Вопрос 1. Основные понятия теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Алгебра событий, основные законы событий.

1. **Случайное событие** – это факт, который может произойти или не произойти в результате опыта со случайным исходом.
   - **Достоверное событие** – событие, которое происходит в каждом опыте ($A = \Omega$).
   - **Невозможное событие** – событие, которое никогда не происходит ($A = \emptyset$).
   - **Противоположное событие** – событие, которое происходит, когда не происходит событие A.
2. **Пространство элементарных событий** (Ω) – множество всех возможных исходов опыта. Каждое элементарное событие является неделимым.
3. **Алгебра событий** – совокупность всех возможных событий в пространстве Ω, с определенными операциями:
   - **Сумма событий (объединение):** $A \cup B$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B.
   - **Произведение событий (пересечение):** $A \cap B$ – событие, состоящее в одновременном появлении событий A и B.
   - **Разность событий:** $A \setminus B$ – событие, происходящее, если A наступило, а B нет.
   - **Противоположное событие:** $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Основные законы событий:

- Законы коммутативности:
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$
- Законы ассоциативности:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- Законы дистрибутивности:
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
- Закон дополнения:
$$A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Вопрос 2. Основные аксиомы теории вероятностей.

Это аксиомы Колмогорова

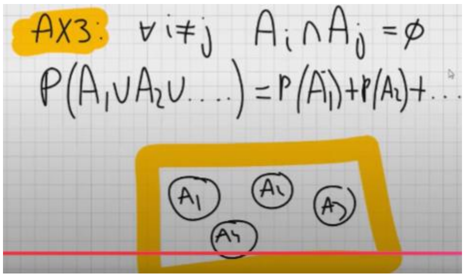
Аксиома 1. Вероятность *p(A)* случайного события *A* есть функция множества элементарных исходов, благоприятных событию *A*, и вероятность любого события принимает значения

$$0 \le p(A) \le 1, \qquad (1.1)$$

причем $p(\varnothing) = 0, p(\Omega) = 1$.

Аксиома 2. Вероятность суммы несовместных случайных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i), \ \ A_i \cdot A_j = \varnothing, \ \forall i \ne j \qquad (1.2)$$



Следствие аксиом 1 и 2: Вероятность прямого события $p(A)$ и вероятность противоположного события $p(\overline{A})$ связаны соотношением

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A). \qquad (1.3)$$

Вопрос 3. Методы задания вероятностей.
Классическое определение вероятностей.
Геометрический метод задания вероятностей.

Методы: классический, геометрический, статический.

Непосредственный подсчет вероятностей

События $A_1 \ldots A_n$ называются случаями, если они обладают следующими свойствами:

- события $A_1 \ldots A_n$ несовместны, $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$;
- события $A_1 \ldots A_n$ образуют полную группу, $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$;
- события $A_1 \ldots A_n$ равновозможны, $p(A_i) = p$, $\forall i$.

Классическое определение вероятности: вероятность события A определяется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n}, \qquad (1.4)$$

где n – число всех возможных, равновероятных исходов данного опыта;

m – число исходов, благоприятствующих появлению события.

Геометрическое определение вероятности. Пусть в некоторую область Ω случайным образом бросается точка T, причем все точки области Ω равноправны в отношении попадания точки T.

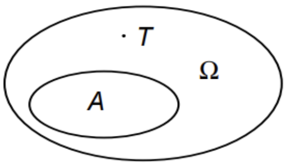


Рис. 1.1

Тогда за вероятность попадания точки T в область A принимается отношение

$$p(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}, \qquad (1.5)$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ — геометрические меры (длина, площадь, объем и т.д.) областей A и Ω соответственно.

Статистический метод:

Используется, когда частота появления события известна из наблюдений или экспериментов. Вероятность события A определяется как предел частоты его появления при увеличении числа испытаний:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

где:

- n_A – число испытаний, в которых произошло событие A,
- n – общее число испытаний.

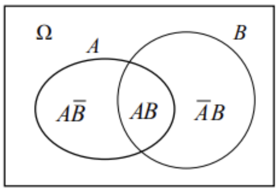
Вопрос 4. Свойства вероятностной меры (основные теоремы).

Теоремы сложения вероятностей

Теорема сложения двух случайных событий. Вероятность суммы случайных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB) \qquad (2.2)$$

Доказательство:



Представим событие $A + B$ в виде суммы трех несовместимых событий

$$A + B = A\cdot \overline{B} + AB + \overline{A}\cdot B.$$

Тогда на основании второй аксиомы

$$p(A + B) = p(A\overline{B}) + p(AB) + p(\overline{A}B).$$

Представим события A и B в виде суммы несовместимых событий:

$$A=A\cdot\overline{B}+AB,\ p(A)=p(A\cdot B)+p(AB) \Rightarrow p(A\cdot B)= p(A) - p(AB),$$

$$B=B\cdot A+AB,\ p(B)=p(B\cdot A)+p(A\cdot B) \Rightarrow p(B\cdot A)= p(B) - p(AB),$$

Подставим $p(A\cdot B)$ и $p(B\cdot A)$ в выражение $p(A+B)$ и после преобразований получим: $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Теорема сложения для n случайных событий. Вероятность суммы n событий $A_1, \ldots, A_n$ равна

$$p(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i_1=1}^{n} p(A_{i_1}) - \sum_{i_1,i_2} p(A_{i_1}A_{i_2}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k+1} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} p(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n+1} p(A_1A_2\ldots A_n), \qquad (2.3)$$

На практике, с учетом того, что $p(A) = 1 - p(\overline{A})$, вероятность суммы n событий (если $n>2$) удобнее вычислять по формуле

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - p(\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}) = 1 - p(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n). \qquad (2.4)$$

Теоремы умножения вероятностей

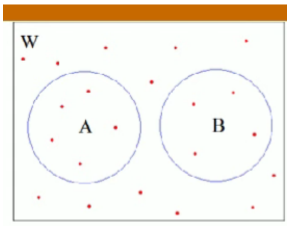
Теорема умножения вероятностей для двух событий. Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность второго при наличии первого.

$$p(AB) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B). \qquad (2.7)$$

Теорема умножения вероятностей для n событий. Вероятность произведения n событий $A_1 \ldots A_n$ равна

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot \ldots \cdot p(A_n/A_1\cdot A_2\cdot \ldots \cdot A_{n-1}), \qquad (2.8)$$

где $p(A_k/A_1\cdot\ldots\cdot A_{k-1})$ - вероятность появления события A_k, при условии, что события A_1, A_2, …, A_{k-1} в данном опыте произошли.

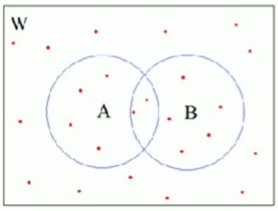


A: дротик попал в первую мишень;

B: дротик попал во вторую мишень.

несовместные

События называются **несовместными**, если в ходе проведения эксперимента они не могут происходить одновременно.



A: дротик попал в первую мишень;

B: дротик попал во вторую мишень.

совместные

Вопрос 5. Условная вероятность. Независимость событий.

Условная вероятность

Ранее случайное событие определялось как событие, которое при осуществлении совокупности условий (опыта) может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме этих условий, не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной***. Если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называется ***условной.***

Проводится опыт со случайным исходом, в результате которого возможны два события A и B. ***Условной вероятностью*** $p(B/A)$ называется вероятность события B, вычисленная при условии (в предположении), что событие A произошло.

Зависимые и независимые события

Событие A называется независимым от события B, если его вероятность не зависит от того, произошло B или нет, т.е. критерий независимости:

$$p(A) = p(A/B) = p(A/\overline{B}). \qquad (2.5)$$

В противном случае, т.е. когда критерий не выполняется, событие A зависит от события B.

Зависимость и независимость всегда взаимны, т.е. если событие A не зависит от события B (см. (2.5)), то и событие B не зависит от события A:

$$p(B) = p(B/A) = p(B/\overline{A}). \qquad (2.6)$$

Вопрос 6. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности

Следствием обеих теорем вероятности – теоремы сложения и теоремы умножения – является формула полной вероятности.

Пусть проводится опыт, об условиях которого можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез), образующих полную группу:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \quad H_i H_j = \varnothing,\ i \neq j, \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Каждая из гипотез осуществляется случайным образом и представляет собой случайное событие. Вероятности гипотез известны и равны:

$$p(H_1), p(H_2), \ldots, p(H_n), \sum_{i=1}^{n} p(H_i) = 1.$$

Рассмотрим некоторое событие A, которое может появиться только вместе с одной из гипотез. Известны условные вероятности события A для каждой из гипотез:

$$P(A/H_1), p(A/H_2), \ldots p(A/H_n).$$

Требуется определить полную (безусловную) $p(A)$ вероятности события A. Представим событие А как сумму из n несовместимых вариантов:

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot (H_1 + H_2 + \ldots\ldots + H_n) = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \ldots\ldots A \cdot H_n.$$

На основании второй аксиомы

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i A).$$

С учетом теоремы умножения вероятностей $p(H_iA) = p(H_i)p(A/H_i)$, тогда

$$p(A) = \sum^{n} p(H_i) \cdot p(A/H_i). \qquad (3.1)$$

Базируется на формуле полной вероятности и теореме умножения вероятностей.

Пусть до проведения некоторого опыта об его условиях n можно сделать n исключающих друг друга предположений (гипотез), образующих полную группу:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \quad H_i H_j = \varnothing,\ i \neq j, \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

$$p(H_i/A) = \frac{p(H_i)p(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(H_j)p(A/H_j)}. \qquad (3.2)$$

Формула Байеса позволяет пересчитать априорные вероятность гипотез с учетом того, что опыт завершился событием A.

Вопрос 7. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли.

Теорема о повторении опытов

Пусть проводятся n независимых ***одинаковых*** опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Вероятность $P(n,k)$ того, что событие A произойдет ровно в k опытах, равна ***(формула Бернулли)***

$$P(n,k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} p^k \cdot q^{n-k}, 0 \le k \le n, \qquad (3.3)$$

где $q = 1 - p$ - вероятность того, что A не появится в одном опыте.

Свойства формулы Бернулли:

1. Правая часть формулы (3.3) представляет собой общий член разложения бинома Ньютона:

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} P(n,k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1 \qquad (3.4)$$

2. Рекуррентная формула $P(n,k)$имеет вид

$$P(n,k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} P_n(n,k) \qquad (3.5)$$

3. Число κ_0, которому соответствует максимальная вероятность $P(n, k_0)$, называется *наивероятнейшим числом* появления события A и определяется неравенствами

$$np - q \le k_0 \le np + p \qquad (3.6)$$

4. Вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$того, что в n опытах схемы Бернулли, событие A появится от k_1 до k_2 раз ($0 \le k_1 \le k_2 \le n$), равна

$$P(n, k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P(n,k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (3.7)$$

5 Вероятность $P(n, 1 \le k \le n)$ того, что в n опытах событие A появится хотя бы один раз, равна

$$P(n, 1 \le k \le n) = 1 - P(n,0) = 1 - q^n. \qquad (3.8)$$

Если количество испытаний велико $n \to \infty$, а вероятность события мала $p \to 0$, так что $np \to a$, $0 < a < \infty$ и $p << \frac{1}{\sqrt{n}}$, то используется ***формула Пуассона***:

$$P(n,k) \approx \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}, k = \overline{0,n}. \qquad (3.10)$$

Если количество испытаний n велико, вероятности p и q не малы, так что выполняются следующие условия:

$$0 < np - 3\sqrt{npq}, \quad np + 3\sqrt{npq} < n,$$

то применяются приближенные ***формулы Муавра-Лапласа***:

- локальная $$P(n,k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (3.11)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $\qquad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$;

- интегральная $$P(n, k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.12)$$

где $x_1 = \frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ - функция Лапласа.

Вопрос 8. Случайная величина.
Законы распределения случайных величин.

Случайная величина (СВ) – это величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение, причем заранее до опыта неизвестно, какое именно. Обозначения случайной величины: X, Y; а их значения: x, y.

Случайная величина X называется ***дискретной***, если ее множество возможных значений Ω_X – счетное, т.е. элементы множества можно расположить в определенном порядке и пронумеровать.

Закон распределения случайной величины — любое правило, устанавливающее соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Рядом распределения дискретной СВ X называется таблица, в верхней строке которой перечислены все возможные значения СВ $x_1, x_2, \ldots, x_n (x_i < x_{i+1})$, а в нижней — вероятности их появления $p_1, p_2, \ldots, p_n$, где $p_i = p(X = x_i)$:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Так как события $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_n\}$ несовместны и образуют полную группу, то справедливо контрольное соотношение

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \qquad (5.1)$$

Средним квадратическим отклонением (СКО) СВ X называется характеристика

$$\sigma_X = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \qquad (6.5)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и СВ, и характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3σ. Практически все значения СВ находятся в интервале

$$[m_X - 3\sigma_X; m_X + 3\sigma_X]. \qquad (6.6)$$

Модой (Mo) случайной величины называется ее наиболее вероятное значение, т. е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигает максимума.

Медианой (Me) случайной величины X называется такое ее значение, для которого выполняется условие $p\{X < Me\} = p\{X \geq Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин.

Квантилью χ_p случайной величины X является такое ее значение, для которого выполняется условие $p\{X < \chi_p\} = F(\chi_p) = p$.

Вопрос 9. Функция распределения случайной величины и ее свойства.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что она примет значение меньшее, чем аргумент x функции *F(x)*: $F(x) = p(X < x)$.

Свойства функции распределения:

1. $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$.
2. Неубывающая функция: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

4. Вероятность попадания значения СВ X в интервал $[a;b)$:

$$p\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) \qquad (5.2)$$

Функция распределения дискретной СВ определяется так:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i \qquad (5.3)$$

где p_i – вероятности ряд распределения этой СВ.

Здесь суммируются вероятности всех тех значений x_i, которые по своей величине меньше, чем x – аргумент функции *F(x)*.

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n	$> x_n$
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	0
$F(x_i)$	0	p_1	$p_1 + p_2$		$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$	1

Функция распределения любой дискретной СВ есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений.

Вопрос 10. Плотность распределения и её основные свойства.

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения *F(x)* - непрерывная и дифференцируемая функция для всех значений аргумента.

Плотностью распределения (плотностью вероятности) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \qquad (4.6)$$

а график плотности распределения называется кривой распределения.

Пусть имеется точка x и прилегающий к ней отрезок dx. Вероятность попадания случайной величины X на этот интервал равна $f(x)dx$. Эта величина называется ***элементом вероятности.*** Вероятность попадания случайной величины X на произвольный участок $[a, b[$ равна сумме элементов вероятности на этом участке:

$$p\{a \le X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.7)$$

В геометрической интерпретации $p\{a \le X < b\}$ равна площади, ограниченной сверху кривой плотности распределения $f(x)$ и участком $[a, b[$.

Соотношение (4.7) позволяет выразить функцию распределения $F(x)$ случайной величины X через ее плотность:

$$F(x) = p\{X < x\} = p\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (4.8)$$

Основные свойства плотности распределения:

1. Плотность распределения неотрицательна $f(x) \ge 0$, так как ее первообразная $F(x)$ является неубывающей функцией (см. свойство 3 $F(x)$).

2. Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = p(-\infty \le X < +\infty) = 1. \qquad (4.9)$

Полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна 1.

Вопрос 11. Векторные случайные величины.
Распределение двумерной случайной величины и ее свойства.

Векторные случайные величины — это обобщение понятия случайной величины на многомерные случаи. Векторная случайная величина представляет собой вектор, компоненты которого являются случайными величинами. Например, двумерная случайная величина $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ состоит из двух компонент X_1 и X_2, каждая из которых является случайной величиной.

Распределение двумерной случайной величины

Распределение двумерной случайной величины $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ задается с помощью:

1. **Совместной функции распределения (ФР):** Совместная ФР $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ описывает вероятность того, что X_1 принимает значение меньше или равное x_1, а X_2 — значение меньше или равное x_2:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2).$$

   Функция $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ удовлетворяет следующим свойствам:

   - $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ возрастает по x_1 и x_2.
   - $F_{X_1,X_2}(-\infty, x_2) = F_{X_1,X_2}(x_1, -\infty) = 0$.
   - $F_{X_1,X_2}(+\infty, +\infty) = 1$.

2. **Совместной плотности распределения (при непрерывных X_1 и X_2):** Если X_1 и X_2 непрерывны, то существует совместная плотность вероятности $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, такая что:

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(u, v)\, du\, dv.$$

3. **Совместной функцией вероятностей (при дискретных X_1 и X_2):** В случае дискретных случайных величин совместная функция вероятностей задается как:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2).$$

Свойства двумерной случайной величины

1. **Маргинальные распределения:** Маргинальные распределения X_1 и X_2 получаются интегрированием совместной плотности:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2, \quad f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1.$$

2. **Условное распределение:** Условная плотность $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$ определяется как:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}, \quad f_{X_2}(x_2) \neq 0.$$

3. **Математическое ожидание и ковариация:**

   - **Математическое ожидание** каждой компоненты:

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

   - **Ковариационная матрица:**

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) \end{bmatrix},$$

   где $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$.

4. **Корреляция:** Коэффициент корреляции $\rho(X_1, X_2)$ показывает степень линейной связи между компонентами:

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}}.$$

5. **Независимость:** X_1 и X_2 независимы, если:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

6. **Функция характеристик и моменты:**

   - Характеристическая функция двумерной случайной величины определяется как:
   $$\phi_{X_1,X_2}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[e^{i(t_1 X_1 + t_2 X_2)}].$$
   - Моменты могут быть вычислены через плотность распределения или характеристическую функцию.

Вопрос 12. Плотность распределения двумерной случайной величины и ее свойства.

Двухмерная случайная величина (X,Y) – совокупность двух одномерных случайных величин, которые принимают значения в результате проведения одного и того же опыта. Двухмерную случайную величину (X,Y) геометрически можно представить как случайную точку (X,Y) на плоскости xOy.

Двухмерная случайная величина (X,Y) является непрерывной, если ее функция распределения $F(x,y)$ представляет собой непрерывную, дифференцируемую функцию по каждому из аргументов и существует вторая смешанная производная $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Двухмерная плотность распределения $f(x,y)$ характеризует плотность вероятности в окрестности точки с координатами (x,y) и равна второй смешанной производной функция распределения:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \qquad (8.1)$$

Свойства двухмерной плотности:

1. $f(x,y) \geq 0$.
2. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$. (8.2)
3. $p\{(X,Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy$. (8.3)
4. **Условие нормировки**: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$. (8.4)

Геометрически интеграл условия нормировки вычисляет объем тела, ограниченный поверхностью распределения и плоскостью xOy.

5. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$; $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$. (8.5)

Вопрос 13. Условные законы распределения двумерной случайной величины.

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условные плотности для непрерывных составляющих X и Y определяются по формулам:

$$f(x / y) = f(x, y) / f_Y(y) \text{ для } f_Y(y) \neq 0; \qquad (9.11)$$

$$f(y / x) = f(x, y) / f_X(x) \text{ для } f_X(x) \neq 0. \qquad (9.12)$$

Условные ряды распределения для дискретных составляющих X и Y определяются по формулам:

$$p_{i/j} = p(X = x_i / Y = y_j) = p_{ij} / p(Y = y_j),\ i = 1, ..., N; \qquad (9.13)$$

$$p_{j/i} = p(Y = y_j / X = x_i) = p_{ij} / p(X = x_i),\ j = 1, ..., M. \qquad (9.14)$$

Величина X ***независима*** от величины Y, если ее закон распределения не зависит от того, какое значение приняла величина Y. Для независимых величин выполняются следующие соотношения:

1. $F(x, y) = p(X < x, Y < y) = p(X < x)p(Y < y) = F_X(x)F_Y(y)\ \forall\ x, y;$ (9.15)
2. для непрерывных – $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall\ x, y;$ (9.16)
3. для дискретных – $p_{ij} = p_i\, p_j$, для $\forall\ i, j$. (9.17)

Y \ X	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 2$
$y_1 = 3$	0,25	0,05	0,10
$y_2 = 6$	0,15	0,20	0,25

В сумме все эти вероятности должны давать 1

Числовые характеристики системы двух случайных величин

$\alpha_s = M\{X^s\}$ - начальный s-й момент

$\mu_s = M\{(X - m_X)^s\}$ - центральный s-й момент

$m_X = \alpha_1 = M\{X\}$ - математическое ожидание СВ X

$\boxed{\alpha_{k,s} = M\{X^k \cdot Y^s\}}$ - начальный k,s - й момент

$\boxed{\mu_{k,s} = M\{(X - m_X)^k \cdot (Y - m_Y)^s\}}$ - центральный k,s - й момент

(для дискретных СВ)

$$\alpha_{k,s} = \sum_i \sum_j x_i^k \cdot y_j^s \cdot p_{ij}$$

$$\mu_{k,s} = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)^k \cdot (y_j - m_Y)^s \cdot p_{ij}$$

$$p_{ij} = P(X = x_i,\ Y = y_j)$$

Вопрос 14. Зависимые и независимые случайные величины.

Зависимые и независимые случайные величины

Случайные величины X и Y называются **зависимыми**, если значения одной случайной величины влияют на распределение другой. Если же значения одной случайной величины не оказывают никакого влияния на распределение другой, то X и Y называются **независимыми**.

$\boxed{\omega(x|y)=\omega_1(x)}$ - для независимых случайных величин X и Y

1. Независимые случайные величины

Определение:

Случайные величины X и Y независимы, если для любых допустимых значений x и y выполняется:

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y).$$

Эквивалентные условия:

1. Для дискретных случайных величин:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y),$$

   где $P(X = x, Y = y)$ — совместная вероятность, а $P(X = x)$, $P(Y = y)$ — маргинальные вероятности.

2. Для непрерывных случайных величин:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y),$$

   где $f_{X,Y}(x, y)$ — совместная плотность вероятности, а $f_X(x)$, $f_Y(y)$ — маргинальные плотности.

$\boxed{\omega(x,y)=\omega_1(x)\cdot\omega_2(y)}$ - для независимых X и Y

$$\boxed{\omega(x,y)=\omega_1(x)\cdot\omega(y|x)=\omega_2(y)\cdot\omega(x|y)}$$

(для зависимых X и Y)

3. Если X и Y независимы, то условное распределение одной величины при фиксированном значении другой совпадает с её маргинальным распределением:

$$P(X \leq x | Y = y) = P(X \leq x).$$

Свойства независимых случайных величин:

1. **Математическое ожидание произведения:**

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

2. **Ковариация:** Если X и Y независимы, то $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Однако обратное неверно: $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ не обязательно означает независимость.

2. Зависимые случайные величины

Определение:

Случайные величины X и Y зависят, если существует хотя бы одна пара значений x и y, для которых:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \neq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y).$$

Признаки зависимости:

1. **Совместное распределение не раскладывается:** Если $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (в непрерывном случае) или $P(X = x, Y = y) \neq P(X = x) \cdot P(Y = y)$ (в дискретном случае), то X и Y зависят.

2. **Условное распределение не совпадает с маргинальным:** Если $P(X \leq x | Y = y) \neq P(X \leq x)$, то X и Y зависят.

4. Связь между зависимыми величинами

Зависимость между случайными величинами может быть различной:

1. **Линейная зависимость:** Если $Y = aX + b$, где a и b — константы, то X и Y линейно зависимы. В этом случае $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$.

2. **Нелинейная зависимость:** Пример: $Y = X^2$. Значения X и Y зависимы, но ковариация может быть нулевой.

Вопрос 15. Общее определение математического ожидания (МО) и его свойства.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины и определяется по формулам:

$$m_X = \mathrm{M}[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i \quad \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \quad \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (5.1)$$

где m_x обозначает число, полученное после вычислений по формуле (5.1);

M[X] - оператор математического ожидания.

Как видно из (5.1), в качестве математического ожидания используется «среднее взвешенное значение», причем каждое из значений случайной величины учитывается с «весом», пропорциональным вероятности этого значения.

Физический смысл математического ожидания – среднее значение случайной величины, т.е. то значение, которое может быть использовано вместо случайной величины в приблизительных расчетах или оценках .

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{M}[c] = c$.

Доказательство. Рассмотрим константу ***c***, как случайную дискретную величину, которая принимает одно значение ***c*** с вероятностью $p = 1$.

2. $\mathrm{M}[X+c] = \mathrm{M}[X]+c = m_X + c$.

Доказательство: $\mathrm{M}[X+c] = \int_{-\infty}^{\infty}(x+c)\cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} c\cdot f(x)dx = m_X + c$.

3. $\mathrm{M}[c \cdot X] = c \cdot \mathrm{M}[X] = c \cdot m_X$.

Доказательство: $\mathrm{M}[cX] = \int_{-\infty}^{\infty} cx \cdot f(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = c \cdot m_X$.

Вопрос 16. Дисперсия и ее свойства.

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формулам:

$$D_x = D[X] = \mu_2(x) = \alpha_2(\mathrm{x}) - m_X^2 = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N}(x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 p_i - m_X^2 \ \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 \ \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$.

Доказательство: $D[c] = M\left[(c - M[c])^2\right] = M\left[(c-c)^2\right] = M[0] = 0$.

2. $D[X+c] = D_X$.

Доказательство:

$$D[X+c] = M\left[(X+c-M[X+c])^2\right] = M\left[(X+c-m_X-c)^2\right] = M[(X-m_X)^2] = D_X ,$$

вытекает из свойства 3 математического ожидания. Оно становится понятным, если учесть, что величины X и $X+c$ отличаются лишь началом отсчета и рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково. Очевидно, что операция центрирования не изменяет дисперсию случайной величины:

$$D[\overset{\circ}{X}] = D[X - m_X] = D[X].$$

3. $D[c \cdot X] = c^2 \cdot D_X$.

Доказательство: $D[cX] = M[c^2X^2] - \left(M[cX]\right)^2 = c^2(M[X^2] - m_X^2) = c^2 D_X$.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины, поэтому для анализа диапазона значений величины X дисперсия не совсем удобна. Этого недостатка лишено среднее квадратическое отклонение (СКО), размерность которого совпадает с размерностью случайной величины.

Вопрос 17. Моменты распределения одномерной случайной величины.

Начальный момент k-го порядка случайной величины X есть математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k(x) = \mathrm{M}[X^k] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i^k \cdot p_i & \text{для ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx & \text{для НСВ}. \end{cases} \tag{5.2}$$

При k=0 $\alpha_0(x) = M[X^0] = M[1] = 1$;

k=1 $\alpha_1(x) = M[X^1] = M[X] = m_X$ – математическое ожидание;

k=2 $\alpha_2(x) = M[X^2]$.

Центрированной случайной величиной $\overset{\circ}{X}$ называется случайная величина, математическое ожидание которой находится в начале координат (в центре числовой оси), т.е. $M[\overset{\circ}{X}] = 0$.

Операция центрирования (переход от нецентрированной величины X к центрированной $\overset{\circ}{X}$) имеет вид

$$\overset{\circ}{X} = X - m_X \quad .$$

Центральный момент порядка k случайной величины X есть математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$:

$$\mu_k(x) = \mathrm{M}[\overset{\circ}{X}{}^k] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^k \cdot p_i & \textit{для ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k \cdot f(x)dx & \textit{для НСВ}. \end{cases} \tag{5.3}$$

При k=0 $\mu_0(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^0] = M[1] = 1$;

k=1 $\mu_1(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^1] = M[\overset{\circ}{X}] = 0$;

k=2 $\mu_2(x) = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = M[(X - m_X)^2] = M[X^2] - 2m_X M[X] + m_X^2 = \alpha_2 - m_x^2 = D_X$ - дисперсия.

Вопрос 18. Ковариация, коэффициент корреляции.

Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариация и коэффициент корреляции являются числовыми характеристиками, которые измеряют степень взаимосвязи между двумя случайными величинами.

---

1. Ковариация

Ковариация оценивает, как изменения одной случайной величины связаны с изменениями другой. Она определяется как:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])].$$

Эквивалентная форма:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y].$$

1.1 Свойства ковариации

1. **Если X и Y независимы, то $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$:** Однако, обратное утверждение неверно: нулевая ковариация не гарантирует независимость.
2. **Линейность:**
$$\mathrm{Cov}(aX+b,Y) = a\cdot\mathrm{Cov}(X,Y).$$
3. **Симметричность:**
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X).$$
4. **Ковариация случайной величины с самой собой равна дисперсии:**
$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X).$$

2. Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции измеряет силу и направление линейной связи между двумя случайными величинами. Определяется как:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y},$$

где:

- $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ — стандартное отклонение X,
- $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$ — стандартное отклонение Y.

2.1 Свойства коэффициента корреляции

1. **Диапазон значений:**
$$-1 \le \rho_{X,Y} \le 1.$$
2. **Интерпретация значений:**
   - $\rho_{X,Y}=1$: идеальная положительная линейная зависимость,
   - $\rho_{X,Y}=-1$: идеальная отрицательная линейная зависимость,
   - $\rho_{X,Y}=0$: отсутствует линейная зависимость (но может быть нелинейная связь).
3. **Безразмерность:** $\rho_{X,Y}$ не зависит от масштаба или единиц измерения X и Y.
4. **Симметричность:**
$$\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}.$$

3. Отличия ковариации и коэффициента корреляции

Критерий	Ковариация	Коэффициент корреляции
Определение	Мера линейной связи	Нормированная мера линейной связи
Диапазон значений	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
Зависимость от масштаба	Зависит от масштаба случайных величин	Не зависит от масштаба

Вопрос 19. Функции случайной величины (одномерное приближение).

Одномерное приближение изучает преобразование одной случайной величины X через функцию $Y = g(X)$. Основной задачей является определение характеристик случайной величины Y (распределения, плотности, математического ожидания, дисперсии и т.д.).

1. Преобразование для дискретной случайной величины

Если X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $P(X = x_i) = p_i$, то новая случайная величина $Y = g(X)$ принимает значения $y_j = g(x_i)$. Вероятности вычисляются как:

$$P(Y = y_j) = \sum_{x_i : g(x_i) = y_j} P(X = x_i).$$

2. Преобразование для непрерывной случайной величины

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_X(x)$, то плотность $f_Y(y)$ новой случайной величины $Y = g(X)$ определяется следующим образом.

Монотонная функция $g(x)$:

Если $g(x)$ строго монотонна и обратима, то:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|.$$

Немонотонная функция $g(x)$:

Если $g(x)$ немонотонна, область значений разбивается на интервалы, где $g(x)$ монотонна. Тогда:

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(x_i) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|_{x = x_i},$$

где сумма берётся по всем корням x_i, удовлетворяющим $g(x_i) = y$.

3. Характеристики $Y = g(X)$

1. **Математическое ожидание:**

   $$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx \quad \text{(для непрерывного } X\text{)},$$

   или

   $$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot P(X = x_i) \quad \text{(для дискретного } X\text{)}.$$

2. **Дисперсия:**

   $$\operatorname{Var}(g(X)) = \mathbb{E}[g^2(X)] - (\mathbb{E}[g(X)])^2.$$

Вопрос 20. Функции случайной величины (двумерное приближение).

Двумерное приближение изучает преобразование двух случайных величин X_1 и X_2 через функции $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ и $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$. Основной задачей является нахождение совместного распределения Y_1, Y_2.

1. Преобразование плотности

Пусть (X_1, X_2) имеют совместную плотность распределения $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Если $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ и $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$, то совместная плотность $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ вычисляется через якобиан:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \cdot |\det \mathbf{J}|,$$

где:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

— якобиан преобразования.

2. Характеристики двумерного распределения

1. **Совместное математическое ожидание**:

$$\mathbb{E}[g_1(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1, x_2) \cdot f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

2. **Совместная дисперсия и ковариация**:

$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}[(Y_1 - \mathbb{E}[Y_1])(Y_2 - \mathbb{E}[Y_2])].$$

Вопрос 21. Композиция распределения случайной величины

Если величины X_1 и X_2 независимы, то

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2. \qquad (10.5)$$

В случае, когда складываются независимые случайные величины, говорят о *композиции законов распределения*. Произвести композицию двух законов распределения – это значит найти закон распределения суммы двух независимых случайных величин, распределенных по этим законам (см. (10.5)).

Композиция законов распределения представляет собой определение законов распределения F(z) случайной величины z, являющейся суммой двух независимых случайных величин x и y, законы распределения которых известны: φ (x) и f(Y) В общем случае, если z = x + y и числовые характеристики известны, то

$$M(z)=M(x)+M(y),\ \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Закон распределения величины z = x + y выражается равенством

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(z - x) dx,$$

Вопрос 22. Характеристические функции и их свойства

Пусть $Y = e^{itX}$, где X – случайная величина с известным законом распределения, t – параметр, $i = \sqrt{-1}$.

Характеристической функцией случайной величины X называется математическое ожидание функции $Y = e^{itX}$:

$$\upsilon_X(t) = M[e^{itX}] = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k, \text{ для ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} f(x)dx, \text{ для НСВ}. \end{cases} \quad (7.12)$$

Таким образом, характеристическая функция $\upsilon_X(t)$ и закон распределения случайной величины однозначно связаны *преобразованием Фурье*. Например, плотность распределения $f(x)$ случайной величины X однозначно выражается через ее характеристическую функцию при помощи *обратного преобразования Фурье*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \upsilon(t) e^{-itX} dt. \quad (7.13)$$

Основные свойства характеристической функции:

1. Характеристическая функция величины $Z=aX+b$, где X – случайная величина с характеристической функцией $\upsilon_X(t)$, равна

$$\upsilon_Z(t) = M[e^{it(aX+b)}] = e^{itb} \upsilon_X(at). \quad (7.14)$$

2. Начальный момент k-го порядка случайной величины X равен

$$\alpha_k(x) = \upsilon_X^{(k)}(0) i^{-k}, \quad (7.15)$$

где $\upsilon_X^{(k)}(0)$ – значение k-й производной характеристической функции при $t = 0$.

3. Характеристическая функция суммы $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\upsilon_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \upsilon_{X_i}(t). \quad (7.16)$$

4. Характеристическая функция нормальной случайной величины с параметрами m и σ равна:

$$\upsilon_X(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \quad (7.17)$$

Вопрос 23. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева, теорема Чебышева.

https://e.vyatsu.ru/pluginfile.php/462560/mod_resource/content/2/3.3.%20%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB.pdf

Закон больших чисел. Основные понятия

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что с ростом числа повторных испытаний суммарное поведение случайных событий почти совсем утрачивает случайный характер и становится всё более прогнозируемым. Для практических целей важно знать, при выполнении каких условий это происходит.

Эти условия указываются в теоремах, которые носят название закона больших чисел. Закон больших чисел позволяет установить общую закономерность, присущую случайным событиям.

В частности, проявлением закона больших чисел служит тот факт, что вероятность больших отклонений относительной частоты от «истинного» значения вероятности случайного события уменьшается с ростом числа испытаний. Кроме того, при большом числе наблюдений факторы, не связанные с существом самого процесса, а проявляющиеся только случайным образом, взаимно погашаются.

Рассмотрим теоремы, отражающие суть закона больших чисел.

Закон больших чисел – совокупность теорем, определяющих условия стремления средних арифметических значений случайных величин к некоторой константе при проведении большого числа опытов.

Теорема Чебышева. Пусть произведены n одинаковых независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X приняла значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$. При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое значений случайной величины X сходится по вероятности к ее математическому ожиданию:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{p} m_X. \quad (12.2)$$

Неравенство Чебышева. Для любой случайной величины X с математическим ожиданием m_X и дисперсией D_X выполняют следующее неравенство:

$$p(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2}, \quad (12.1)$$

где $\varepsilon > 0$.

Вопрос 24. Теорема Бернулли.

Теорема Бернулли. Пусть произведены n одинаковых независимых опытов, в каждом из которых возможно событие A с вероятностью p. Тогда *частота* появления события A в n опытах сходится по вероятности к вероятности появления A в одном опыте

$$p^*(A) \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} p(A)\ , \qquad (12.3)$$

где $p^*(A) = \dfrac{m}{n}$ - частота события A в n опытах;

m - число опытов в которых произошло событие A;

n - число проведенных опытов.

Пусть случайная величина X – индикатор события A:

$$X = \begin{cases} 1\ ,\ A \\ 0\ ,\ \overline{A} \end{cases},$$

тогда X_i – индикатор события A в i-м опыте.

Числовые характеристики индикатора X случайного события (см. (6.1)):

$$m_X = p\,, D_X = qp\ ,$$

где $q = 1 - p$ - вероятность осуществления $\overline{A}$.

Применим теорему Чебышева:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{m}{n} = p^*(A) \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} m_X = p = p(A)\,.$$

Вопрос 25. Центральная предельная теорема.

Теорема. Если $X_1...X_n$- независимые случайные величины, имеющие примерно одинаковые дисперсии $D_i \approx D$ для $\forall i$, то при неограниченном увеличении n ($n\to\infty$) закон распределения их суммы $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами:

$$m_Y = \sum_{i=1}^{n} m_i,\ \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}\ . \qquad (12.10)$$

Требование $D_i \approx D, \forall i$ означает, что ни одно из слагаемых не носит доминирующего характера (влияние всех X_i на сумму Y приблизительно одинаково).

Таким образом, нормальное распределение возникает тогда, когда суммируется много независимых (или слабо зависимых) случайных величин, сравнимых по порядку своего влияния на рассеивание суммы. На практике такая обстановка встречается нередко. Пусть рассматривается отклонение Y какого-то параметра, например, радиоэлектронного устройства от номинала. Это отклонение (при известных допущениях) может быть представлено как сумма n элементарных отклонений, связанных с отдельными причинами:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

где, например:

X_1 — отклонение, вызванное влиянием температуры;

X_2— отклонение, вызванное влиянием влажности воздуха;

X_3 — отклонение, вызнанное недостаточной чистотой материала изделия;

………………………………………………..

X_n — отклонение, вызнанное недостаточной чистотой материала изделия;

Число n этих элементарных отклонении весьма велико, как и число n причин, вызывающих суммарное отклонение Y. Обычно слагаемые $X_1, X_2,...,X_n$ сравнимы по порядку своего влияния на рассеивание суммы. Действительно, если бы какая-то из случайных величин $X_1, X_2,...,X_n$ оказывала существенно

Вопрос 26. Основные законы распределения вероятностей Случайной величины. Биномиальный, Пуассоновский законы.

Индикатор случайного события A – это дискретная случайная величина X, которая равна 1 при осуществлении события A и 0 при осуществлении $\bar{A}$:

$$X = \begin{cases} 1, & A \\ 0, & \bar{A} \end{cases}.$$

Ряд распределения вероятностей индикатора случайного события:

x_i	0	1
p_i	q	p

где p – вероятность осуществления A;
$q = 1-p$ – вероятность осуществления $\bar{A}$.

Числовые характеристики индикатора случайного события:

$$m_X = p, D_X = qp. \quad (6.1)$$

Биномиальное распределение имеет дискретная случайная величина X, если она принимает значения 0, 1, … , n со следующими вероятностями:

$$p(X=i) = p_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i}, \quad (6.4)$$

где n, p – параметры распределения ($0 \le p \le 1$), $q = 1 - p$.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$m_X = np, D_X = nqp. \quad (6.5)$$

Условия возникновения. Проводится n одинаковых независимых , в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Случайная величина X – число опытов, в которых произошло событие A (см. теорему о повторении опытов).

Распределение Пуассона имеет дискретная случайная величина X, если она принимает значения 0, 1, … , ∞ со следующими вероятностями:

$$p(X=i) = p_i = \frac{a^i}{i!} e^{-a}, \quad (6.6)$$

где a – параметр распределения ($a > 0$).

Числовые характеристики пуассоновской случайной величины:

$$m_X = a, D_X = a. \quad (6.7)$$

Условия возникновения:

1). Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального, когда число опытов n неограниченно увеличивается, а вероятность p события A в одном опыте стремится к 0, так что существует предел $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} np = a$ (см. формулу (3.10)).

2). Случайная величина X – число событий пуассоновского потока поступивших в течение интервала τ, причем параметр $a = \tau\lambda$, где λ - интенсивность потока.

Рассмотрим временную ось, на которой будем отмечать моменты возникновения случайных событий. Последовательность таких моментов называется ***<u>потоком случайных событий.</u>***

Поток случайных событий называется ***<u>стационарным</u>***, если среднее число событий в единице времени λ постоянно.

Поток случайных событий называется ***<u>ординарным</u>***, если вероятность попадания в некоторый участок Δ t двух и более случайных событий значительно меньше, чем вероятность попадания 1-го события.

В потоке ***<u>отсутствует последействие,</u>*** если вероятность попадания событий на участок τ не зависит от того, сколько событий попало на другие участки, не пересекающиеся с данным.

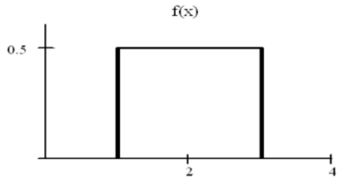
Поток случайных событий называется ***<u>пуассоновским</u>***, если он является стационарным, ординарным и без последействия.

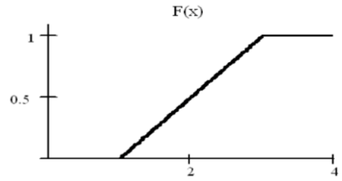
Вопрос 27. Равномерное, экспоненциальное распределение случайной величины.

Равномерное распределение имеет непрерывная случайная величина X, если ее плотность вероятности в некотором интервале $[a; b]$ постоянна, т.е. если все значения X в этом интервале равновероятны:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b, \\ 0, x > b. \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \le x \le b, \\ 1, x > b. \end{cases} \tag{6.8}$$

Ниже приведены графики плотности и функции равномерного распределения при b=3 и a =1.





Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины:

$$m_X = \frac{a+b}{2}, D_X = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{6.9}$$

При необходимости определения параметров a и b по известным m_X, D_X используют следующие формулы:

$$a = m_X + \sigma_X \sqrt{3},\ b = m_X - \sigma_X \sqrt{3} \tag{6.10}$$

Условия возникновения:

1) Случайная величина X - ошибки округления при ограниченной разрядной сетке:

- округление до меньшего целого, $X \in [-1,0], m_X = -0,5$,
- округление до большего целого, $X \in [-0,1], m_X = 0,5$,
- округление до ближайшего целого, $X \in [-0,5;0,5], m_X = 0$,

где 1 – вес младшего разряда.

2) Случайная величина X - погрешность считывания значений с аналоговой шкалы измерительного прибора, $X \in [-0,5;0,5], m_X = 0$, где 1 – цена деления шкалы.

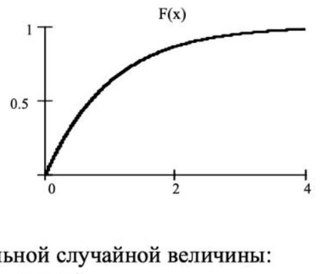
3) Генераторы псевдослучайных величин, например RANDOM, встроенные в языки программирования высокого уровня.

Экспоненциальное распределение имеет непрерывная случайная величина T, принимающая только положительные значения, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0, \\ 0, t < 0. \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \ge 0, \\ 0, t < 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

где λ – параметр распределения (λ >0).

Ниже приведены графики плотности и функции экспоненциального распределения при λ =1.



Числовые характеристики экспоненциальной случайной величины:

$$m_T = 1/\lambda, D_T = 1/\lambda^2. \tag{6.12}$$

Условия возникновения. Случайная величина T – интервал времени между двумя соседними событиями в простейшем или Пуассоновском потоке случайных событий, причем параметр распределения λ – интенсивность потока.

Вопрос 28. Нормальное распределение. Функция Лапласа.

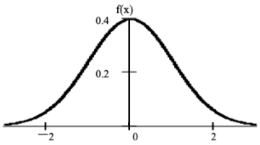
Нормальное распределение (распределение Гаусса) имеет непрерывная случайная величина *X*, если ее плотность вероятности и функция распределения равны:

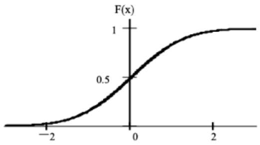
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad F(x) = 0.5 + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \quad (6.13)$$

где *m*, σ - параметры распределения (σ >0),

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ — функция Лапласа.

Ниже приведены графики плотности и функции нормального распределения при m =1, σ =1.





Так как первообразная для e^{-x^2} в аналитическом виде не существует, то для вычисления значений функции распределения и вероятностей событий, связанных с нормальной случайной величиной используется табулированная функция Лапласа. При использовании таблицы значений функции Лапласа следует учитывать, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 0{,}5$.

Числовые характеристики нормальной случайной величины:

$$m_X = m, D_X = \sigma^2; \quad (6.14)$$

$$\alpha_k(x) = k! \sum_{i=0}^{I[k/2]} \frac{m^{k-2i}(\sigma/2)^i}{(k-2i)!i!}; \quad (6.15)$$

$$\mu_k(x) = \begin{cases} 0, k - \text{нечетное}, \\ \dfrac{k!}{(k/2)!}\left(\dfrac{\sigma^2}{2}\right)^{k/2}, k - \text{четное}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Условия возникновения. Это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения (см. лекцию 12; (***центральную предельную теорему***)). Например, нормальный закон распределения имеют:

- погрешности измерительных приборов; при этом откалиброванный прибор не имеет систематической погрешности, т.е. *m=0,* а величина σ определяется классом точности измерительного прибора;

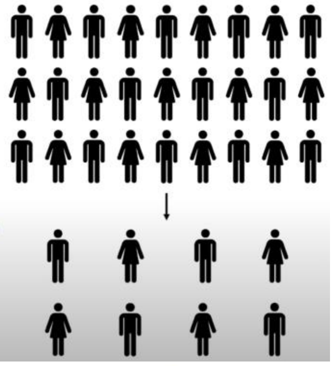
- параметры радиоэлектронных компонентов (резисторов, конденсаторов, т.п.), причем *m* – номинальное значение, указанное на маркировке, а σ определяется классом точности.

Вопрос 29. Основные понятия математической статистики (выборка, вариационный ряд, гистограмма).

В чем отличие?

- **Генеральная совокупность** (population) – это совокупность всех объектов, обладающих общими признаками и относительно которых нам хочется делать какие-либо выводы при анализе некоторой конкретной задачи.
  Признаки, по которым мы разделяем объекты, могут быть абсолютно любыми: территориальное положение, возраст, уровень доходов и многие-многие другие.

- **Выборочная совокупность** или **выборка** (sample) – та часть генеральной совокупности, которую мы отбираем в рамках эксперимента и на основе которой мы будем описывать или охарактеризовывать генеральную совокупность.



Для чего вообще нужны выборки, если есть генеральная совокупность?

- Зачастую (практически всегда!) получить информацию и собрать данные о каждом или даже почти каждом элементе генеральной совокупности не представляется возможным. В связи с этим возникает необходимость в формировании выборки, то есть некоторой репрезентативной подгруппы генеральной совокупности.
  Такой процесс формирования выборки называется отбором или **семплированием** (sampling).

Какие существуют методы семплирования?

Вероятностные методы семплирования (probability sampling) • каждый элемент генеральной совокупности имеет шанс быть выбранным • возможность добиться репрезентативной выборки • большое количество тонкостей реализации процедуры отбора		**Невероятностные методы семплирования** (non-probability sampling) • неслучайный критерий отбора элементов генеральной совокупности • простота процедуры отбора • высокий риск возникновения выборочного смещения (sample bias)	
Случайный отбор (simple random sample)	**Систематический отбор** (systematic sample)	Convenience sample	Voluntary response sample
Стратифицированный отбор (stratified sample)	**Кластерный отбор** (cluster sample)	Purposive sample	Snowball sample

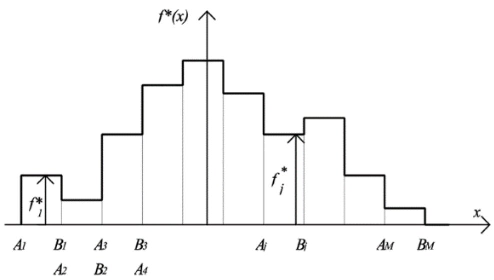
Генеральной совокупностью опыта называется множество объектов, из которых производится выборка. Каждый из объектов задает фиксированное значение случайной величины *X*. Количество (*N)* входящих в генеральную совокупность объектов называют *объемом генеральной совокупности.* Она может состоять из бесчисленного множества объектов.

Вариационным рядом называется выборка $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n\}$, полученная в результате расположения значений исходной выборки в порядке возрастания. Значения €$_i$ называются вариантами.

Выборка - множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ случайно отобранных объектов (значений) из генеральной совокупности. *Объемом* выборки *n* называется число входящих в нее объектов. К выборке предъявляется требование, чтобы она адекватно представляла генеральную совокупность, т.е. была *репрезентативной*

Гистограмма - статистический аналог графика плотности вероятности $f^*(x)$ случайной величины, и она строится по интервальному статистическому ряду. *Гистограмма* представляет собой совокупность прямоугольников, построенных, как на основаниях, на интервалах h_j статистического ряда с высотой равной статистической плотности вероятности f_j^* в соответствующем интервале.

Для равноинтервального метода все прямоугольники гистограммы имеют одинаковую ширину, а для равновероятностного метода – одинаковую площадь. Сумма площадей всех прямоугольников гистограммы равна 1. Достоинства гистограммы: простота построения, высокая наглядность.



Вопрос 30. Метод моментов.

Основа метода - приравнивание теоретических моментов распред к ~~выборки~~ эмпирическим.

Попарно приравниваем теор. моменты к их выборочным значениям.

Например:

Выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$. Найти оценки параметров норм. распред. с пом. метода моментов.

1) Параметры m и σ

($m = m_x$, $\sigma^2 = D_x$)

$$D[x] = \frac{\sum(x_i - \bar{x}_в)^2}{n}$$

$\boxed{m} = \bar{x}_в$ (среднее выборочное) (арифметич)

$$\frac{\sum(x_i - \bar{x}_в)^2}{n} = \sigma^2 \to \boxed{\sigma}$$

Вопрос 31. Метод наибольшего правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия

Основа метода: составл. фун. правдопо. (она - это произведение ~~функ~~ пл-тей вер. совместного появл. рез-ов выборк $x_1, x_2, \dots, x_n$: $L(x_1, x_2 \dots) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot \dots$

По простому: берём $f(x)$ и умножаем её на саму себя столько раз, сколько испыт. было

В качестве параметра берёт тот, который максимизирует $L(x..)$

1) $L(x..)$
2) $(\ln L)'$ по θ, т.е $\frac{d\ln L}{d\theta}$
3) $\dots = 0$, находим т. MAX

Пример решения

1) У нас есть выборка $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Есть нормальный закон распред., σ - изв. Нужно найти m?
2) Составим L, т.е
$L = f(x_1)\cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$
(Получилось большое ур, упрощаем)
3) Находим $\ln L$
4) Находим $\frac{d\ln L}{d\theta}$ ($\theta = m$) параметр
5) Прир. п.4 $= 0$
6) Найти т. максимума (её принимают в кач. оценки макс. правдоподобия)

Вопрос 32. Свойства оценок. Смещение оценки. Состоятельность, эффект оценки

Статистической оценкой $\hat{Q}$ параметра Q распределения называется приближенное значение параметра, вычисленное по результатам эксперимента (по выборке). Статистические оценки делятся на точечные и интервальные.

Точечной называется оценка, определяемая одним числом. Точечная оценка $\hat{Q}$ параметра Q случайной величины X в общем случае равна

$$\hat{Q} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{14.1}$$

где x_i – значения выборки.

Очевидно, что оценка $\hat{Q}$ – это случайная величина, так как она является функцией от n-мерной случайной величины (X_1, X_2, …, X_n), где X_i – значение величины X в i-м опыте, и значения $\hat{Q}$ будут изменяться от выборки к выборке случайным образом. К оценкам предъявляется ряд требований.

1. Оценка $\hat{Q}$ называется ***состоятельной***, если при увеличении объема выборки n она сходится по вероятности к значению параметра Q:

$$\hat{Q} \xrightarrow[n\to\infty]{p} Q \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(P(|\hat{Q} - Q| < \varepsilon)) = 1, \forall \varepsilon > 0. \tag{14.2}$$

Состоятельность – это минимальное требование к оценкам.

2. Оценка $\hat{Q}$ называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание точно равно параметру Q для любого объема выборки:

$$\mathrm{M}\,[\hat{Q}\,] = Q, \forall\, n. \tag{14.3}$$

Несмещенная оценка является состоятельной, если $\lim\limits_{n\to\infty} D\left[\hat{Q}\right] = 0$.

3. Несмещенная оценка $\hat{Q}$ является ***эффективной***, если ее дисперсия минимальна по отношению к дисперсии любой другой оценки этого параметра:

$$D\left[\hat{Q}\right] = \min. \tag{14.4}$$

Вопрос 33. Гамма-функция и ее свойства

Гамма-функция – фундаментальное понятие в области статистики, которое расширяет концепцию факториалов на комплексные и нецелые значения. В статистике широко используется гамма-распределение, частными случаями которого являются экспоненциальное распределение и распределение хи-квадрат Гамма-функция не выражается через элементарные функции, ее математическое определение дается интегральной формулой:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Этот интеграл сходится для всех комплексных чисел, за исключением целых неположительных чисел.

Свойства гамма-функции:

1) Для натуральных значений аргумента гамма-функция
2) совпадает со значением факториала:

$$\Gamma(n) = (n-1)!,\quad n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

3) Для любых комплексных значений аргумента справедливо равенство:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z).$$

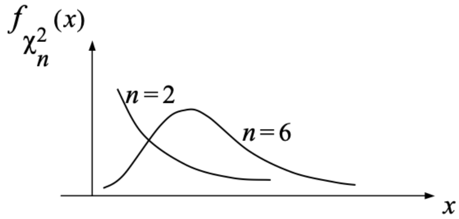
4) Также гамма-функция обладает свойствами симметрии и отражения
5) Связь с бета-функцией:

$$\mathrm{B}(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y).$$

Вопрос 34. Распределение Хи-квадрата.

Распределение χ^2

Сумма квадратов n независимых стандартных нормальных случайных величин $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \chi_n^2$ называется случайной величиной χ_n^2 (с n степенями свободы). Плотность вероятности распределения χ_n^2 табулирована, ее график имеет вид, представленный на рисунке:



Для распределения χ_n^2 имеют место следующие соотношения: $M[\chi_n^2]= n$, $D[\chi_n^2]= 2n$, $Mo[\chi_n^2] = n-2$. Заметим, что с ростом n кривая

$f_{\chi_n^2}(x)$ становится более симметричной, а ее максимум смещается вправо.

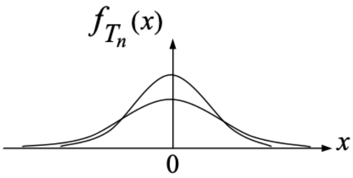
Заметим также, что в силу центральной предельной теоремы центрированная и нормированная случайная величина $\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} N(0;1)$ асимптотически нормальна, поэтому в таблицах для распределения χ_n^2 приводятся квантили только для $n \le 30$.

Вопрос 35. Распределение Стьюдента, Фишера.

Распределение Стьюдента

Пусть случайные величины $X \sim N(0;1)$ и χ_n^2 – независимы.

Случайная величина $T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ называется отношением Стьюдента (t–отношением). Плотность вероятности распределения Стьюдента табулирована, ее график имеет вид, представленный на рисунке:



Распределение $f_{T_n}(x)$ симметрично, $M[T_n]=0$ и имеет место асимптотическое свойство: $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} N(0;1)$.

При малых значениях n распределение Стьюдента заметно отличается от стандартного нормального распределения, однако при n >30 эти распределения близки.

Лемма Фишера (о совместном распределении $\bar{X}$ и S^2 для выборки из нормального распределения)

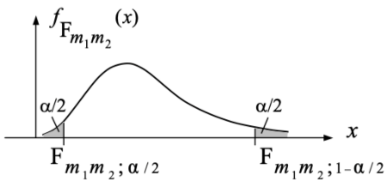
Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $N(m;\sigma)$ тогда:

- выборочное среднее $\bar{X}$ и выборочная дисперсия S^2 (или исправленная выборочная дисперсия S^{*2}) – взаимно независимы;
- выборочное среднее $\bar{X}$ подчиняется нормальному распределению: $\bar{X} \sim N(m;\sigma/\sqrt{n})$;
- случайная величина $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ (или $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2}$) распределена по закону χ^2_{n-1} (с $n-1$ степенью свободы).

Заметим, что из леммы Фишера следует независимость $\bar{X}$ и $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$, а также $\bar{X}$ и $\dfrac{(n-1)\,S^{*2}}{\sigma^2}$.

Распределение Фишера:

Пусть случайные величины $\chi^2_{m_1}$ и $\chi^2_{m_2}$ – независимы. Случайная величина $F_{m_1 m_2} = \dfrac{\chi^2_{m_1}/m_1}{\chi^2_{m_2}/m_2}$ – отношение Фишера (F– отношение) подчиняется распределению Фишера с m_1 и m_2 степенями свободы; плотность вероятности $f_{F_{m_1 m_2}}(x)$ – известна (табулирована).



Вопрос 36. Интервальные оценки. Доверительный интервал для МО случайной величины X при известной дисперсии

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, внутри которого, предположительно, находится истинное значение параметра. Интервальные оценки являются более полными и надежными по сравнению с точными
(которые определяются лишь одним числом),
они применяются как для больших, так и для малых выборок.

Пусть для параметра Q получена из опыта несмещенная оценка $\hat{Q}$. Оценим возможную ошибку, возникающую при замене параметра Q его оценкой $\hat{Q}$. Возьмем достаточно большую вероятность γ, такую, что событие с вероятностью γ можно считать практически достоверным, и найдем такое значение ε, для которого

$$p(|\hat{Q} - Q| < \varepsilon) = \gamma . \qquad (14.20)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене Q на $\hat{Q}$, будет ±ε; большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью $\alpha = 1 - \gamma$. Равенство (14.19) означает, что с вероятностью γ неизвестное значение параметра Q попадает в интервал

$$I_\gamma = (\hat{Q} - \varepsilon ; \hat{Q} - \varepsilon) . \qquad (14.21)$$

Доверительным называется интервал I_γ, в который с заданной вероятностью (*надежностью*) γ попадают значения параметра Q. Вероятность γ выбирается близкой к 1: 0,9; 0,95; 0,975; 0,99.

Доверительный интервал для математического ожидания. Интервал I_γ для математического ожидания случайной величины X с неизвестным законом распределения имеет вид

$$\bar{x} - \frac{S_0 \cdot z_\gamma}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + \frac{S_0 \cdot z_\gamma}{\sqrt{n}} , \qquad (14.22)$$

где $z_\gamma = \arg \Phi(\frac{\gamma}{2})$ – значение аргумента функции Лапласа, т.е. $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

Вопрос 37. Доверительный интервал для МО случайной величины X при неизвестной дисперсии

Доверительный интервал с надежностью γ для математического ожидания имеет вид

$$\bar{x} - \frac{S_0 \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}} < m_X < \bar{x} + \frac{S_0 \cdot t_{\gamma,n-1}}{\sqrt{n}}, \tag{14.24}$$

где $t_{\gamma,n-1}$ – значение, взятое из таблицы распределения Стьюдента.

Вопрос 38. Доверительный интервал для дисперсии Q^2 нормальной случайной величины X

Доверительный интервал надежностью γ для дисперсии нормально распределенной случайной величины X:

$$\frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}} < D_X < \frac{(n-1)S_0^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}}, \tag{14.4}$$

где $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}$, $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ – значения, взятые из таблицы распределения χ^2 (прил. 4).

Вопрос 39. Теория статистических проверенных гипотез. Критерии, мощность критерия

Статистической гипотезой называется всякое непротиворечивое множество утверждений $\{H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}\}$ относительно свойств распределения случайной величины. Любое из утверждений H_i называется альтернативой гипотезы. Простейшей гипотезой является двухальтернативная: $\{H_0, H_1\}$. В этом случае альтернативу H_0 называют нулевой гипотезой, а H_1-конкурирующей гипотезой.

Критерием называется случайная величина $U = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$,где x_i – значения выборки, которая позволяет принять или отклонить нулевую гипотезу H_0 Значения критерия, при которых гипотеза H_0 отвергается, образуют критическую область проверяемой гипотезы, а значения критерия, при которых гипотезу принимают, область принятия гипотезы (область допустимых значений). *Критические точки* отделяют критическую область от области принятия гипотезы.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отклонена гипотеза H_0, если она верна ("пропуск цели"). Вероятность совершить ошибку первого рода обозначается α и называется *уровнем значимости*. Наиболее часто на практике принимают, что $\alpha = 0{,}05$ или $\alpha = 0{,}01$.

Ошибка второго рода заключается в том, что гипотеза H_0 принимается, если она неверна ("ложное срабатывание"). Вероятность ошибки этого рода обозначается β. Вероятность не допустить ошибку второго рода (1-β) называют *мощностью критерия*. Для нахождения мощности критерия необходимо знать плотность вероятности критерия при альтернативной гипотезе. Простые критерии с заданным уровнем значимости контролируют лишь ошибки первого рода и не учитывают мощность критерия.

Проверка статистич. гипотез
- Статистич. гипотеза - любое предположение о св-х распределения вероятностей, лежащего в основе наблюдаемых явлений.
- Гипотеза H_0 - основная (нулевая) Нам было бы желательно убедиться в её справедливости (Гипотеза об отсутствии различий)

Гип. $H_1, H_2, \ldots$ - альтернативные (противопоставл. гип. H_0)
- Критерий - решающее правило, по которому принимают или отвергают гипотезы

Ошибка первого рода, ошибка второго рода

Уровень доверия   Мощность критерия

Уменьшаем ошибку первого рода

Проверка статистических гипотез

1) Выбирается критерий K так, чтобы если H_0 - верна, распред. св было известным: $K = K(X_1, X_2, \ldots X_n)$
2) Вычисл. эмпирического зн-я критерия (по сетом данных в д.)
3) Выбор критич. зн-ий K_1 и K_2 - зависит от ошибки 1-ого рода
4) Сравнение критич. и эмпирич зн-ий => вывод.

Критич обл - если в эту обл. попад. эмпирич. зн, то H_0 - отверг. H_1 - принимает

Вопрос 40. Проверка гипотез равенства МО (при неизвестной дисперсии).

https://youtu.be/QGjqONWV1uA?si=idODbuzahaLuBBM6

1. **Нулевая гипотеза H_0:**

$$\mu_1 = \mu_2$$

(Средние равны, то есть разницы нет.)

2. **Альтернативная гипотеза H_1:**

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

(Средние различаются, двусторонняя проверка.)

Альтернативная гипотеза может быть также односторонней, например:

- $\mu_1 > \mu_2$ (правосторонняя проверка),
- $\mu_1 < \mu_2$ (левосторонняя проверка).

Критерий Стьюдента

Для проверки гипотез используется следующая тестовая статистика:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

где:

- $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ — выборочные средние двух выборок,
- n_1, n_2 — объемы выборок,
- S_p — объединенная оценка стандартного отклонения, вычисляемая по формуле:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

где S_1^2, S_2^2 — выборочные дисперсии двух выборок.

Порядок выполнения проверки

1. **Собрать данные:**
Вычислить $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2, n_1, n_2$.

2. **Вычислить объединенную стандартную ошибку S_p:**

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

3. **Вычислить значение статистики t:**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

4. **Определить критическое значение $t_{\text{кр}}$:** Использовать таблицу t-распределения Стьюдента с $df = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы и заданным уровнем значимости α (обычно $\alpha = 0.05$).

5. **Принять решение:**

- Если $|t| > t_{\text{кр}}$, отвергнуть H_0 в пользу H_1.
- Если $|t| \leq t_{\text{кр}}$, нет оснований отвергать H_0.

Вопрос 41. Проверка гипотез о равенстве дисперсии.
Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух выборок используется F-критерий Фишера.

Формулировка гипотез

1. **Нулевая гипотеза (H_0):**

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

(Дисперсии генеральных совокупностей равны.)

2. **Альтернативная гипотеза (H_1):**

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

(Дисперсии различны, двусторонняя проверка.)

Альтернативная гипотеза может быть односторонней:

- $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (правосторонняя проверка),
- $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (левосторонняя проверка).

Критерий Фишера

Статистика F рассчитывается как отношение выборочных дисперсий:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2},$$

где S_1^2 и S_2^2 — выборочные дисперсии первой и второй выборок соответственно.

Важно: S_1^2 должно быть больше S_2^2, чтобы F-статистика была больше 1.

Порядок выполнения проверки

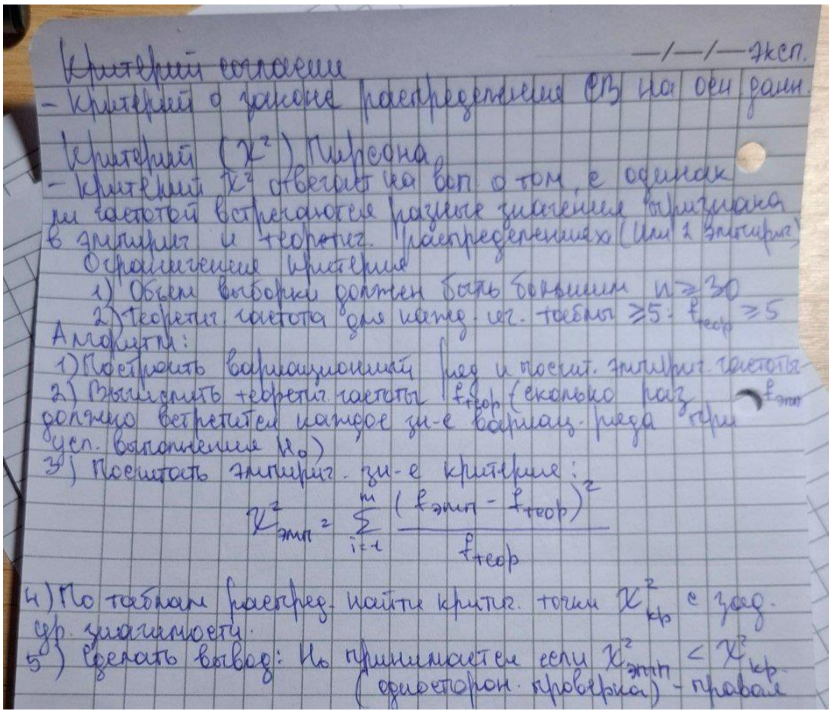
1. **Собрать данные:**
Вычислить выборочные дисперсии S_1^2 и S_2^2, а также объемы выборок n_1 и n_2.
2. **Вычислить статистику F:**

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

3. **Определить критическое значение $F_{\text{кр}}$:**
Использовать таблицу F-распределения с $df_1 = n_1 - 1$ и $df_2 = n_2 - 1$ степенями свободы для заданного уровня значимости α.
4. **Принять решение:**
   - Если $F > F_{\text{кр}}$ для одностороннего теста или $F \notin [F_{\text{кр}}^{\min}, F_{\text{кр}}^{\max}]$ для двустороннего теста, отвергнуть H_0.
   - Если $F \leq F_{\text{кр}}$, нет оснований отвергать H_0.

Вопрос 42. Критерии согласия Хи-квадрат.

https://youtu.be/hMSL_bnDB7k?si=YC_0Txrtnt_e6lJz



Критерий согласия —/—/— Эксп.

– критерий о законе распределения СВ на осн. данн.

Критерий (χ^2) Пирсона

– критерий χ^2 отвечает на вопр. о том, с одинак. ли частотой встречаются разные значения признака в эмпирич. и теоретич. распределениях (или 2 эмпирич.)

Ограничения критерия

1) Объем выборки должен быть большим $n \geq 30$

2) теоретич. частота для кажд. яч. табл. ≥ 5: $f_{теор} \geq 5$

Алгоритм:

1) Построить вариационный ряд и посчит. эмпирич. частоты $f_{эмп}$

2) Вычислить теоретич. частоты $f_{теор}$ (сколько раз должно встретится каждое зн-е вариац. ряда при усл. выполнения H_0)

3) Посчитать эмпирич. зн-е критерия:

$$\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(f_{эмп} - f_{теор})^2}{f_{теор}}$$

4) По табл. распред. найти критич. точки $\chi^2_{кр}$ с зад. ур. значимости.

5) Сделать вывод: H_0 принимается если $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$ (односторон. проверка) – правая

Вопрос 43. Линейный регрессионный анализ.
Уравнение линейной регрессии

Пусть проводится n независимых опытов, в каждом из которых двухмерная случайная величина $(X,У)$ принимает определенные значения и результаты опытов представляют собой двумерную выборку вида $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$. Необходимо на основании имеющейся выборки выявить характер связи между величинами X, Y, т.е. получить оценку условного математического ожидания $m^*_{Y/x}$ – оценку регрессии Y на x. Данная оценка представляет собой некоторую функцию:

$$m^*_{Y/x} = \bar{y}(x) = \varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_m),$$

Регрессией случайной величины Y на X называется условное математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x$:

$$m_{Y/x} = M[Y / X = x] \; .$$

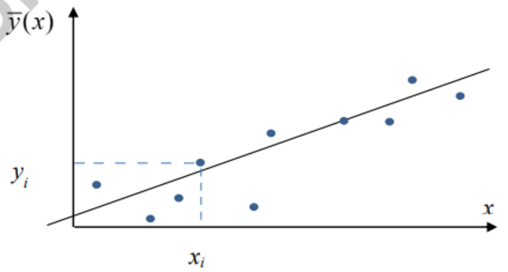
Регрессия Y на X устанавливает зависимость среднего значения величины Y от величины X. Если X и Y независимы, то

$$m_{Y/x} = m_Y = \text{const}.$$

Если величины X, Y распределены по нормальному закону, то регрессия является линейной:

$$m_{Y/x} = a_0 + a_1 x.$$

Для визуальной проверки правильности вычисления величин $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ необходимо построить диаграмму рассеивания и график $\bar{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$.



Если оценки параметров a_0, a_1 рассчитаны без грубых ошибок, то сумма квадратов отклонений всех точек (x_i, y_i) от прямой $\bar{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ должна быть минимально возможной.

Вопрос 44. Метод наименьших квадратов

Суть данного метода заключается в том, что значения параметров $a_0, a_1, ..., a_m$ необходимо выбрать так, чтобы *сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от сглаживающей кривой обращалась в минимум:*

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a_0, \ldots, a_m)]^2 = \min \qquad (17.1)$$

Найдем значения $a_j, j = 1,...,m$, обращающие левую часть выражения (17.1) в минимум. Для этого продифференцируем его по $a_j, j = 1,...,m$, и приравняем производные к нулю (в точке экстремума производная равна нулю):

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a_0, ..., a_m)] \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial a_j} = 0,\ j = 0,1,...m, \qquad (17.2)$$

где $\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial a_j}$ – значение частной производной функции φ по параметру a_j в точке x_i.

Система уравнений (17.2) содержит столько же уравнений, сколько неизвестных параметров, т.е. $m+1$.

Решить систему (17.2) в общем виде нельзя; для этого необходимо задаться конкретным видом функции φ.

Пусть y представляет собой степенной ряд:

$$y = \varphi(x, a_0, ..., a_m) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j. \qquad (17.3)$$

Тогда (17.2) примет вид системы линейных уравнений (СЛУ):

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{j+k} = \sum_{i=1}^{n} y_i (x_i)^k, k = 0,1,....,m \qquad (17.4)$$

Поделим обе части уравнений на объем выборки n, система примет вид

$$\sum_{j=0}^{m} a_j \hat{\alpha}_{j+k}(x_i) = \hat{\alpha}_{k,1}(x_i, y_i), k = 0,1,....,m \qquad (17.5)$$

где $\hat{\alpha}_k(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$ - оценка начального момента k-го порядка величины X;

$\hat{\alpha}_{k,1}(x, y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_i$ – оценка смешанного начального момента порядка $k+1$ величин X и Y.

Переменными в системе (17.4) являются $a_j, j = 1,...,m$, а вычисленные по исходной выборке оценки начальных моментов являются коэффициентами СЛУ. Решив данную систему, мы определим оценки параметров $\hat{a}_0, \hat{a}_1, ..., \hat{a}_m$, обеспечивающие наилучшее согласование кривой $y = \varphi(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ и экспериментальных точек $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$.

Вопрос 45. Коэффициент корреляции (оценки).

Оценка корреляционного момента. Состоятельная несмещенная *оценка корреляционного момента* равна

$$K_{XY}^* = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}), \qquad (16.5)$$

где x_i, y_i - значения, которые приняли случайные величины X, Y в i-м опыте;

$\overline{x}, \overline{y}$ - средние значения случайных величин X и Y соответственно.

Оценка коэффициента корреляции. Состоятельная *оценка коэффициента корреляции* равна

$$R_{XY}^* = \frac{K_{XY}^*}{S_0(x) S_0(y)}, \qquad (16.6)$$

где $S_0(x), S_0(y)$ - оценки среднеквадратического отклонения случайных величин X и Y соответственно.

Доверительный интервал для коэффициента корреляции с надежностью γ для случая двумерного нормального распределения имеет вид

$$\frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} < R_{XY} < \frac{e^{2b} - 1}{e^{2b} + 1}, \qquad (16.7)$$

где $a = 0,5 \cdot \ln\left(\frac{1 + R_{XY}^*}{1 - R_{XY}^*}\right) - \frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$; $b = 0,5 \cdot \ln\left(\frac{1 + R_{XY}^*}{1 - R_{XY}^*}\right) + \frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$;

$z_\gamma = \arg \Phi(\frac{\gamma}{2})$ - значение аргумента функции Лапласа, т.е. $\Phi(z_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

Вопрос 46. Построение доверительного интервала для коэффициента уравнения регрессии.

Рассмотрим задачу построения доверительного интервала для коэффициента β в линейной регрессии. Пусть уравнение регрессии имеет вид:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

где β_1 — это коэффициент наклона, для которого мы строим доверительный интервал, а ε — случайная ошибка.

Формула доверительного интервала

Доверительный интервал для коэффициента регрессии β_1 рассчитывается как:

$$\beta_1 \pm t_{\alpha/2} \cdot \mathrm{SE}(\beta_1),$$

где:

- β_1 — оценка коэффициента наклона, полученная из выборки;
- $t_{\alpha/2}$ — критическое значение t-распределения Стьюдента для заданного уровня значимости α и числа степеней свободы $df = n - k - 1$, где n — число наблюдений, k — число предикторов (регрессоров);
- $\mathrm{SE}(\beta_1)$ — стандартная ошибка оценки коэффициента.

Стандартная ошибка коэффициента β_1:

Стандартная ошибка рассчитывается по формуле:

$$\mathrm{SE}(\beta_1) = \sqrt{\frac{\mathrm{RSS}}{(n-2) \cdot S_{xx}}},$$

где:

- $\mathrm{RSS} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$ — сумма квадратов остатков;
- $S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2$ — сумма квадратов отклонений значений x от их среднего.

Порядок действий

1. **Оценить коэффициент β_1:** Использовать метод наименьших квадратов для получения β_1 из выборочных данных.
2. **Рассчитать стандартную ошибку $\mathrm{SE}(\beta_1)$:** Найти сумму квадратов остатков (RSS) и S_{xx}, подставить их в формулу для $\mathrm{SE}(\beta_1)$.
3. **Определить критическое значение $t_{\alpha/2}$:** Использовать таблицу t-распределения Стьюдента с $df = n - 2$.
4. **Построить доверительный интервал:** Использовать формулу:

$$\beta_1 \pm t_{\alpha/2} \cdot \mathrm{SE}(\beta_1).$$