Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №3 по курсу "Анализ алгоритмов"

Тема Алгоритмы умножения матриц

Студент Чепиго Д.С.

Группа ИУ7-54Б

Преподаватели Волкова Л.Л., Строганов Ю.В.

Москва — 2022 г.

Содержание

Введение

Матрица – математический объект, который активно применяется почти во всех отрасли человеческой деятельности. Они используются в математике, в физике, в технике, в экономике, в теории управления, статистики и других областях науки и знаний.

Цель лабораторной работы – изучить и исследовать трудоемкость алгоритмов умножения матриц.

Задачи лабораторной работы:

- изучить и реализовать 3 алгоритма умножения матриц: стандартный алгоритм умножения матриц, алгоритм Винограда и оптимизированный алгоритм Винограда;
- выбрать инструменты для замера процессорного времени выполнения реализаций алгоритмов;
- провести анализ затрат работы алгоритмов по времени и памяти;
- подготовить отчет по лабораторной работе.

1 Аналитическая часть

Матрица – математический объект, эквивалентный двумерному массиву. Числа располагаются в матрице по строкам и столбцам. Две матрицы одинакового размера можно поэлементно сложить или вычесть друг из друга. [1]

Если число столбцов в первой матрице совпадает с числом строк во второй, то эти две матрицы можно перемножить. Размерность получившийся матрице будет равна количеству строк первой матрицы и количеству столбцов второй матрицы. [2]

Умножение матриц некоммутативно: оба произведения AB и BA двух квадратных матриц одинакового размера можно вычислить, однако результаты, вообще говоря, будут отличаться друг от друга.

1.1 Стандартный алгоритм

Пусть даны две прямоугольные матрицы

$$A_{lm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lm} \end{pmatrix}, \quad B_{mn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

тогда матрица C

$$C_{ln} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj} \quad (i = \overline{1,l}; j = \overline{1,n}) \tag{1.3}$$

будет называться произведением матриц A и B.

1.2 Алгоритм Винограда

Алгоритм Винограда [2] — алгоритм умножения квадратных матриц, предложенный в 1987 году Ш. Виноградом. В исходной версии асимптотическая сложность алгоритма составляла $O(n^{2,3755})$, где n — размер стороны матрицы. Алгоритм Винограда, с учетом серии улучшений и доработок в последующие годы, обладает лучшей асимптотикой среди известных алгоритмов умножения матриц [3].

Рассмотрим два вектора $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Их скалярное произведение равно: $V \cdot W = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$, что эквивалентно (1.4):

$$V \cdot W = (v_1 + w_2)(v_2 + w_1) + (v_3 + w_4)(v_4 + w_3) - v_1v_2 - v_3v_4 - w_1w_2 - w_3w_4. \quad (1.4)$$

Несмотря на то, что второе выражение требует вычисления большего количества операций, чем стандартный алгоритм: вместо четырех умножений – шесть, а вместо трех сложений – десять, выражение в правой части последнего равенства допускает предварительную обработку: его части можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и для каждого столбца второй, что позволит для каждого элемента выполнять лишь два умножения и пять сложений, складывая затем только лишь с 2 предварительно посчитанными суммами соседних элементов текущих строк и столбцов. Из-за того, что операция сложения быстрее операции умножения в ЭВМ, на практике алгоритм должен работать быстрее стандартного.

В случае нечетного значений размера изначальной матрицы (n), следует произвести еще одну операцию - добавление произведения последних элементов соответствующих строк и столбцов.

Список использованных источников

[1] И. В. Белоусов. Матрицы и определители [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Belousov2006ru.pdf(дата обращения: 20.10.2022).

[2] Умножение матриц [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://algolib.narod.ru/Math/Matrix.html (дата обращения: 20.10.2022).

[3] Group-theoretic Algorithms for Matrix Multiplication / H. Cohn, R. Kleinberg, B. Szegedy et al [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/math/0511460.pdf(дата обращения: 20.10.2022).

[4] Язык программирования C++ [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://isocpp.org/(дата обращения: 20.10.2022)

[5] Стандарт языка C++ [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://isocpp.org/files/papers/N4860.pdf(дата обращения: 20.10.2022)

[6] Операционная система Ubuntu 22.04 LTS [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://releases.ubuntu.com/jammy/(дата обращения: 20.10.2022)

[7] Стандарт языка Си [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.open-std.org/jtc1/sc22/wg14/www/docs/n1256.pdf(дата обращения: 20.10.2022)