Уравнения с разделяющимися переменными

Теория

Уравнения с разделяющимися переменными — это уравнения, которые могут быть записаны в виде

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \tag{1.1}$$

или же в виде

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{1.2}$$

Чтобы решить такое уравнение, необходимо разделить переменные, то есть, привести уравнение к такой форме, чтобы при дифференциале dx стояла функция, зависящая лишь от x, а при дифференциале dy — функция, зависящая от y. Для этого уравнение вида (1.1) следует переписать в форме

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx,$$

а уравнение вида (1.2) в форме

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0.$$

Таким образом, уравнение с разделяющимися переменными сводится к уравнению

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0. \tag{1.3}$$

Пусть $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ и $G(y) = \int_{y_0}^{y} g(y)dy$, $(x_0, y_0) \in D$ – первообразные для функций $f(x)$ и $g(y)$ соответственно. Тогда их дифференциалы равны

$$dF(x) = f(x)\,dx \quad \text{и} \quad dG(y) = g(y)\,dy.$$

Следовательно, уравнение (1.3) можно переписать в виде

$$dF(x) + dG(y) = d(F(x) + G(y)) = 0.$$

Но дифференциал функции равен нулю тогда и только тогда, когда эта функция — константа. Поэтому общим решением уравнения (1.3) будет

$$F(x) + G(y) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} g(x)\,dy = \text{const}.$$

Заметим, что при разделении переменных могут теряться решения вида $x = x_0$, $y = y_0$ за счет обращения в нуль функций $P(x)$ и $N(y)$. Поэтому, если потерянное решение не может быть получено из общего решения при каком-нибудь $C = C_0$, его необходимо также включить в ответ.

Также есть уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. К таким уравнениям относятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c).$$

Сделав в таком уравнении замену $z = ax + by + c$, получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dz}{dx} = bf(z) + a$.

Пример 1

Рассмотрим уравнение (задачу Коши)

$$(x+1)y\,dx + (y+2)\,dy = 0, \quad y(1) = 1. \tag{1.4}$$

Решение:

Разделяя переменные, получим

$$(x+1)\,dx + \frac{y+2}{y}\,dy = 0.$$

Интегрируем полученные выражения и учитывая, что неопределенный интеграл означает множество всех первообразных, отличающихся на постоянную, получим

$$\int (x+1)\,dx + \int \frac{y+2}{y}\,dy = \frac{1}{2}(x+1)^2 + (y + 2\ln|y|) + C = 0.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (1.4) (если произвольную постоянную C взять в виде −C) есть

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 + (y + 2\ln|y|) = C.$$

В процессе преобразования уравнения мы делили на y. Подставив $y = 0$ в уравнение (1.4), убеждаемся, что $y = 0$ тоже является решением и не получается из общего интеграла ни при каком значении C, так как не входит в область его определения.

Подставив $x = 1, y = 1$ в общий интеграл, найдем решение задачи Коши: $\frac{1}{2}(x + 1)^2 + (y + 2\,ln\,|y|) = 3.$

Пример 2

Решим уравнение

$$y'(y+1)\sin x + 2y = y^2.$$

<u>Решение:</u>

Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx}(y+1)\sin x = y^2 - 2y.$$

Разделив переменные, получим

$$\frac{(y+1)dy}{y(y-2)} = \frac{dx}{\sin x}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{2}\frac{dy}{y} + \frac{3}{2}\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Проинтегрируем:

$$-\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{3}{2}\ln|y-2| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Заменяя C на $ln\,|C|$ и потенцируя, получим окончательно

$$\frac{(y-2)^3}{y} = C\,\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}.$$

Кроме того, мы должны исследовать случаи $y(y-2) = 0$ и $sin\,x = 0$. Первый случай дает функции $y = 0$ и $y = 2$, являющиеся решениями исходного уравнения, а второй — функции $x = \pi n, n \in Z$, которые уравнению не удовлетворяют. Так как $y = 2$ содержится в общем интеграле при $C = 0$, то к нему следует добавить лишь решение $y = 0$.

Пример 3

Рассмотрим уравнение

$$y' = (2x + 3y + 1)^2.$$

<u>Решение:</u>

Сделаем замену $z = z(x) = 2x + 3y + 1$, тогда $y = \frac{1}{3}(-2x + z - 1)$. Поэтому $y' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z'$. Подставим это в исходное уравнение:

$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z' = z^2$, откуда

$$\frac{dz}{dx} = 3(z^2+2) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{z^2+2} = 3\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение и делая обратную замену, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{2}} = 3x + C, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+3y+1}{\sqrt{2}} = 3x + C.$$

Поскольку выражение $z^2 + 2$ не обращается в нуль в ни при одном значении z, потери решений не произошло.