Однородные уравнения

Теория

Функция двух переменных $f(x,y)$ называется однородной степени m (еще говорят, с показателем однородности m), если для всех t (или хотя бы для $t > 0$) справедливо соотношение

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y). \tag{3.1}$$

Так, функции $f(x,y) = x + 2y$, $g(x,y) = x^3y - 7y^4 + 2x^2y^2$, $h(x,y) = x^3 + y^3$ являются однородными функциями степеней 1, 4 и $3/2$, соответственно. Функция $\varphi(x,y) = x^2y^3 - y^6$ не является однородной. Дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{3.2}$$

называется однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени m. Можно показать, что однородное уравнение может

также быть записано в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.3}$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены искомой функции y по формуле

$$y(x) = x \cdot t(x). \tag{3.4}$$

Тогда производная y' и дифференциал dy заменяются по формулам

$$y' = t'x + t, \qquad dy = t\,dx + x\,dt.$$

После решения полученного уравнения нужно сделать обратную подстановку

$$t = \frac{y}{x}.$$

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

приводится к однородному уравнению заменой $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, где (x_0, y_0) — точка пересечения прямых $ax + by + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ для некоторого $k \in R$ и уравнение имеет вид $y' = f_1(ax + by)$.

Уравнение называется обобщенно-однородным, если его можно привести к однородному заменой $y = z^m$, где m — некоторое действительное число.

Пример 1

Решим уравнение

$$y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad y(0) = -1. \tag{3.5}$$

Решение:

Уравнение имеет вид (3.3). Делаем замену $y = tx$. Тогда уравнение (3.5) запишется в виде $t'x + t = \frac{2t}{1+t^2}$, откуда $x\frac{dt}{dx} = \frac{t-t^3}{1+t^2}$. Разделив переменные, получим

$$\frac{(1+t^2)dt}{t(1-t^2)} = \frac{dx}{x}.$$

Преобразовывая дробь в левой части последнего уравнения, запишем

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right) dt = \frac{dx}{x}.$$

Тогда

$$\int \left(\frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right) dt = \int \frac{dx}{x} \quad \text{или} \quad \ln|t| - \ln|1-t^2| = \ln|x| + C.$$

Взяв постоянную C в виде $ln\ |C|$, получим

$$\frac{t}{1-t^2} = Cx.$$

Подставив $t = y/x$, получим окончательно

$$\frac{xy}{x^2-y^2} = Cx \quad \text{или} \quad Cy = (x^2 - y^2).$$

Кроме того, в процессе решения мы делили на x, t и $1 - t^2$. Нетрудно видеть, что $x = 0$ не является решением исходного уравнения, а $t = 0$ и $t = \pm 1$ являются решениями уравнения $t'x + t = \frac{2t}{1+t^2}$. Следовательно, исходное уравнение (3.5) имеет еще решения $y = 0$ и $y = \pm x$. Заметим, что решения $y = \pm x$ входят в серию решений $Cy = (x^2 - y^2)$ (они получаются при $C = 0$), а решение $y = 0$ не содержится в этой серии (но получается при $C = 0$ из первой формы записи общего решения). Подставив $x = 0, y = -1$, получим решение задачи Коши: $y = x^2 - y^2$.

Пример 2

Пусть дано уравнение

$$(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0.$$

<u>Решение:</u>

Решая систему

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - y + 4 = 0, \end{cases}$$

находим $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Сделаем замену $u = x + 1$, $v = y - 3$; тогда $x = u - 1$, $y = v + 3$, $dy/dx = dv/du$. Уравнение принимает вид

$$(u + v)\,du + (u - v)\,dv = 0.$$

Решив его с помощью подстановки $v = tu$, получим

$$u^2 + 2uv - v^2 = C.$$

Возвращаясь к исходным переменным (x, y), найдем

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C.$$