Уравнения в полных дифференциалах

Теория

Рассмотрим уравнение первого порядка, записанное в дифференциалах. Это уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$. Тогда это уравнение можно переписать в виде $dF(x,y) = 0$, так что его решение будет иметь вид

$$F(x,y) = C. \tag{5.2}$$

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные по x и по y, то уравнение (5.1) будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{5.3}$$

Если условие (5.3) выполнено, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M\,dx + N\,dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования, поэтому функцию $F(x,y)$ можно восстановить по любой из формул

$$F(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)\,dy \tag{5.4}$$

или

$$F(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx. \tag{5.5}$$

При этом нижние пределы x_0 и y_0 можно выбирать произвольно, лишь бы точка $(x_0\,, y_0)$ принадлежала области D (области определения функций M и N). За счет правильного выбора чисел x_0 и y_0 иногда удается упростить вычисления интегралов (5.4), (5.5). Например, если функции M и N являются многочленами от x и y, целесообразно выбирать $x_0 = y_0 = 0$.

В некоторых случаях уравнение удается решить или упростить, выделив в нем группу членов, представляющих собой полный дифференциал или выражение, легко приводящееся к полному дифференциалу умножением или делением на какую-нибудь функцию. При этом можно использовать соотношения

$$y\,dx + x\,dy = d(xy), \qquad y\,dy = \frac{1}{2}d(y^2), \qquad x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2),$$
$$y\,dx - x\,dy = y^2\,d\left(\frac{x}{y}\right) = -x^2 d\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d(\ln x) \quad \text{и т. п.}$$

Функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

если после умножения на нее это уравнение становится уравнением в полных дифференциалах. Отсюда следует, что функция μ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu.$$

Поделив обе части последнего уравнения на μ, перепишем его в виде

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким образом, интегрирующий множитель μ удовлетворяет уравнениям в частных производных. Несмотря на то, что эти уравнения, как правило, имеют бесконечно много решений, задача их нахождения в общем случае ничуть не легче решения исходного уравнения.

Пример 1

Рассмотрим уравнение

$$(4x^3 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 10y^4)\,dy = 0.$$

Решение:

Здесь $\frac{\partial \mathrm{M}(x)}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{N}(y)}{\partial \mathrm{x}} = 12xy$, так что условие (5.3) выполнено.

Общий интеграл найдем по формуле (5.4), взяв $x_0 = y_0 = 0$:

$$F(x,y) = \int_0^x (4x^3 + 6xy^2)\,dx + \int_0^y 10y^4\,dy = x^4 + 3x^2y^2 + 2y^5.$$

Общее решение уравнения имеет вид $x^4 + 3x^2y^2 + 2y^5 = C$

Пример 2

Решим уравнение

$$xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy.$$

Решение:

Перепишем его в виде

$$x(y\,dx - x\,dy) = (y^3 + x^2y)\,dy$$

и, выделив интегрируемую комбинацию, сделаем замену $t = y/x$:

$$x \cdot (-x^2)d\left(\frac{y}{x}\right) = (y^3 + x^2y)\,dy, \quad -d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)\right)\,dy.$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$-dt = (t^3 + t)\,dy,$$

интегрируя которое, найдем

$$\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\ln|t|=y+C.$$

Отсюда находим

$$\ln\left|1+\frac{x^2}{y^2}\right|=2y+C.$$

В процессе решения мы делили на x и на $t=y/x$. Ясно, что $y=0$ является решением уравнения, а $x=0$ не является.