Уравнения со специальной правой частью

Теория

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (9.9)$$

в правой части которого стоит заданная непрерывная на интервале I функция $f(x)$. Для удобства мы будем считать коэффициент при старшей производной равным 1. Уравнение (9.9) называется линейным неоднородным уравнением n-го порядка (функция f(x) называется свободным членом уравнения). Если известно общее решение соответствующего однородного уравнения y_0 и некоторое частное решение $\hat{y}$ уравнения (9.9), то общее решение неоднородного уравнения дается формулой $y = y_0 + \hat{y}$. Для отыскания частного решения уравнения (9.9) удобно пользоваться теоремой о сложении решений, которая состоит в следующем. Правую часть уравнения (9.9) разбивают на сумму функций более простого вида: $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ и находят частные решения $\hat{y}_k$ уравнений $Ly = f_k(x), k = 1, \ldots, m$, соответственно. Тогда $\hat{y} = \hat{y}_1 + \ldots + \hat{y}_m$ будет решением уравнения (9.9) с правой частью f(x).

Если решение уравнения (9.9) подобрать не удается, но известно общее решение (ф.с.р.) соответствующего однородного уравнения (9.1), то можно найти общее решение неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных или методом неопределенных множителей Лагранжа. Суть этого метода заключается в том, что решение неоднородного уравнения (9.9) ищется в том же виде, что и общее решение соответствующего однородного уравнения ($y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$), но коэффициенты $C_i, i = 1, \ldots, n$, считаются не постоянными, а пока неопределенными функциями $C_i = C_i(x), i = 1, \ldots, n$. Найти эти функции можно, решив алгебраическую систему уравнений относительно их производных $C_i'(x)$:

$$
\begin{array}{lllllllll}
C_1'y_1 & + & C_2'y_2 & + & \ldots & + & C_n'y_n & = & 0, \\
C_1'y_1' & + & C_2'y_2' & + & \ldots & + & C_n'y_n' & = & 0, \\
\ldots & & & & & & & & \\
C_1'y_1^{(n-2)} & + & C_2'y_2^{(n-2)} & + & \ldots & + & C_n'y_n^{(n-2)} & = & 0, \\
C_1'y_1^{(n-1)} & + & C_2'y_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & C_n'y_n^{(n-1)} & = & f(x).
\end{array} \tag{9.10}
$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ фундаментальной системы решений, который не обращается в нуль на интервале I. Поэтому система (9.10) имеет единственное решение $C_i'(x) = \phi_i(x), i = 1, \ldots, n$. Отсюда получаем $C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \phi i(x)dx + C_i, i = 1, \ldots, n$, где C_i — произвольные постоянные интегрирования. Подставляя эти значения в $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, запишем общее решение уравнения (9.9) следующим образом:

$$
y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_1 \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \phi_1(x)\,dx + y_2 \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \phi_2(x)\,dx + \ldots + y_n \cdot \int\limits_{x_0}^{x} \phi_n(x)\,dx. \tag{9.11}
$$

В формуле (9.11) первые n слагаемых представляют из себя общее решение однородного уравнения, а сумма остальных определяет некоторое частное решение уравнения (9.9), которое получается из общего решения, если положить $C_i = 0, i = 1, \ldots, n$. Однако, следует учитывать, что при обосновании метода вариации произвольных постоянных, коэффициент $a_0(x)$ при старшей производной однородного уравнения считается равным единице. Если это условие не выполняется, то в последнем уравнении системы (9.10) функцию $f(x)$ нужно заменить на $f(x)/a_0(x)$.

Если известно решение $y_1(x)$ однородного уравнения, то порядок уравнения (9.9), как и для однородного уравнения, понижается на единицу при помощи той же замены $u = (y/y_1)'$. В этом случае получается неоднородное уравнение $L_1u = f(x)$, левая часть которого определена в $L_1u \equiv b_0(x)u^{n-1} + b_1(x)u^{n-2} + \ldots + b_{n-1}(x)u = 0$. Таким образом, если известно m линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_m$ однородного уравнения, то порядок уравнения (9.9) может быть понижен на m единиц с сохранением линейности.

Пусть известно m решений $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_m$ уравнения (9.9). Тогда разности $y_1 = \hat{y}_2 - \hat{y}_1, \dots, y_{m-1} = \hat{y}_m - \hat{y}_{m-1}$ будут решениями соответствующего однородного уравнения. Поэтому, если эти разности окажутся линейно независимыми, то порядок уравнения (9.9) может быть понижен с сохранением линейности на (m − 1) единиц.

Пример

Рассмотрим уравнение

$$xy'' + y' - \frac{4y}{x} = \frac{1}{x}.$$

Решение:

Решение соответствующего однородного уравнения можно найти в виде многочлена $y_1 = x_2$. Далее, его общее решение находится по формуле: $y_0 = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2}$. Решение неоднородного уравнения будем искать в том же виде, но при этом считать, что $C_i = C_i(x), i = 1, 2$. Учитывая, что старший коэффициент уравнения равен x, система (9.10) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} C_1' x^2 + \dfrac{C_2'}{x^2} = 0, \\ 2C_1' x - \dfrac{2C_2'}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $C_1' = \frac{1}{4x^3}, C_2' = -\frac{x}{4}$, откуда $C_1(x) = C_1 - \frac{1}{8x^2}, C_2(x) = C_2 - \frac{x^2}{8}$. Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид (9.11):

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{8x^2} \cdot x^2 - \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{x^2} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{4}.$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

При решении неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (10.3)$$

с непрерывной правой частью f(x) также применяют теорему о сложении решений и метод вариации произвольных постоянных (см. предыдущий пункт).

Пример

Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = x + 1/\sin x.$$

Решение:

Разобьем правую часть уравнения на две: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = x, f_2(x) = 1/sinx$. Частное решение уравнения с правой частью $f_1(x)$ ищется в виде многочлена и легко подбирается: $\hat{y}_1 = x$. Решение уравнения с правой частью $f_2(x)$ будем искать методом вариации произвольных постоянных.

Общее решение соответствующего однородного уравнения легко записывается по корням характеристического многочлена $p_1 = i$, $p_2 = -i$ и имеет вид $y_0 = C_1 cos\ x + C_2\ sin\ x$.

Считая здесь $C_i = C_i(x), i = 1, 2$, пока не определенными функциями, запишем соответствующую систему (9.10):

$$\begin{aligned} &C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ &-C_1' \sin x + C_2' \cos x = 1/\sin x. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим $C_1' = -1\ , C_2' = ctg\ x$, следовательно, $C_1(x) = -x + C_1\ , C_2(x) = ln\ |sin\ x| + C_2$. Постоянные интегрирования проще всего взять равными нулю: $C_i = 0, i = 1, 2$. Тогда частное решение уравнения с правой частью $f_2(x)$ имеет вид $\hat{y}_2 = -x\, cos\, x + sin\, x \cdot ln\, |sin\, x|$. По теореме о сложении решений, функция $\hat{y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2 = x - x\, cos\, x + sin\, x \cdot ln\, |sin\, x|$ будет частным решением исходного уравнения. Прибавив это решение к общему решению однородного уравнения, получим его общее решение: $y = C_1\, cos\, x + C_2\, sin\, x + x - x\, cos\, x + sin\, x \cdot ln\, |sin\, x|$.

Однако, в ряде случаев, если функция f(x) имеет специальный вид, частное решение уравнения (10.3) удобнее искать методом неопределенных коэффициентов

1. Пусть $f(x) = P_m(x)$ — многочлен степени m от x

1.1. Число p = 0 не является корнем характеристического многочлена L(p) уравнения (10.3) (в последовательности его корней $p_1, p_2, \ldots, p_n$ нет значения $p = 0$). Тогда существует частное решение уравнения вида

$$\hat{y} = \tilde{P}_m(x), \tag{10.4}$$

где $\tilde{P}_m(x)$ — многочлен степени m от x с неопределенными коэффициентами. Подставив его в (10.3), получим тождественное равенство двух многочленов. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, получим линейную алгебраическую систему для определения коэффициентов многочлена (10.4).

1.2. Число $p = 0$ является корнем кратности k для многочлена L(p) (в последовательности его корней значение $p = 0$ повторяется k раз). Тогда частное решение уравнения (10.3) можно искать в виде

$$\hat{y} = x^k \tilde{P}_m(x). \tag{10.5}$$

Неопределенные коэффициенты многочлена $\tilde{P}_m(x)$ ищутся аналогично.

2. Пусть $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m от x, а α — некоторое действительное число.

2.1. Число $p = \alpha$ не является корнем многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней $p_1, p_2, \dots, p_n$ нет значения $p = \alpha$). Тогда частное решение уравнения (10.3) ищется в виде

$$\hat{y} = \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}. \qquad (10.6)$$

Подставив (10.6) в (10.3), после сокращения на $e^{\alpha x}$, придем, как и в предыдущих случаях, к тождественному равенству многочленов степени m.

2.2. Число $p = \alpha$ является корнем кратности k для многочлена $L(p)$ (в последовательности его корней значение $p = \alpha$ повторяется k раз). В этом случае частное решение уравнения (10.3) нужно искать в виде

$$\hat{y} = x^k \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}. \qquad (10.7)$$

3. Пусть $f(x) = P_m(x) cos\, \beta x + Q_l(x) sin\, \beta x$, где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ — многочлены степеней m и l соответственно, а β — некоторое действительное число.

3.1. Числа $p = \pm i\beta$ не являются корнями многочлена $L(p)$. В этом случае частное решение уравнения (10.3) ищется в виде

$$\hat{y} = \tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x, \qquad (10.8)$$

где $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ — многочлены степени s, где $s = max(m, l)$, с неопределенными коэффициентами. Подставим (10.8) в (10.3) и приравняем отдельно многочлены, стоящие в обеих частях полученного равенства при $cos\, \beta x$ и $sin\, \beta x$ (это можно сделать в силу линейной независимости этих функций). Таким образом, мы снова придем к тождественному равенству многочленов и системе уравнений для определения коэффициентов $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_s(x)$.

3.2. Числа $p = \pm i\beta$ являются корнями кратности k многочлена $L(p)$. Тогда частное решение нужно искать в виде

$$\hat{y} = x^k(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \qquad (10.9)$$

4. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) cos\ \beta x + Q_l(x)\ sin\ \beta x)$, где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ многочлены от x степеней m и l соответственно, α, β — некоторые действительные числа.

4.1. Если числа $p = \alpha \pm i\beta$ не являются корнями многочлена $L(p)$, то частное решение уравнения (10.3) можно искать в виде

$$\hat{y} = e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.10}$$

После подстановки (10.10) в (10.3) и сокращения на $e^{\alpha x}$ необходимо приравнять многочлены, стоящие в обеих частях равенства при $cos\ \beta x$ и $sin\ \beta x$. Получится система алгебраических уравнений для определения их коэффициентов.

4.2. Если числа $p = \alpha \pm i\beta$ являются корнями кратности k многочлена $L(p)$, то частное решение уравнения ищется в виде

$$\hat{y} = x^k e^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x), \quad s = \max(m, l). \tag{10.11}$$

Отметим, что случай 4 обобщает все случаи 1–3. В самом деле, случай 3 получается при α = 0, случай 2 — при β = 0, а случай 1 — при α = β = 0. Тем не менее, на практике удобнее рассматривать их отдельно.