# Уравнения, допускающие понижение порядка

## Теория

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.1}$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, а функция F определена и непрерывна на некотором открытом множестве $G$ $(n+2)$-мерного пространства своих аргументов.

**В уравнение (7.1) не входит неизвестная функция y(x) и первые k – 1 ее последовательные производные**

В таком случае уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad 1 \leqslant k < n.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$z(x) = y^{(k)}(x).$$

Тогда получаем $z'(x) = y^{(k+1)}(x), \ldots, z^{(n)}(x) = y^{(n-k)}(x)$ и от исходного уравнения в этом случае придем к уравнению

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0,$$

порядок которого ниже на k единиц.

Если для получившегося уравнения удается найти общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

то, подставляя его в введенную неизвестную функцию и последовательно интегрируя k раз, получим

$$y^{(k-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})\, dx + C_{n-k+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y(x) = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x}}_{k} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-k})\, \underbrace{dx \ldots dx}_{k} +$$
$$+ C_{n-k+1}x^{k-1} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Если для получившегося уравнения можно получить лишь общий интеграл

$$\Phi(x, z, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

который удается разрешить относительно x, то решение уравнения записывают в параметрическом виде, приняв за параметр z. В этом случае независимая переменная, как функция параметра, определится из найденного общего интеграла, а неизвестная функция определит значение k-й производной искомого решения как функции параметра. Таким образом, мы имеем следующие равенства:

$$x = \psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}), \quad y^{(k)}(x) = z.$$

Поэтому, чтобы записать решение искомого уравнения в параметрическом виде, нам осталось определить y как функцию параметра. Для этого запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&dy^{(k-1)} = y^{(k)}\,dx = z\,d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}),\\
&\dots\\
&dy' = y''\,dx = y''\,d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}),\\
&dy = y'\,dx = y'\,d\psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}).
\end{aligned}$$

Определяя отсюда последовательно $y^{(k-1)}, \dots, y'', y'$ как функции параметра z, найдем значение искомой функции как функции параметра и n произвольных постоянных интегрирования, первые n − k из которых вошли в параметрическое представление x, а остальные k появляются в процессе интегрирования равенств. Значит общее решение исходного уравнения в параметрической форме в этом случае можно записать так:

$$x = \psi(z, C_1, \dots, C_{n-k}), \quad y = \omega(z, C_1, \dots, C_n).$$

**Пример**

Решим уравнение $y''' + y'' - x = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$

Решение:

Уравнение не содержит искомой функции и ее первой производной. Поэтому, сделав замену при k = 2, мы придем к линейному уравнению $z' + z = x$, общее решение которого имеет вид $z = C_1 e^{-x} + x - 1$. Значит, $y'' = C_1 e^{-x} + x - 1$ и $y = C_1 e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$. Удовлетворяя начальным условиям, придем к системе $C_1 + C_3 = 1, -C_1 + C_2 = -1, C_1 - 1 = 0$. Из этой системы получим $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 0$, следовательно, $y = e^{-x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

**В уравнение (7.1) не входит независимая переменная x**

В этом случае уравнение имеет вид

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Введем новую неизвестную функцию

$$y' = p(y).$$

Тогда

$$y'' = \frac{dp(y)}{dy} y' = p'p,$$
$$y''' = \frac{d(p'p)}{dy} y' = (p''p + p'^2)p = p''p^2 + p'^2 p.$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков. Подставляя выражения этих производных в исходное уравнение этого случая, получим уравнение, порядок которого на единицу ниже:

$$F_1(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0,$$

а роль независимой переменной в котором играет $y$. Если для этого уравнения удается найти общее решение $p = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1})$, то, подставив его в заданную неизвестную функцию, придем к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, \dots, C_{n-1}).$$

Интегрируя, получим общий интеграл, как в предыдущем случае, исходного уравнения. Если для полученного уравнения (которое порядком ниже) можно получить лишь общий интеграл

$$\Phi(y, p, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0,$$

который удается разрешить относительно y, то решение исходного уравнения записывают в параметрическом виде, приняв p за параметр. В этом случае искомая функция, как функция параметра, определится из найденного общего интеграла, а заданная неизвестная функция позволяет выразить $dx$ через дифференциал параметра. Таким образом, мы имеем следующие равенства:

$$y = \psi(p, C_1, \ldots, C_{n-1}), \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{d\psi(p, C_1, \ldots, C_{n-1})}{p}.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем $x = \omega(p, C_1, \ldots, C_n)$. В общем случае, параметризуя общий интеграл уравнения (когда это удается сделать), получим $y = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$.

Определим x как функцию параметра t:

$$x = \psi_2(t, C_1, \ldots, C_n).$$

**Пример**

Решим уравнение

$$y'' - 2yy' = 0.$$

Решение:

Сделав замену, после сокращения на p придем к уравнению $p' = 2y$. При этом теряется решение $y = C$, соответствующее $p = 0$. Общее решение полученного уравнения имеет вид $p = y^2 + C_1$. Подставив его в нашу замену, придем к уравнению $dy/dx = y^2 + C_1$. Здесь следует различать два случая в зависимости от знака $C_1$ и случай $C_1 = 0$. Поэтому, заменяя в последнем уравнении $C_1$ на $\pm C_1^2$, и интегрируя это уравнение, получим два семейства решений исходного уравнения:

$$\frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = x + C_2, \quad \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = x + C_2,$$

которые вместе с ранее найденным решением $y = C$ и решением $y = 1/(C - x)$

(которое получается если положить $C_1 = 0$) дают все решения уравнения.