Линейные уравнения первого порядка

Теория

Линейные уравнения первого порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции $y(x)$ и ее производной, то есть, уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x). \tag{4.1}$$

Функция $b(x)$ называется свободным членом уравнения (4.1). Уравнение

$$y' + a(x)y = 0 \tag{4.2}$$

называется линейным однородным уравнением, соответствующим линейному уравнению (4.1). Разделив переменные в уравнении (4.2), получим $\frac{dy}{y} = -a(x)dx$, откуда $ln|y| = -\int_{x_0}^{x} a(x)dx + ln|C|$, или

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.3}$$

Теперь для того, чтобы решить уравнение (4.1), нужно применить метод вариации постоянной. Его суть состоит в том, что решение уравнения (4.1) ищут в том же виде, что и решение соответствующего однородного уравнения (4.2), но С уже считают не постоянной, а неизвестной функцией от x. Таким образом, решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.4}$$

Тогда

$$y' = C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx} - C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}a(x).$$

Подставляя y и y' в уравнение (4.1), получим

$$C'(x) = b(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}.$$

Следовательно,

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\, dx + C, \quad C = \text{const}.$$

Подставив это выражение для $C(x)$ в (4.4), общее решение уравнения запишем в виде

$$y = \left(\int_{x_0}^{x} b(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\, dx + C \right) e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}. \tag{4.5}$$

При решении конкретных уравнений имеет смысл не применять формулу (4.5), а проводить вычисления по схеме самостоятельно.

Уравнения Бернулли

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, \;\; n \neq 1,$$

называется уравнением Бернулли. Разделим обе части уравнения на y^n. Получим уравнение

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x).$$

Поскольку $\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$ замена $z = y^{1-n}$ приводит это уравнение к линейному относительно z:

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x).$$

При $n > 0$ функция $y = 0$ является решением уравнения (4.7), а при $n < 0$ не является.

Обобщенным уравнением Бернулли называется уравнение

$$\varphi'(y)y' + a(x)\varphi(y) = b(x),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая дифференцируемая функция. Делая замену $z = \varphi(y)$ (тогда $z' = \varphi'(y)y'$), придем к линейному уравнению $z' + a(x)z = b(x)$.

Уравнения Риккати

Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

называется уравнением Риккати. В отличие от всех уравнений, рассматривавшихся ранее, уравнение Риккати не всегда интегрируется в квадратурах. Чтобы решить его, необходимо знать хотя бы одно частное решение $y = y_1(x)$ этого уравнения. Тогда замена $y = y_1 + z$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли. Однако, проще сразу сделать замену

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y - y_1},$$

которая сводит уравнение Риккати к линейному.

Пример 1

Решим уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = 3x.$$

<u>Решение:</u>

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем $ln|y| = -ln|x| + lnC$. Потенцируя, находим $y = \frac{C}{x}$. Теперь ищем решение неоднородного уравнения в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}.$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим

$$\left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x^2} = 3x,$$

откуда $C'(x) = 3x^2$. Интегрируя, находим $C(x) = x^3 + C$. Поэтому общее решение уравнения имеет вид

$$y = \frac{x^3 + C}{x} = x^2 + \frac{C}{x}.$$

Пример 2

Рассмотрим уравнение

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

<u>Решение:</u>

Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x}{2xy},$$

откуда

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{x}{2y}.$$

Это уравнение Бернулли при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$, тогда $y = \sqrt{z}$, $y' = \frac{z'}{2\sqrt{z}}$. Подставив эти выражения в (4.9), получим

$$\frac{z'}{2\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{2x} = -\frac{x}{2\sqrt{x}} \quad \text{откуда} \quad z' - \frac{z}{x} = -x.$$

Решая полученное линейное уравнение, найдем

$$z = (-x + C)x = -x^2 + Cx.$$

Возвращаясь к переменным (x, y), получаем окончательно

$$y^2 = -x^2 + Cx.$$

К этому общему интегралу следует добавить решение $x = 0$.