

# Отчет по Лабораторной работе №8

Чепиго Дарья  
ИУ7-44Б

**Условие задачи:**

Реализация и исследование отсечения отрезка регулярным отсекателем алгоритмом Кируса-Бека.

**Этапы работы программы:**

1. Ввод отсекателя
2. Ввод произвольных отрезков (не одного, а нескольких) - можно сделать мышкой, но клавиатурный ввод должен быть
3. Выполнение отсечения: границы отсекателя показать одним цветом, отрезок – другим, результат отсечения – третьим.

**Алгоритм Кируса-Бека:**

Отметим форму, в которой описываются отрезки в данном алгоритме (параметрическая форма задания отрезка):

$$P(t) = P1 + (P2 - P1) * t$$

Это векторное уравнение, которое в двумерной графике можно свести к двум одномерным параметрическим уравнениям следующего вида:

$$Px(t) = P1.x + (P2.x - P1.x) * t$$

параметр  $t$  так же принадлежит  $[0, 1]$

Если значение параметра  $t$  лежит вне  $[0, 1]$ , то пересечение происходит с продолжением отрезка (получается, что его нет). Такие пересечения отвергаются.

*Вектор внутренней нормали  $n_v$*  - вектор, перпендикулярный грани многоугольника и направлен внутрь этого многоугольника. Это проверяется аналитическим выражением следующего вида:

$$n_v * (B - A) \geq 0$$

где  $A$  - точка грани, из которой исходит данная нормаль, а  $B$  любая другая точка нормали (следует брать точку, не принадлежащую рассматриваемой грани, иначе скалярное произведение будет равно 0.)

Следующий вектор:

$$[P(t) - f_i]$$

где  $f_i$  - произвольная точка рассматриваемой грани (не совпадающая с точкой пересечения рассматриваемых грани и отрезка)

Проанализируем скалярное произведение этого вектора и вектора нормали к рассматриваемой грани:

$n_v * [P(t) - f_i] > 0$  - вектор направлен внутрь области многоугольника (из скалярного произведения следует, что угол между вектором и вектором внутренней нормали  $< 90$ ).

$n_v * [P(t) - f_i] = 0$  - вектор перпендикулярен нормали (то есть параллелен грани)

$n_v * [P(t) - f_i] < 0$  - направлен вне области многоугольника (противоположность первой ситуации)

В зависимости  $t$ , рассматриваемая точка  $P(t)$  может находиться как внутри, так и вне области многоугольника относительно рассматриваемой грани, однако в данном случае нас больше интересует тот факт, что мы можем определить «входит» или «выходит» отрезок из многоугольника при пересечении определенной грани.

Если отрезок пересекает грань и его начало было внутри многоугольника относительно этой грани, то получается что при пересечении он выйдет за грань и за пределы многоугольника.

Рассмотрим подробнее ситуацию:

$$n_v * [P(t) - f_i] = 0$$

когда вектор, состоящий из точки отрезка  $P(t)$  и точки  $f_i$  грани параллелен этой грани. Очевидно, что если стоит задача построить параллельную прямую к некоторой прямой  $L$  через точку  $A$ , находящейся на этой прямой  $L$ , то решение этой задачи - прямая, совпадающая с прямой  $L$ . Из этого следует, что  $n_v * [P(t) - f_i] = 0$  выполняется тогда, когда вектор лежит на одной прямой с гранью  $[P(t) - f_i]$ , а  $P(t)$  для некоторого  $t$  - точка пересечения грани и отрезка.

Подставим параметрическую форму уравнения в данное выражение:

$$n_v * [P1 + (P2 - P1)t - f_i] = 0$$

Преобразуем:

$$n_v * [P1 - f_i] + n_v * [P2 - P1]t = 0$$

В данном уравнении вектор  $[P2 - P1]$  - вектор, определяющий направление (ориентацию) отрезка, а вектор  $[P1 - f_i]$  рассматривался выше в общем виде, но в данном случае - вектор, соединяющий некоторую точку грани с началом отрезка (по его скалярному произведению с внутренней нормалью можно судить о положении отрезка относительно внутренней нормали)

Введем обозначения:

$$Wi = n_v [P1 - f_i]$$

$$D = n_v [P2 - P1]$$

Выразим  $t$  из уравнения (\*), используя обозначения выше:

$$t = -Wi/D$$

Данное выражение нельзя рассматривать при  $D_{ск} = 0$ .

Рассмотрим случаи, когда  $D_{ск} = 0$ :

1. Вектор ориентации отрезка вырожден (нулевой). Такой случай нас не очень интересует.
2.  $D_{ск}$  перпендикулярен  $n_v$ . Получается, что отрезок параллелен грани. Здесь может быть 2 случая:
  - (a) отрезок лежит вне многоугольника относительно грани - он однозначно не видим. Заканчиваем операцию отсечения данного отрезка.
  - (b) Отрезок лежит внутри многоугольника относительно грани - тогда следует перейти на следующую итерацию и продолжить операцию отсечения.

Определить "вне" или "внутри" легко с помощью вектора  $Wi$ . Этот вектор начинается в некоторой точке рассматриваемой грани многоугольника и заканчивается в некоторой точке отрезка. Можно сказать, что он направлен "от грани к отрезку". Внутренняя нормаль начинается в некоторой точке грани и может быть направлена к отрезку и в противоположную сторону. Проверяется это, например, вот таким скалярным произведением:

$$Wi = n_v[P1 - f_i]$$

Если скалярное произведение  $< 0$ , то угол между вектором нормали и вектором, направленным к отрезку  $> 90$ , и вектор лежит вне фигуры, иначе - внутри.

Осталось решить только одну проблему: какие конкретно значения  $t$  выбрать в качестве начального и конечного. Очевидно, что если отрезок виден, то он виден относительно всех граней. Из этого можно сделать вывод, что если отрезок входит в многоугольник относительно какой-то грани, то относительно других граней он должен был уже войти (то есть надо выбирать в качестве начала последний вход), и при этом не должен был выйти (то есть получается последний вход должен быть раньше всех выходов).

С выходами ситуация та же: выйдя за первую грань, отрезок перестанет быть виден относительно нее и, следовательно, будет на оставшемся промежутке (из этого вывод - в качестве конца следует брать первый выход).

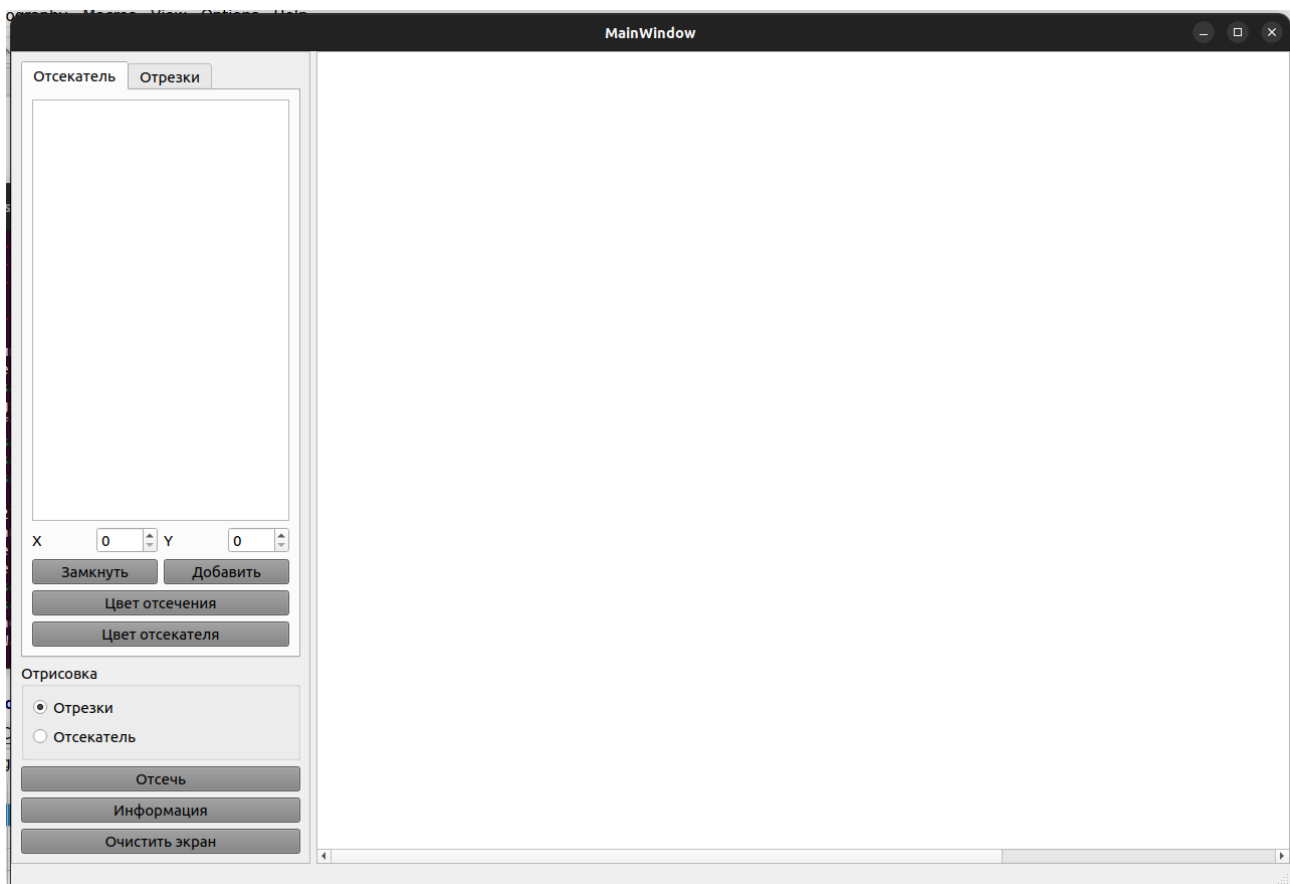
Далее, убедившись, что параметр  $t_{вх}$ , соответствующий последнему входу, меньше, чем параметр  $t_{вых}$ , соответствующий первому выходу, чертим видимую часть отрезка (если условие не выполняется - не чертим).

## Алгоритм с комментариями из моей программы (файл main.py):

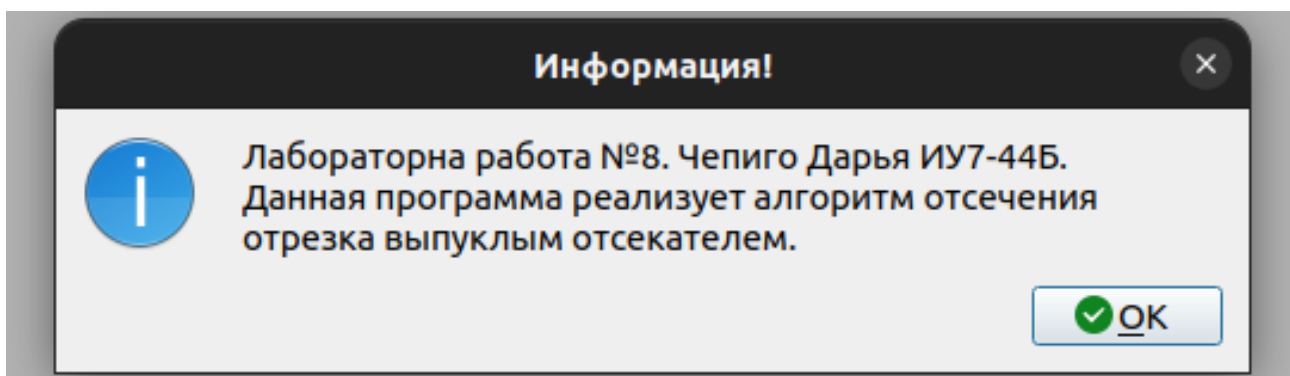
```
def cut_one(line: QLine, count):  
    # Вычисление директрисы заданного отрезка:  
    #  $D = P_2 - P_1$   
    d = QPointF(line.x2() - line.x1(), line.y2() - line.y1())  
  
    # Инициализация пределов значений параметра  $t$  при условии,  
    # что отрезок полностью видим:  
    top = 0  
    bottom = 1  
  
    # Начало цикла по всем сторонам отсекаателя.  
    # Для каждой  $i$ -ой стороны отсекаателя выполнить следующие действия:  
    for i in range(-2, count - 2):  
        # Вычисление вектора внутренней нормали к очередной  $i$ -ой стороне отсекаателя -  $N_{wi}$   
        norm = normal(wind.cutter[i], wind.cutter[i + 1], wind.cutter[i + 2])  
  
        # Вычисление вектора  $W_i = P_1 - f_i$  ( $f_i$  берем за вершины стороны)  
        w = QPointF(line.x1() - wind.cutter[i].x(), line.y1() - wind.cutter[i].y())  
  
        # Вычисление скалярного произведения векторов:  
        #  $W_{i\text{скал}} = W_i \cdot N_{wi}$ ,  $D_{\text{скал}} = DN_{wi}$   
        d_scal = scalar_mult(d, norm)  
        w_scal = scalar_mult(w, norm)  
  
        # Если  $D_{\text{скал}} = 0$ , Если  $W_{\text{ски}} > 0$ , то отрезок  
        # (точка) видим(-а) относительно текущей стороны отсекаателя  
        if d_scal == 0:  
            if w_scal < 0:  
                return []  
            else:  
                continue  
  
        # Вычисление параметра  $t$ :  
        t = -w_scal / d_scal  
  
        if d_scal > 0:  
            if t <= 1:  
                top = max(top, t)  
            else:  
                return  
        elif d_scal < 0:  
            if t >= 0:  
                bottom = min(bottom, t)  
            else:  
                return  
  
        # Проверка фактической видимости отсечённого отрезка. Если  $t_n > t_e$ , то выход  
        if top > bottom:  
            break  
  
    # Проверка фактической видимости отсечённого отрезка.  
    # Если  $t_n \leq t_e$ , то изобразить отрезок в интервале от  $P(t_n)$  до  $P(t_e)$ .  
    if top <= bottom:  
        return QLine(round(line.x1() + d.x() * top), round(line.y1() + d.y() * top),  
                      round(line.x1() + d.x() * bottom), round(line.y1() + d.y() * bottom))
```

## Интерфейс и примеры работы:

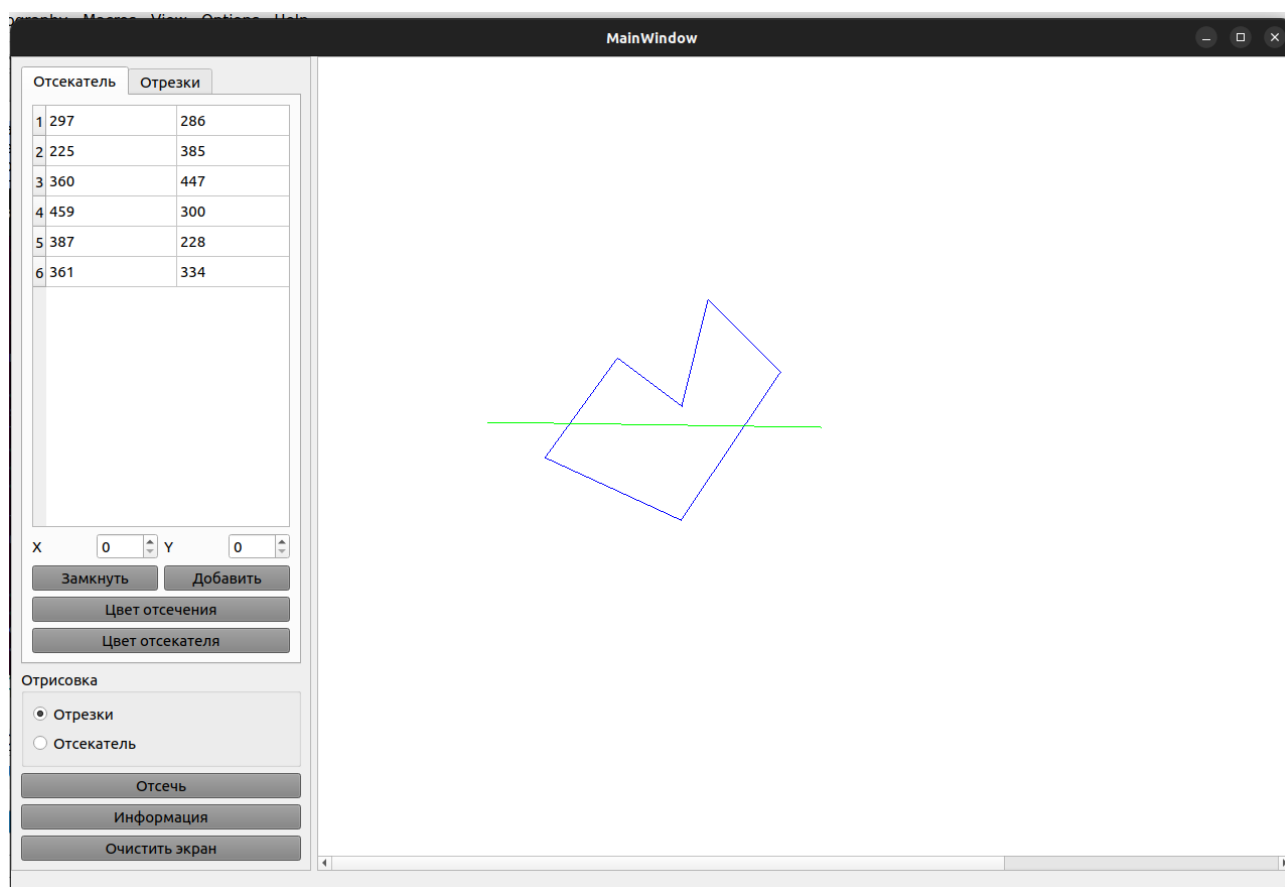
Главное окно:



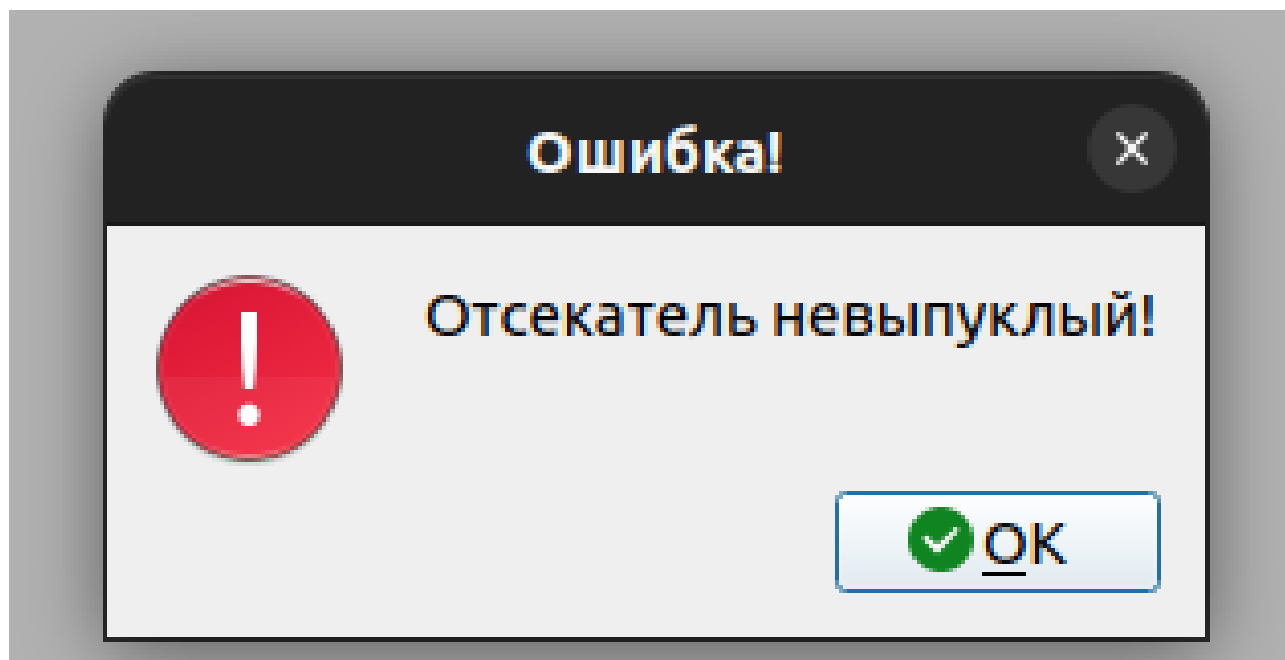
Информация о программе:



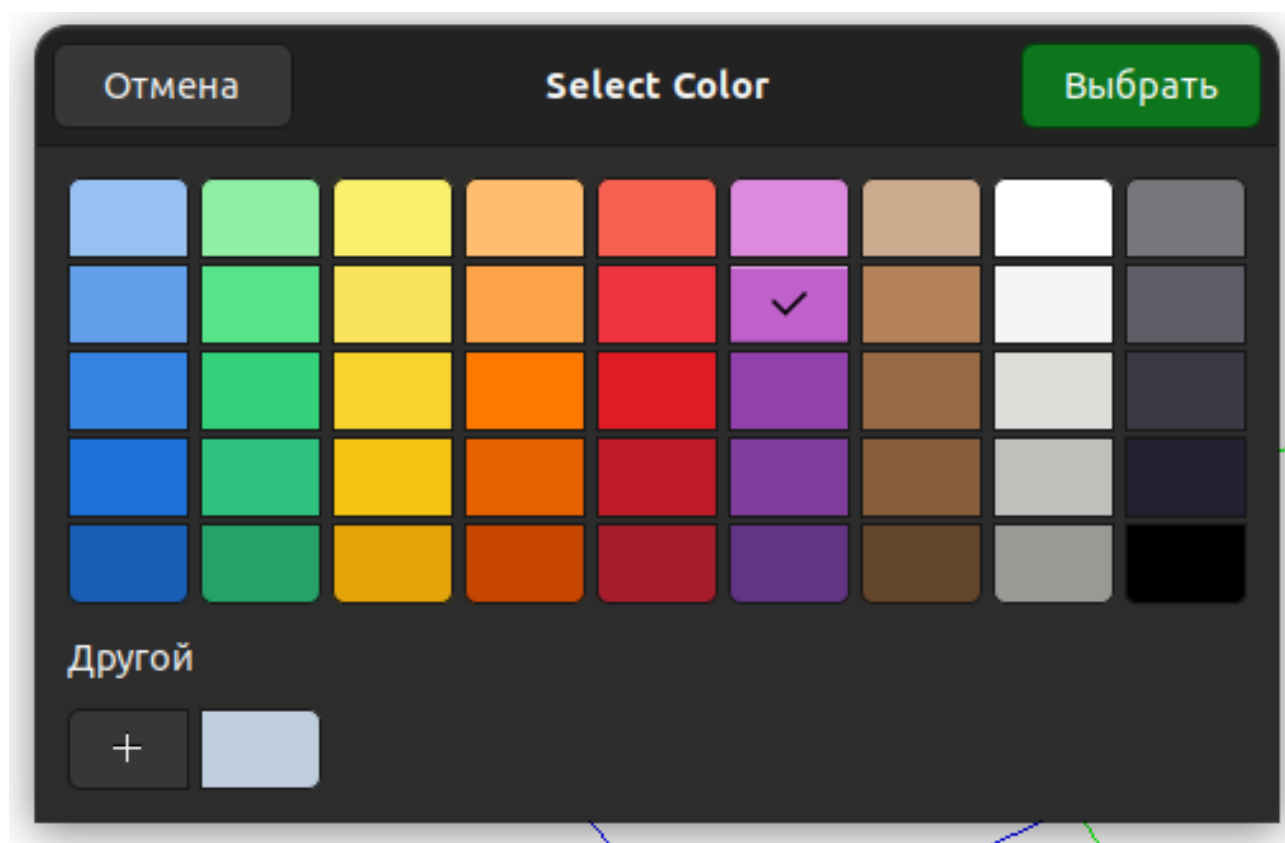
Попробуем задать невыпуклый отсекатель:



отсекаем:



Зададим выпуклый отсекаТЕЛЬ и отрезки, выберем цвет отсекаемых отрезков:



отсекаем:

