma$$

Hook'sche Gesetz

(relative Änderung [0-1]):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

### 2.4.2. Dehnung

A = Querschnittsfläche

Verlängerung Δl:

$$\Delta l = l \frac{F}{A}$$

Dehnung ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Schubspannung τ:

$$\tau := \frac{F_{\parallel}}{A}$$

Scherwinkel:

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

Schubmodul G:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Querkontraktion ε<sub>q</sub> (d = Ursprungsdicke, Δd = Dickenänderung):

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$$

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon$$

### 2.4.3. Kompression

Kompression (Δp = Druckänderung):

κ = Kompressibilität

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

### 2.4.4. Schubbeanspruchung

Torsionsmodul G:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

## 2.5. Beispiele

### 2.5.1. Torsionsfeder

c = Konstante

φ = Winkel der Drehung

G = Schubmodul

l = Länge der Torsionsfeder

r = Radius der Torsionsfeder

Drehmoment Torsionsfeder:

$$M = c \cdot \varphi$$

Federkonstante:

$$c = \frac{\pi G r^4}{2l}$$

Bei M konstant:

$$l \rightarrow 2l \Rightarrow \varphi \rightarrow 2\varphi$$

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{16}$$

$$E \rightarrow 2E \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\varphi}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow \varphi(0.2) < \varphi(0.3)$$

### 2.5.2. Schraubenfeder

k = Federkonstante

n = Windungszahl

R = Windungsradius  
r = Drahtdurchmesser  
x = Auslenkung

$$k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$$
$$F = kx$$
$$x = \frac{F}{k} = \frac{4nR^3 \cdot F}{Gr^4}$$

Bei konstanter Kraft F:

$$r \rightarrow 2r \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{16}$$
$$R \rightarrow 2R \Rightarrow x \rightarrow 8x$$
$$E \rightarrow 2E \Rightarrow x \rightarrow \frac{x}{2}$$

$$\mu(0.2) \rightarrow \mu(0.3) \Rightarrow x \text{ wird gr\u00f6sser}$$

2.5.3. **Plattfeder**

b = Breite Material  
h = H\u00f6he Material  
l = L\u00e4nge Material  
p = Dichte des Materials  
E = Elastizit\u00e4tsmodul  
z = Auslenkung

Durchbiegung am Ende:

$$z = \frac{4l^3}{Ebh^3}$$

Durchbiegung in der Mitte:

$$z = \frac{5pgl^4}{32Eh^2}$$

3. **Kinematik**

3.1. **Bewegung**

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt}x(t)$$

Mittlere Beschleunigung:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Momentane Beschleunigung:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t) - v(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}v(t)$$

Aufprallgeschwindigkeit (H\u00f6he h):

$$v = \sqrt{2gh}$$

3.2. **Lineare Bewegung**

3.2.1. **Gleichf\u00f6rmige Bewegung**

s = Strecke (m)  
v = Geschwindigkeit (frac(m,s))  
t = Zeit (s)

Eine gleichf\u00f6rmige Bewegung ist eine Bewegung, bei der die Beschleunigung 0 ist.

$$a(t) = 0$$

Geschwindigkeit durch Integration:

$$v(t) = v_0 = \text{konstant}$$

Ort durch Integration:

$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

Anderes:

$$s = v \cdot t$$
$$v = \frac{s}{t}$$
$$t = \frac{s}{v}$$

3.2.2. **Gleichm\u00e4ssig beschleunigte Bewegung**

Bei einer gleichm\u00e4ssig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant.  
a = Beschleunigung ( $\frac{m}{s^2}$ )  
v = Geschwindigkeit ( $\frac{m}{s}$ )  
t = Zeit (s)

$$a(t) = a_0 = \text{konstant}$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{v}{t}$$

$$t = \frac{v}{a}$$

$$v = a \cdot t$$

$$a = \frac{v}{t}$$
$$t = \frac{v}{a}$$

3.3. **Beliebige Bewegungen**

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$$

3.3.1. **Beschleunigung**

Mittlere Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Momentane Beschleunigung:

$$\vec{a} := \frac{d}{dt}\vec{v} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \ddot{\vec{r}}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

$$a_{\text{tangential}} = \lim \frac{\Delta v_{\text{tangential}}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}v = \dot{v}$$

$$a_{\text{radial}} = \lim \frac{\Delta v_{\text{radial}}}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

3.3.2. **Gleichf\u00f6rmige Bewegung**

s = Strecke entlang der Bahnkurve

$$a_{\text{tangential}} = 0$$

$$v_{\text{tangential}(t)} = v_0 = \text{konstant}$$

$$s(t) = v_0 t + s_0$$

3.3.3. **Gleichm\u00e4ssig beschleunigte Bewegung**

$$a_{\text{tangential}} = a_0 \neq 0$$

$$v(t) = a_0 t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + s_0$$

3.4. **Kreisbewegung**

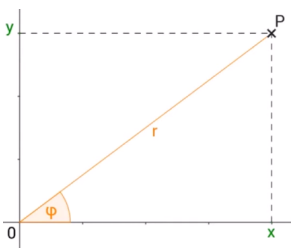
Spezialfall einer beliebigen Bewegung.

Kartesische Koordination:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Polar} \rightarrow \text{Kartesisch}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} |\sqrt{x^2 + y^2}| \\ \tan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}}_{\text{Kartesisch} \rightarrow \text{Polar}}$$



3.4.1. **Winkelgeschwindigkeit**

T = Periode (Zeit pro Umdrehung)  
f = Drehfrequenz (Umdrehungen pro Sekunde)  
r = Radius  
s = Strecke  
φ = Winkel  
ω = Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Bahngeschwindigkeit v:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{\varphi \cdot r}{T} = r \cdot \omega$$

Drehfrequenz f:

$$f = \frac{1}{T}$$

Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Periode:

$$\omega = 2\pi f$$

3.4.2. **Winkelbeschleunigung**

α = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d}{dt}\omega = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

$$a_{\text{tangential}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}r \cdot \omega = r \cdot \alpha$$

3.4.3. **Gleichf\u00f6rmige Kreisbewegung**

$$a = 0$$

$$\omega = \omega_0 = \text{konstant}$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$

Tacho (Bahnangaben):

$$a = \alpha \cdot r = 0$$

$$v = w_0 \cdot r = \text{konstant} = v_0$$

$$s = w_0 r t + \varphi_0 r$$

3.4.4. **Gleichf\u00f6rmig beschleunigte Kreisbewegung**

$$a = a_0 = \text{konstant}$$

$$\omega = a_0 t + \omega_0$$

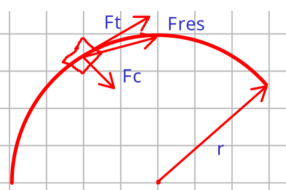
$$\varphi = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

3.5. **Zentripetalkraft**

F<sub>c</sub> = Zentripetalkraft  
a<sub>c</sub> = Zentripetalbeschleunigung  
m = Masse  
v<sub>t</sub> = Tangentialgeschwindigkeit  
r = Radius  
d = Durchmesser der Kurve

$$F_c = \frac{m \cdot v_t^2}{r}$$

$$a_c = \frac{2v_t^2}{d}$$



3.6. Wurfbahnen
3.6.1. Senkrechter Wurf
$a(t) = -g = \text{konstant}$
$v(t) = -gt + v_0 (v_0 < 0 = \text{nach unten werfen})$
$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$
3.6.2. Freier Fall
$a(t) = -g = \text{konstant}$
$v(t) = -gt + 0$
$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + x_0$
3.6.3. Horizontaler Wurf
$a_{x(t)} = 0$
$v_{x(t)} = v_0$
$x(t) = v_0t$
$a_{y(t)} = -g = \text{konstant}$
$v_{y(t)} = -gt + \underbrace{v_0}_0$
$x(t) = \frac{1}{2}gt + y_0$
3.6.4. Schiefer Wurf

$a_x = 0$
$v_{x(t)} = v_0 \cdot \cos(a)$
$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t + x_0$
$a_y = -g$
$v_{y(t)} = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$

$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(a) \cdot t + y_0$
--

Bahnkurve y(x):

$$y(x) = \tan(a) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(a)^2} \cdot x^2$$

Horizontale Distanz zur Zeit t:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos(a) \cdot t$$

Vertikale Distanz zur Zeit t:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(a) - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Maximale Wurfdistanz:

$$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot a)$$

Maximale Wurfhöhe:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin(a)^2$$

Distanz bis zur maximalen Wurfhöhe:

$$X_{\max} = \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin(a)^2 \cdot \cos(a) = \frac{d}{2}$$

Konstante horizontale Geschwindigkeit:

$$v_x = v_0 \cdot \cos(a)$$

Vertikale Geschwindigkeit zur Zeit t:

$$v_y = v_0 \cdot \sin(a) - g \cdot t$$

## 4. Dynamik

Gewichtskraft:

$$F_G = m \cdot g$$

### 4.1. Reibungskräfte

Gleitreibung:

$$F_{\text{Gleit, R}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot F_N$$

Rollreibung:

$$F_{\text{Roll, R}} = \mu_{\text{Roll}} \cdot F_N$$

Rollreibungslänge e:

$$e = \frac{r \cdot F_{\text{Reibung}}}{F_N} = r \cdot \mu_R$$

### 4.2. Arbeit und Energie

s = Strecke

Arbeit W:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Potentielle Energie:

$$W = F_G \cdot h = \underbrace{m \cdot g}_{F_G} \cdot h$$

Potentielle Energie mit Feder:  
k = Federkonstante

$$W = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Kinetische Energie:

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F}{m}$$

Verschiebungsarbeit:

$$W = F \cdot s = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2}at^2\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

Energieerhaltungssatz:

$$W = F_G \cdot h = mgh = mg\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_{\text{tot}} = \text{konst}$$

### 4.3. Leitung / Wirkungsgrad

Leistung P:

$$P = \frac{\bigtriangleup W}{\bigtriangleup t} = \frac{F \cdot \bigtriangleup s}{\bigtriangleup t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Watt W:

$$1W = 1\frac{J}{s}$$

Wirkungsgrad η:

$$\eta = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}}$$

### 4.4. Impuls / Impulserhaltung

Impuls *p*: und

$$\vec{p} = m \cdot \vec{c}$$

2. Newtonsches Gesetz umschreiben:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

### 4.5. Stöße

$$\vec{O} = \frac{1}{m_1 + m_2} \big(m_1\dot{r}_1^+ + m_2\dot{r}_2^+\big)$$

$$\vec{O} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}_{\text{tot}}$$

Impulssatz:

$$\vec{P}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} \Leftrightarrow m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

Energiesatz total elastisch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

Relataivgeschwindigkeit *v*<sub>rel</sub>:

$$v_{\text{rel}} = |v_1 - v_2|$$

Reduzierte Masse μ:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Deformationsarbeit Q:

$$Q = \frac{\mu \cdot v_{\text{rel}}^2}{m_1 + m_2}$$

### 4.6. Rakete

μ = Treibstoffverbrauch

Strahlgeschwindigkeit *u*:

$$m \cdot dv = -u \cdot dm$$

Raketengeschwindigkei *v*(*t*):

$$\begin{aligned} v(t) &= -u \ln(m(t)) + v_0 + u \ln(m_0) \\ &= u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) + v_0 \end{aligned}$$

Beschleunigung der Rakete :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g$$

### 4.7. Gravitation

Newton’sche Gravitationsgesetz:

$$F_G = G \frac{m_1m_2}{r^2}$$

Gravitationskonstante G:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Gravitationspotential: