Вариация произвольных постоянных

Теория

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами произвольного n-го порядка:

$$\text{(1)}\quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Решение выполняется в два этапа. На первом этапе мы отбрасываем правую часть и решаем однородное уравнение. В результате получаем решение, содержащее n произвольных постоянных. На втором этапе мы варьируем постоянные. То есть мы считаем, что эти постоянные являются функциями от независимой переменной x и находим вид этих функций.

Хотя мы здесь рассматриваем уравнения с постоянными коэффициентами, но метод Лагранжа также применим и для решения любых линейных неоднородных уравнений. Для этого, однако, должна быть известна фундаментальная система решений однородного уравнения.

Алгоритм:

1. Решение однородного уравнения

   Вначале мы ищем общее решение однородного уравнения, приравнивая правую неоднородную часть $f(x)$ к нулю:

$$\text{(2)}\quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

   Общее решение такого уравнения имеет вид:

$$\text{(3)}\quad y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}(x) + C_n y_n(x).$$

   Здесь $C_m\ \{m = 1, 2, \dots, n\}$ – произвольные постоянные; $y_m(x)$ – n линейно независимых решений однородного уравнения (2), которые образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

2. Вариация постоянных – замена постоянных функциями

На втором этапе мы займемся вариацией постоянных. Другими словами, мы заменим постоянные C_m на функции от независимой переменной x: $C_m \to S_m(x)$.

То есть мы ищем решение исходного уравнения (1) в следующем виде:

(4) $y = S_1(x)\,y_1(x) + S_2(x)\,y_2(x) + \cdots + S_{n-1}(x)\,y_{n-1}(x) + S_n(x)\,y_n(x).$

Если мы подставим (4) в (1), то получим одно дифференциальное уравнение для n функций $S_m(x)$. При этом мы можем связать эти функции дополнительными n-1 уравнениями. Тогда получится n уравнений, из которых можно определить n функций $S_m(x)$.. Дополнительные уравнения можно составить различными способами. Но мы это сделаем так, чтобы решение имело наиболее простой вид. Для этого, при дифференцировании, нужно приравнивать к нулю члены, содержащие производные от функций $S_m(x)$. Продемонстрируем это.

Чтобы подставить предполагаемое решение (4) в исходное уравнение (1), нам нужно найти производные первых n порядков от функции, записанной в виде (4). Дифференцируем (4), применяя правила дифференцирования суммы и произведения:

$$\big(S_m(x)\,y_m(x)\big)' = S'_m(x)\,y_m(x) + S_m(x)\,y'_m(x).$$

Сгруппируем члены. Сначала выпишем члены с производными от $S_m(x)$, а затем – члены с производными от $y_m(x)$:

$$y' = S'_1(x)\,y_1(x) + S'_2(x)\,y_2(x) + \cdots + S'_n(x)\,y_n(x) +$$
$$S_1(x)\,y'_1(x) + S_2(x)\,y'_2(x) + \cdots + S_n(x)\,y'_n(x).$$

Наложим на функции $S_m(x)$ первое условие:

$$\textbf{(5.1)}\quad S'_1(x)\,y_1(x) + S'_2(x)\,y_2(x) + \cdots + S'_n(x)\,y_n(x) = 0.$$

Тогда выражение для первой производной y по x будет иметь более простой вид:

$$\textbf{(6.1)} \quad y' = S_1(x)\, y_1'(x) + S_2(x)\, y_2'(x) + \cdots + S_n(x)\, y_n'(x).$$

Тем же способом находим вторую производную:

$$y'' = S_1'(x)\, y_1'(x) + S_2'(x)\, y_2'(x) + \cdots + S_n'(x)\, y_n'(x) +$$
$$S_1(x)\, y_1''(x) + S_2(x)\, y_2''(x) + \cdots + S_n(x)\, y_n''(x).$$

Наложим на функции $S_m(x)$ второе условие:

$$\textbf{(5.2)} \quad S_1'(x)\, y_1'(x) + S_2'(x)\, y_2'(x) + \cdots + S_n'(x)\, y_n'(x) = 0.$$

Тогда

$$\textbf{(6.2)} \quad y'' = S_1(x)\, y_1''(x) + S_2(x)\, y_2''(x) + \cdots + S_n(x)\, y_n''(x).$$

И так далее. В дополнительных условиях, мы приравниваем члены, содержащие производные функций $S_m(x)$, к нулю.

Таким образом, если выбрать следующие дополнительные уравнения для функций $S_m(x)$:

$$\textbf{(5.k)} \quad S_1'(x)\, y_1^{(k-1)}(x) + S_2'(x)\, y_2^{(k-1)}(x) + \cdots + S_n'(x)\, y_n^{(k-1)}(x) = 0,$$

то первые n-1 производных y по x будут иметь наиболее простой вид:

$$\textbf{(6.k)} \quad y^{(k)} = S_1(x)\, y_1^{(k)}(x) + S_2(x)\, y_2^{(k)}(x) + \cdots + S_n(x)\, y_n^{(k)}(x).$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Находим n-ю производную:

$$\textbf{(6.n)} \quad y^{(n)} = S_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + S_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + S_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$S_1(x)\, y_1^{(n)}(x) + S_2(x)\, y_2^{(n)}(x) + \cdots + S_n(x)\, y_n^{(n)}(x).$$

Подставляем в исходное уравнение (1):

$$a_n\left[S_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x)+S_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x)\right]+$$
$$S_1(x)\,a_n y_1^{(n)}(x)+S_2(x)\,a_n y_2^{(n)}(x)+\cdots+S_n(x)\,a_n y_n^{(n)}(x)+$$
$$S_1(x)\,a_{n-1}y_1^{(n-1)}(x)+S_2(x)\,a_{n-1}y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+S_n(x)\,a_{n-1}y_n^{(n-1)}(x)+$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad +$$
$$S_1(x)\,a_2 y_1''(x)+S_2(x)\,a_2 y_2''(x)+\cdots+S_n(x)\,a_2 y_n''(x)+$$
$$S_1(x)\,a_1 y_1'(x)+S_2(x)\,a_1 y_2'(x)+\cdots+S_n(x)\,a_1 y_n'(x)+$$
$$S_1(x)\,a_0 y_1(x)+S_2(x)\,a_0 y_2(x)+\cdots+S_n(x)\,a_0 y_n(x)=f(x).$$

Тогда сумма членов, содержащих $S_i(x)$ дают нуль. В итоге получаем:

(7) $$a_n\left[S_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x)+S_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x)\right]=f(x).$$

В результате мы получили систему линейных уравнений для производных $S_m'(x)$:

(5.1) $$S_1'(x)\,y_1(x)+S_2'(x)\,y_2(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n(x)=0;$$
(5.2) $$S_1'(x)\,y_1'(x)+S_2'(x)\,y_2'(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n'(x)=0;$$
(5.3) $$S_1'(x)\,y_1''(x)+S_2'(x)\,y_2''(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n''(x)=0;$$
. . . .
(5.n-1) $$S_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x)+S_2'(x)\,y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x)=0;$$
(7′) $$S_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x)+S_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+S_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x)=\frac{f(x)}{a_n}.$$

Решая эту систему, находим выражения для производных $S_m'(x)$ как функции от x. Интегрируя, получим:

$$S_m(x)=\int S_m'(x)\,dx+C_m.$$

Здесь C_m – уже не зависящие от x постоянные. Подставляя $S_m(x)$ в (4), получаем общее решение исходного уравнения.

Пример

Решим уравнение

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\sqrt{x+1}$$

Решение:

Решаем однородное дифференциальное уравнение:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Ищем решение в виде $y = e^{kx}$. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 1 = 0$$

Это уравнение имеет комплексные корни: $k_{1,2} = -1$.

Фундаментальная система решений, соответствующая этим корням, имеет вид: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$.

Общее решение однородного уравнения

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Теперь варьируем постоянные C1 и C2. То есть заменим постоянные на функции: $C_1 \to S_1(x)$, $C_2 \to S_2(x)$.

Ищем решение исходного уравнения в виде:

$$y = S_1(x)\, y_1(x) + S_2(x)\, y_2(x).$$

Находим производную

$$y' = S_1'(x)\, y_1(x) + S_2'(x)\, y_2(x) + S_1(x)\, y_1'(x) + S_2(x)\, y_2'(x).$$

Свяжем функции $S_1(x)$ и $S_2(x)$ уравнением:

$$S_1'(x)\, y_1(x) + S_2'(x)\, y_2(x) = 0.$$

Тогда

$$y' = S_1(x)\, y_1'(x) + S_2(x)\, y_2'(x).$$

Находим вторую производную:

$$y'' = S_1'(x)\,y_1'(x) + S_2'(x)\,y_2'(x) + S_1(x)\,y_1''(x) + S_2(x)\,y_2''(x).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$\begin{gathered} S_1'(x)\,y_1'(x) + S_2'(x)\,y_2'(x) + \\ S_1(x)\,y_1''(x) + S_2(x)\,y_2''(x) + \\ S_1(x)\,2y_1'(x) + S_2(x)\,2y_2'(x) + \\ S_1(x)\,y_1(x) + S_2(x)\,y_2(x) = f(x). \end{gathered}$$

Поскольку $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют однородному уравнению, то сумма членов в каждом столбце последних трех строк дает нуль и предыдущее уравнение приобретает вид:

$$S_1'(x)\,y_1'(x) + S_2'(x)\,y_2'(x) = f(x).$$

Здесь $f(x) = e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Мы получаем систему уравнений для определения функций $S_1(x)$ и $S_2(x)$:

$$\begin{gathered} S_1'(x)\,y_1(x) + S_2'(x)\,y_2(x) = 0; \\ S_1'(x)\,y_1'(x) + S_2'(x)\,y_2'(x) = f(x). \end{gathered}$$

Решаем систему уравнений.

Находим производные $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$$\begin{gathered} y_1'(x) = (e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}; \\ y_2'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)\,e^{-x}. \end{gathered}$$

Решаем систему уравнений методом Крамера. Вычисляем определитель матрицы системы:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x) = e^{-x}(1-x)\,e^{-x} - xe^{-x}(-e^{-x}) = e^{-2x}(1-x+x) = e^{-2x}.$$

По формулам Крамера находим:

$$S_1'(x)=\frac{1}{W}\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ f(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=-\frac{y_2(x)\,f(x)}{W}=-e^{2x}xe^{-x}e^{-x}\sqrt{x+1}=-x\sqrt{x+1};$$

$$S_2'(x)=\frac{1}{W}\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & f(x)\end{vmatrix}=\frac{y_1(x)\,f(x)}{W}=e^{2x}e^{-x}e^{-x}\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}.$$

Интегрируем. Делаем подстановку

$$x+1=t^2;\quad (t\geqslant 0);\ \ x=t^2-1;\ \ dx=\left(t^2-1\right)'dt=2t\,dt;\ \ t=\sqrt{x+1}.$$

$$S_1(x)=-\int x\sqrt{x+1}\,dx=-\int\left(t^2-1\right)t\,2t\,dt=-2\int\left(t^4-t^2\right)dt=$$

$$-\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C_1=-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C_1.$$

$$S_2(x)=\int\sqrt{x+1}\,dx=\int t\,2t\,dt=2\int t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3+C_2=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C_2.$$

Общее решение исходного уравнения:

$$y=S_1(x)\,y_1(x)+S_2(x)\,y_2(x)=$$

$$\left[-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C_1\right]e^{-x}+\left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C_2\right]xe^{-x}=$$

$$\left[-\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\cdot(1+x)+C_1+C_2x\right]e^{-x}=$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)(x+1)^{5/2}+C_1+C_2x\right]e^{-x};$$