Уравнения, однородные относительно искомой функции и ее производных

Теория

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{8.1}$$

называется однородным относительно искомой функции и ее производных, при замене y на ty, y' на ty' , . . . , $y^{(n)}$ на $ty^{(n)}$ это уравнение меняется на эквивалентное ему. Другими словами, функция F является однородной относительно y, y' , y'' , . . . , $y^{(n)}$ степени m, то есть, $F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$. В этом случае порядок уравнения можно понизить, сделав замену

$$y' = zy, \tag{8.2}$$

где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда производные y'' , . . . , $y^{(n)}$ выражаются следующим образом;

$$\begin{aligned}
&y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y,\\
&y''' = (z'' + 2z'z)y + (z' + z^2)y' = (z'' + 3z'z + z^3)y,\\
&\ldots\\
&y^{(n)} = f(z^{(n-1)}, \ldots, z', z)y.
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Подставляя (8.2) и (8.3) в (8.1) и пользуясь однородностью функции F, получим

$$\begin{aligned}
&F(x, y, zy, (z' + z^2)y, \ldots, f(z^{(n-1)}, \ldots, z', z)y) =\\
&\qquad = y^m F(x, 1, z, (z' + z^2), \ldots, f(z^{(n-1)}, \ldots, z', z)) = 0.
\end{aligned}$$

После сокращения на y^m (при этом, если $m > 0$, может быть потеряно решение $y = 0$), получаем уравнение

$$F_1(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0, \tag{8.4}$$

порядок которого на единицу ниже. Если найдено общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

уравнения (8.4), то, подставив его в (8.2) и проинтегрировав полученное уравнение, можно найти общее решение уравнения (8.1):

$$y = C_n e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x, C_1, \ldots, C_{n-1}) dx}, \tag{8.5}$$

из которого решение $y = 0$ получается при $C_n = 0$.

Если для уравнения (8.4) получен лишь общий интеграл

$$\Phi(x, z, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0,$$

который удается разрешить относительно x, то, приняв за параметр z, получим $x = \psi(z, C_1, \ldots, C_{n-1})$. Тогда искомую функцию y как функцию параметра z получим из (8.2):

$$y = C_n e^{\int_{z_0}^{z} z \, d\psi(z, C_1, \ldots, C_{n-1})}. \tag{8.6}$$

Если общий интеграл уравнения (8.4) не разрешается относительно x, но его удается параметризовать: $x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, $z = \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})$, то решение уравнения (8.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &x = \psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ &y = C_n e^{\int_{t_0}^{t} \omega_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1}) \, d\psi_1(t, C_1, \ldots, C_{n-1})}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Пример 1

Рассмотрим уравнение

$$(yy'' - y'^2)x - yy' = 0.$$

Решение:

Уравнение является однородным относительно y, y', y'' степени $m = 2$. Сделав замену $y' = yz$ (тогда $y'' = (z^2 + z')y$, согласно (8.3)), после сокращения на y^2 получим уравнение $xz' - z = 0$, решение которого имеет вид $z = C_1 x$. Поэтому из (8.5) имеем $y = C_2 e^{C_1 x^2}$. Решение $y = 0$ получается из общего решения при $C_2 = 0$.

Обобщенно-однородные уравнения

Дифференциальное уравнение (8.1) называется обобщенно-однородным, если при замене x на tx, y на $t^\alpha y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, . . . , $y^{(n)}$ на $t^{\alpha-n}y^{(n)}$, где α — некоторое действительное число, оно меняется на эквивалентное ему. Таким образом, функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ удовлетворяет следующему условию:

$$F(tx, t^\alpha y, t^{\alpha-1}y', \ldots, t^{\alpha-n}y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{8.8}$$

где m — некоторое действительное число.

В этом случае делается замена как независимой переменной, так и искомой функции:

$$x = e^t \quad (x = -e^t \text{ при } x < 0), \quad y = z(t)e^{\alpha t}. \tag{8.9}$$

Производные при такой замене преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
&y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = (z' + \alpha z)e^{(\alpha-1)t} = g_1(z, z')e^{(\alpha-1)t},\\
&y''(x) = \frac{[y'(x)]'_t}{x'_t} = (z'' + (2\alpha - 1)z' + \alpha(\alpha - 1)z)e^{(\alpha-2)t} = g_2(z, z', z'')e^{(\alpha-2)t},\\
&\ldots\\
&y^{(n)}(x) = g_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})e^{(\alpha-n)t}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Подставляя (8.9) и (8.10) в (8.1), получим

$$F(e^t, z(t)e^{\alpha t}, g_1(z, z')e^{(\alpha-1)t}, \ldots, g_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})e^{(\alpha-n)t}) = 0.$$

Из условия (8.8) следует, что мы можем вынести выражение e^t из-под функции F и прийти к уравнению

$$F(1, z(t), g_1(z, z'), \ldots, g_n(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0$$

вида (7.14), не содержащему независимой переменной. Порядок полученного уравнения понижается на единицу при помощи замены $z' = p(z)$.

Пример 2

Рассмотрим уравнение

$$yy' + xyy'' - xy'^2 + y = 0.$$

Решение:

Чтобы проверить, является ли уравнение обобщенно-однородным, заменим в уравнении x на tx, y на $t^{\alpha}y$, y' на $t^{\alpha-1}y'$, y'' на $t^{\alpha-2}y''$ и попытаемся подобрать α так, чтобы множитель t входил во все члены уравнения в одинаковой степени. Получаем систему уравнений $\alpha + (\alpha - 1) = 1+\alpha+(\alpha-2) = 1+2(\alpha-1) = \alpha$, которая эквивалентна равенству $2\alpha-1 = \alpha$. Отсюда $\alpha = 1$. В большинстве случаев, чтобы не осуществлять указанные замены, удобно ввести понятие измерения (см. замечание к п. 3.3). Так, независимой переменной x надо поставить в соответствие измерение 1, а переменным $y, y', y'', \ldots$ — измерения α, $\alpha - 1$, $\alpha - 2, \ldots$, соответственно. Число α должно быть таким, чтобы измерения всех членов уравнения были одинаковы. Действия с измерениями производятся так же, как действия со степенями: при перемножении измерения складываются, при возведении в степень — умножаются на показатель степени. Тогда можно сразу записать полученную систему уравнений для определения α.

Сделаем замену (8.9) (при $\alpha = 1$) и вычислим производные по правилу (8.10). Получим

$$x = e^t, \quad y(x) = z(t)e^t, \quad y'(x) = z'(t) + z(t), \quad y''(x) = (z''(t) + z'(t))e^{-t}.$$

Подставив эти значения в уравнение и положив $z' = p(z)$, получим уравнению Бернулли $zpp' - p^2 + z = 0$ на функцию $p(z)$. Отсюда $dz/\sqrt{C_1z^2 + 2z} = \pm\, dt$ (при разделении переменных мы делим на z, поэтому теряем решение $y = 0$). Дальнейшее решение зависит от знака постоянной C_1.

Если $C_1 = 0$, то $\sqrt{2z} = \pm t + C$, откуда $z = (t + C)^2/2$. Сделав обратную замену $t = ln\, x$, $z = ye^{-t} = y/x$, получим $y = \frac{1}{2}\, x(ln\,|x| + C)2$.

При $C_1 > 0$ получим параметрическое задание решения (роль параметра играет z)

$$x = C_2(\sqrt{C_1(C_1z^2 + 2z)} + C_1z + 1)^{\pm 1/\sqrt{C_1}},$$
$$y = C_2z(\sqrt{C_1(C_1z^2 + 2z)} + C_1z + 1)^{\pm 1/\sqrt{C_1}}.$$

Аналогично, при $C_1 < 0$ получаем

$$y = x(\pm\sin(\sqrt{-C_1}\ln|x| + C_2) - 1)/C_1.$$

Кроме того, в процессе решения было потеряно решение $y = 0$.