TIN 2017/2018: Úloha 1

Dávid Mikuš
xmikus15@stud.fit.vutbr.cz

9. novembra 2017

1. Nech $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, \Gamma_1, q_1, Z_1, F_1)$ je zásobnikový automat a $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ je nedeterministický konečný automat.

Navrhnite a *formálne popíšte* algoritmus ktorý má na vstupe automaty M_1 a M_2, a jeho výstupom bude zásobnikový automat M_3 taký že,

$$L(M_3) = \{w \mid w \in L(M_1) \wedge \exists w' \in L(M_2) : |w| = |w'|\}$$

Riešenie

$$M_3 = (Q, \Sigma, \delta, \Gamma, q_0, Z, F)$$

$Q = Q_1 \times Q_2$
$\Sigma = \Sigma_1$
$\delta : \forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma_1 \ \forall z \in \Gamma_1 \ \forall \chi \in \Gamma_1^* :$

$$[\ ((q_2^1, q_2^2), \chi) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a, z)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists b \in \Sigma_2 : ((q_2^1, \chi) \in \delta_1(q_1^1, a, z) \wedge q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, b) \ ]$$
$$\cup$$
$$[\ ((q_2^1, q_2^2), \chi) \in \delta((q_1^1, q_1^2), \varepsilon, z))$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$((q_2^1, \chi) \in \delta_1(q_1^1, \varepsilon, z) \wedge q_1^2 = q_2^2) \ ]$$

$q_0 = (q_1, q_2)$
$\Gamma = \Gamma_1$
$Z = Z_1$
$F = F_1 \times F_2$

Dávid Mikuš
xmikus15

2. Uvažujme binárne relácie nad jazyky $\circ$ definované následovne: $L_1 \circ L_2 = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$. S využitím uzáverovych vlastnosti dokážte, alebo vyvráte, nasledujúce vzťahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2^D$ značí triedu deterministických bezkontextových jazykov.

Riešenie

(a) Upravíme na tvar: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$ Podľa vety 3.7 vieme že trieda regulárnych jazykov tvorí množinovu Boolovu algebru. Z Boolovej algebry plynie uzavretosť voči doplnku a prieniku.
Kedže $\overline{L_1}, \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$ tak potom aj $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$
Tento vzťah teda *platí.*

(b) Upravíme na tvar: $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$ Na základe vety 3.7 trieda regulárnych jazykov tvorí množinovu algebru ktora je uzavretá voči doplnku, teda $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$. Podľa definície 6.5 vieme ak $L = L(P)$ kde P je deterministicky zásobnikovy automat, tak L sa nazýva deterministickým bezkontextovým jazykom. Kedže $L_2 \in \mathcal{L}_2^D$ tak pre tento jazyk existuje DZA ktorý ho generuje.
Podľa vety 6.12 sú jazyky DZA uzavreté voči doplnku a prieniku s regulárnymi jazykmi. Čiže $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$ a $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$, tak aj ich prienik je uzavretý $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$.
Tento vzťah teda *platí.*

(c) Upravíme na tvar: $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$. L_2 je teda z triedy bezkontextových jazykov a na základe vety 6.6 vieme že bezkontextový jazyk nie je uzavretý voči doplnku a prieniku. $\overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$. Regulárne jazyky sú uzavreté voči doplnku, teda $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$. Zvolíme si $\overline{L_1} = \{a, b, c\}^* \in \mathcal{L}_3$ a $\overline{L_2} = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$. $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$
Našli sme protipríklad a teda tento vzťah *neplatí.*

3. Nech $\Sigma = \{a, b, c\}$. Uvažujme jazyk L nad abecedou $\Sigma \cup \{1, 2\}$ definovaný následovne:

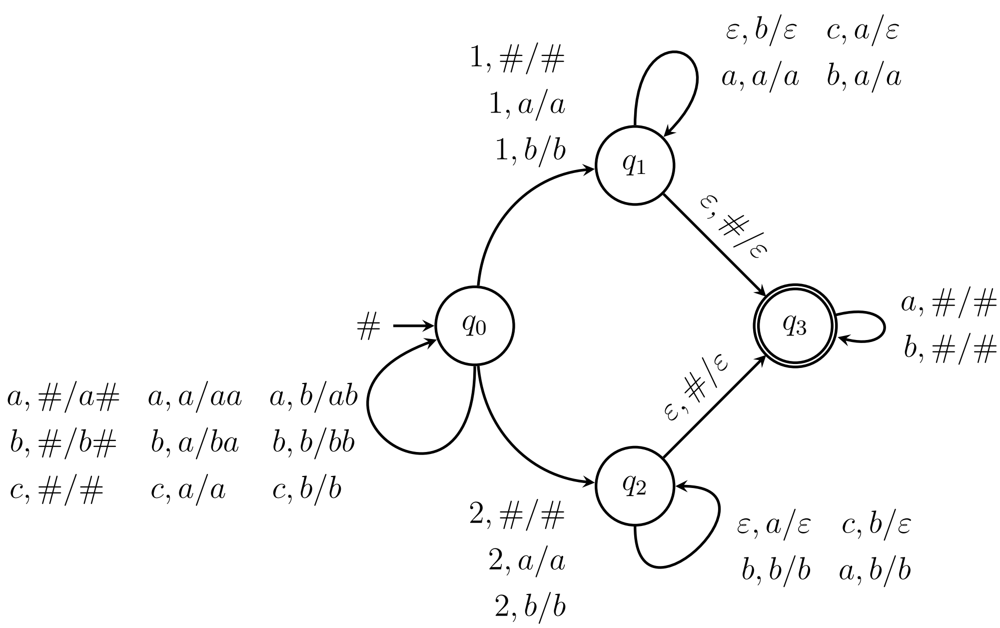
$L = \{w_1 1 w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_a(w_1) = \#_c(w_2)\} \cup \{w_1 2 w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_b(w_1) = \#_c(w_2)\}$
Zostrojte deterministický zásobnikový automat M_L taký, že $L(M_L) = L$.

Riešenie

$$M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c, 1, 2\}, \{\#, a, b\}, \delta, q_0, \#, \{q_3\})$$

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a, \#) = \{(q_0, a\#)\} & \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, aa)\} & \delta(q_0, a, b) = \{(q_0, ab)\} \\
\delta(q_0, b, \#) = \{(q_0, b\#)\} & \delta(q_0, b, a) = \{(q_0, ba)\} & \delta(q_0, b, b) = \{(q_0, bb)\} \\
\delta(q_0, c, \#) = \{(q_0, \#)\} & \delta(q_0, c, a) = \{(q_0, a)\} & \delta(q_0, c, b) = \{(q_0, b)\} \\
\delta(q_0, 1, \#) = \{(q_1, \#)\} & \delta(q_0, 1, a) = \{(q_1, a)\} & \delta(q_0, 1, b) = \{(q_1, b)\} \\
\delta(q_0, 2, \#) = \{(q_2, \#)\} & \delta(q_0, 2, a) = \{(q_2, a)\} & \delta(q_0, 2, b) = \{(q_2, b)\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_1, \varepsilon, b) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, a) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, c, a) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, b) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, a)\} & \delta(q_2, a, b) = \{(q_2, b)\} \\
\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, a)\} & \delta(q_2, b, b) = \{(q_2, b)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, \#) = \{(q_3, \#)\} & \delta(q_2, \varepsilon, \#) = \{(q_3, \#)\} \\
\delta(q_3, a, \#) = \{(q_3, \#)\} & \delta(q_3, b, \#) = \{(q_3, \#)\}
\end{array}$$



Obr. 1: Deterministický zásobnikový automat M_L

4. Dokážte, že jazyk L z predchádzajúceho príkladu není regulárny.

Riešenie

Predpokladajme, že jazyk L je regulárny jazyk. Potom platí, že

$$\begin{aligned}\exists k > 0 : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* : \ & w = xyz \wedge \\ & y \neq \varepsilon \wedge \\ & |xy| \leq k \wedge \\ & \forall i \geq 0 : xy^i z \in L\end{aligned}$$

Zvolíme si reťazec w:

$$\begin{aligned} w &= a^k 1 c^k, w \in L \\ |w| &= 2k + 1 \geq k \end{aligned}$$

Kedžte platí $|xy| \leq k$, tak reťazec xy sa skladá výhradne so symbolov a. Môžeme zapísať $xy^i z = a^{k+(i-1)|y|} 1 c^k$. Pre $i = 0$ teda platí $xy^0 z = a^{k-|y|} 1 c^k$. Z toho vyplýva že $\#_a(a^{k-|y|} 1 c^k) = \#_c(a^{k-|y|} 1 c^k)$. Zostavíme rovnicu $k - |y| = k$, čiže $-|y| = 0$ a to platí len pre $|y| = 0$ a kedže vieme že $y \neq \varepsilon, |y| > 0$. Tak dochádzame k sporu.
Pôvodný predpoklad, že jazyk L je regulárny teda nie je platný. Jazyk L nie je regulárny

5. Uvažujme jazyk L_k definovaný následovne: $L_k = \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1,2\}^*, \#_0(w_1) < \#_2(w_2) < \#_1(w_1)\}$. Dokažte, že L_k nie je bezkontextový.

Riešenie

Nech je L_k bezkontextový jazyk. Potom platí

$$\begin{aligned}\exists k > 0 : \forall z \in L_k : |z| \geq k \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* : \ & z = uvwxy \wedge \\ & vx \neq \varepsilon \wedge \\ & |vwx| \leq k \wedge \\ & \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L_k\end{aligned}$$

Nech reťazec $z = 0^{k-1}1^{k+1}\#2^k$. Určite platí $|z| \geq k$, lebo vieme, že $|z| = 3k$. Nakoľko $|vwx| \leq k$, tak môže nastať len istý počet možností toho, v akom tvare je vwx. Tie sú:

(a) vwx sa skladá výhradne zo symbolov 0
(b) vwx sa skladá na rozhraní symbolov $0, 1$
(c) vwx sa skladá výhradne zo symbolov 1
(d) vwx sa skladá zo symbolov $1, 2$ a $\#$

Prvý prípad môžeme prepísať na ekvivalentný tvar $0^{k-1+(i-1)|vx|}1^{k+1}\#2^k$.
Položme $i = 2$, teda musí platiť $k - 1 + |vx| < k$. Kedže $vx \neq \varepsilon, |vx| > 0$ tak sme v tejto variante došli k sporu.

V druhom prípade sa vo v alebo x bude nachádzať aspoň jeden symbol 1, pre $i = 0$ teda aspon jeden symbol 1 vypadne a počet symbolov sa zmení z $k + 1$ na k a tu dochádzame k sporu pretože $k \not< k$.

Tretí prípad podobne ako prvý môžeme prepísať na ekvivalentný tvar $0^{k-1}1^{k+1+(i-1)|vx|}\#2^k$.
Položme $i = 0$, teda musí platiť $k < k + 1 - |vx|$. Kedže $vx \neq \varepsilon, |vx| > 0$ tak sme v tejto variante došli k sporu.

Vo štvrtom prípade, ak by sa vo v alebo x nachádzal symbol $\#$ tak dojdeme k sporu pre $i \neq 1$, kedže $\#$ sa nachádza v jazyku práve jeden krát.
Uvažujme všetky možnosti vwx také že: $a = \#_1(vwx), b = \#_2(vwx), a \geq 0\ b > 0$

(a) $a > b$ - podobne ako v prípade 3 pre $i = 0$ dojdeme k sporu, pretože dôjde k narušeniu nerovnosti počtu 1 a 2
(b) $a < b$ - pre $i > 1$ dôjdeme k sporu, pretože sa zvýši počet 2
(c) $a = b$ - pre $i = 0$ dôjdeme k sporu, pretože sa zníži počet 2

Nakoľko sme sa dostali v každom prípade do sporu, tak aj pôvodné tvrdenie, že L_k je bezkontextový jazyk nemôže platiť. Jazyk L_k tým pádom nie je bezkontextový.

6. Popíšte hlavnú ideu dôkazu, že pre každý regulárny jazyk existuje jednoznačná gramatika (definícia jednoznačnej gramatiky – viz slidy 2, strana 11).

Riešenie

(a) Každý regulárny jazyk L sa dá špecifikovať pomocou konečneho automatu M tak že $L(M) = L$. Veta 3.6

(b) Konečný automat M sa dá previesť na regulárnu gramatiku G, tak že $L(G) = L(M)$. Veta 3.7

(c) i. Predpokladajme že gramatika G je viacznačná. $G = (Q_G, \Sigma_G, P, q_G^0)$

ii. Podľa definície 4.5 je gramatika G viacznačná ak generuje aspoň jednu viacznačnú vetu w. Veta w je generovaná gramatikou G ku ktorej existujú aspoň 2 rôzne derivačné stromy s koncovými uzlami tvoriacu vetu w.

iii. Z dôkazu pre vetu 3.7 vieme že KA M sa dá previesť na DKA N. $N = (Q_N, \Sigma_N, \delta_N, q_N^0, F_N)$

iv. Z (c)ii teda platí $\forall r \in \Sigma_G \exists q \in Q_G \exists a \in \Sigma_G : |q \to ar| > 1$, potom platí $\exists q \in Q_N \exists a \in \Sigma_N : |\delta(q, a)| > 1$, čiže k odvodzovaciemu pravidlu gramatiky existuje ekvivalentný prechod v konečnom automate.

v. Kedže na základe (c)iii musí pre KA existovať viac ako jeden prechod pre určitý stav a symbol, tak dochádzame k sporu. Kedže na základe definície DKA, môže existovať maximálne jeden takýto prechod. $\forall q \in Q_N \forall a \in \Sigma_N : |\delta(q, a)| \leq 1$

vi. Gramatika tedy neni viacznačná. Definícia 4.5 hovorí že ak gramatika neni viacznačná tak je potom jednoznačná.

(d) Gramatika G je jednoznačná. Takže pre každý regulárny jazyk existuje jednoznačná gramatika.