2017 Machine Learning with R

Naïve Bayesian Classifier
Logistic Regression

강필성

고려대학교 산업경영공학부

pilsung_kang@korea.ac.kr

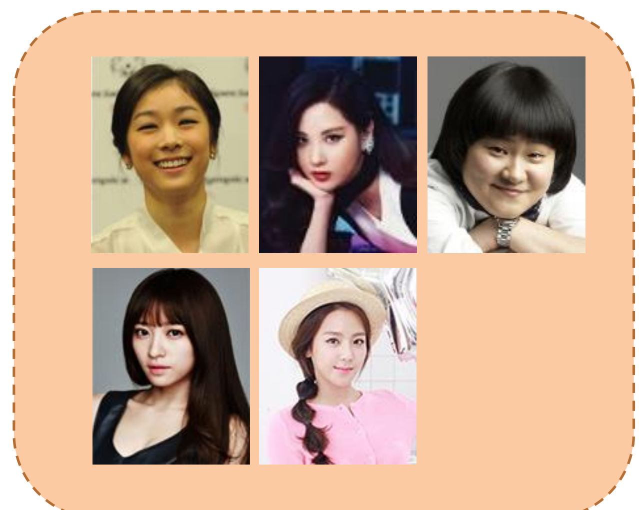
목차

분류 문제 예시

Men

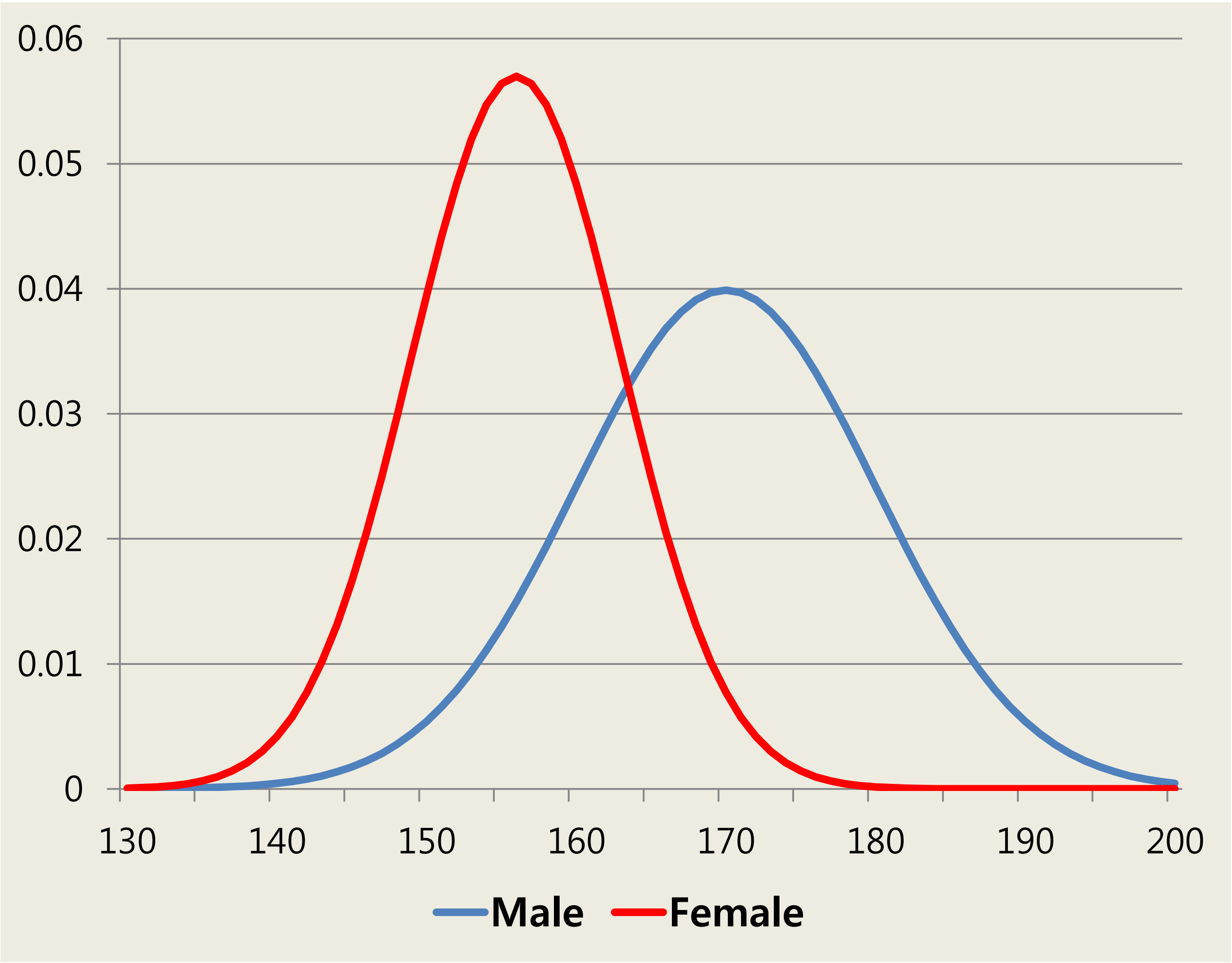
Vs.

Women



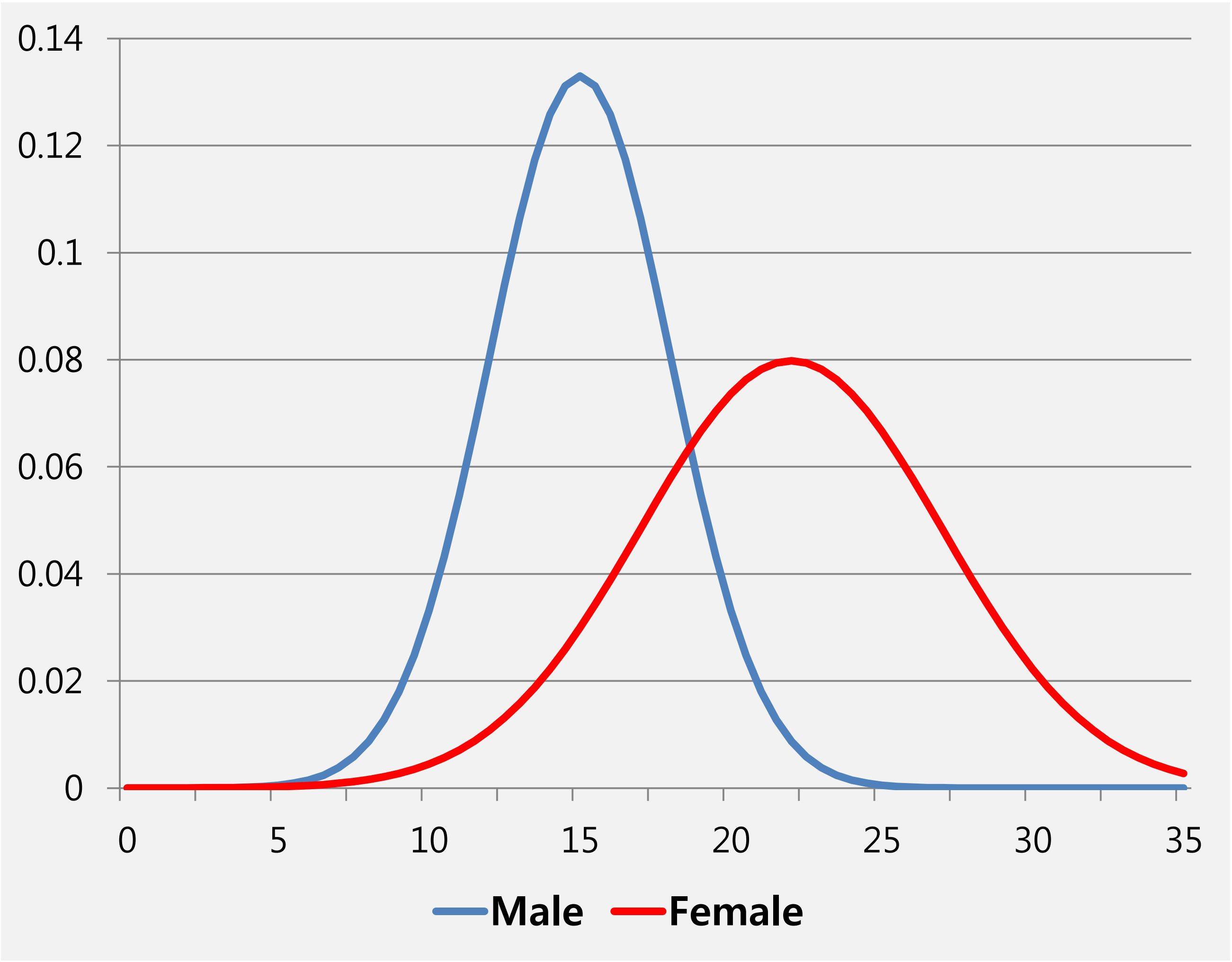
Naïve Bayesian Classification: Concept

❖ 남자와 여자의 키에 대한 사전 분포를 미리 알고 있다면…



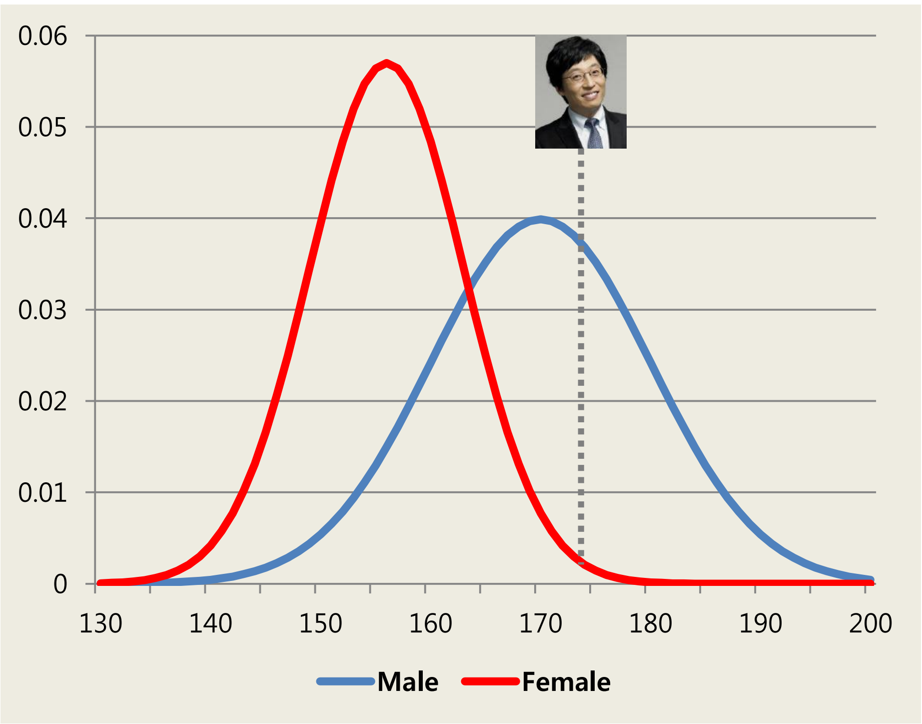
Naïve Bayesian Classification: Concept

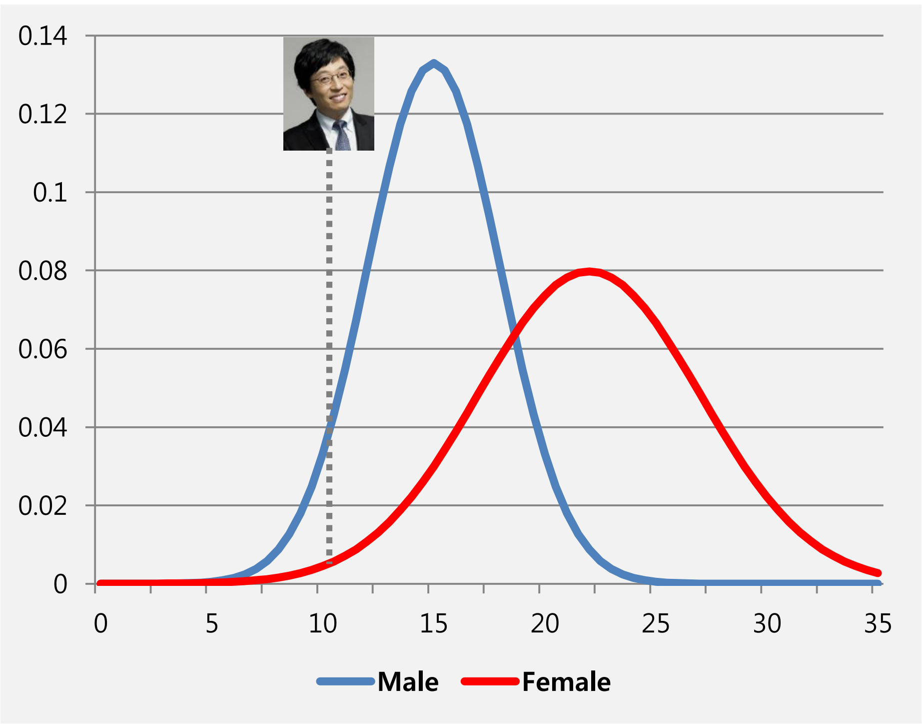
- 남자와 여자의 체지방률에 대한 사전 분포를 미리 알고 있다면…



Naïve Bayesian Classification: Concept

- 유재석은 남자일까 여자일까?

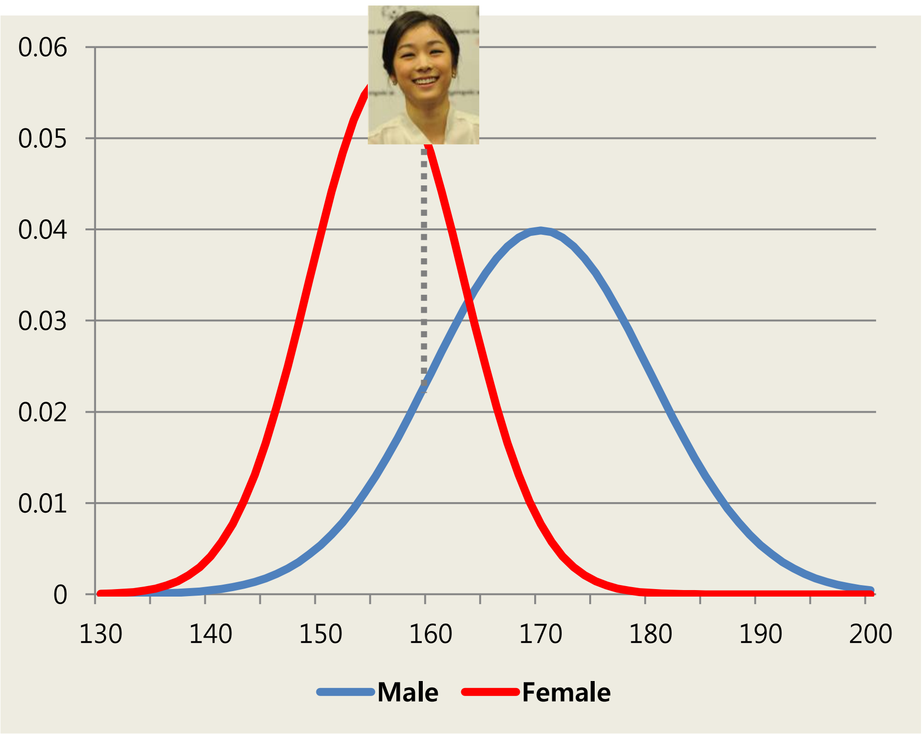


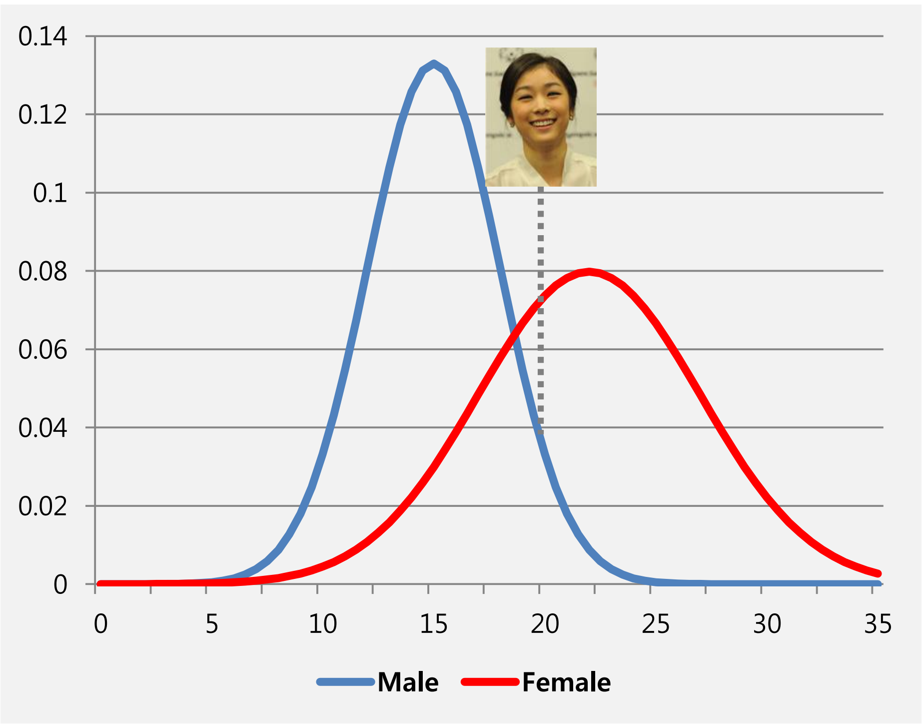


➔ 키로 보나 체지방률로 보나 남자일 가능성이 높음

Naïve Bayesian Classification: Concept

❖ 김연아는 남자일까 여자일까?

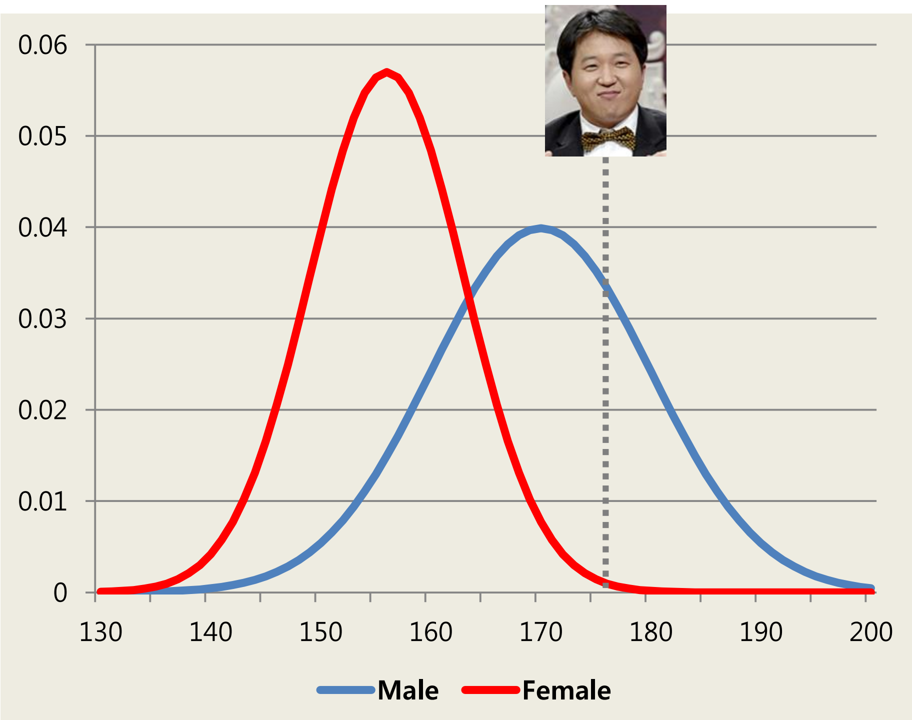


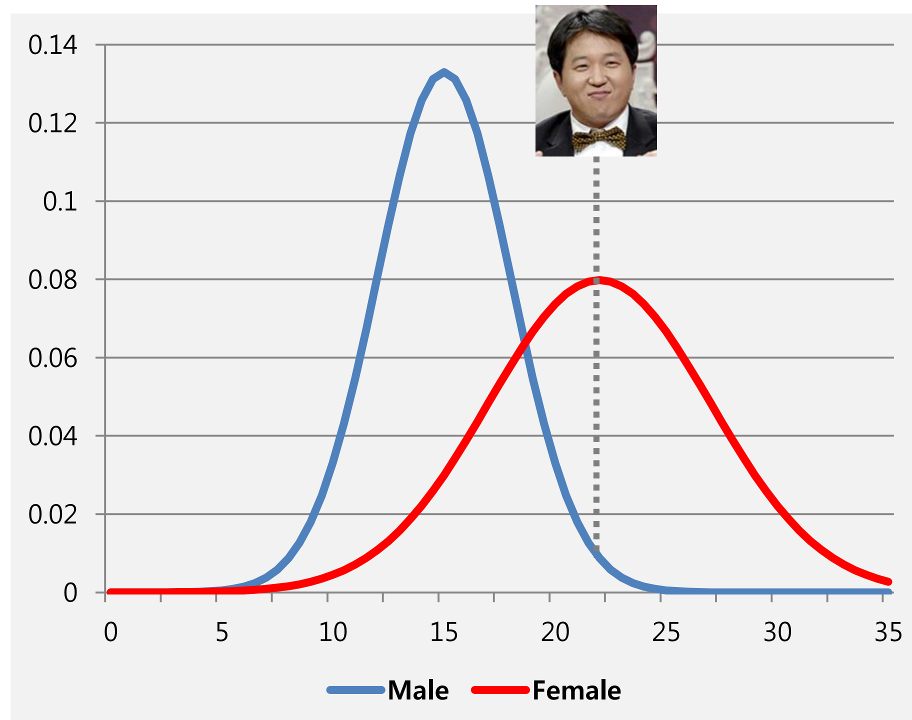


➔ 키로 보나 체지방률로 보나 여자일 확률이 높음

Naïve Bayesian Classification: Concept

❖ 그렇다면 정형돈은?





➔ 키로 보면 남자인데 체지방률로 보면 여자… 어느 범주로 분류를 해야 하지???

Naïve Bayesian Classification: Theory

❖ 베이즈 규칙(Baye's Rule)

Posterior probability
(사후확률)

Likelihood
(우도)

Prior probability
(사전확률)

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(B,A)}{P(A)} \times P(A)}{P(B)}$$

Evidence
(증거)

Naïve Bayesian Classification: Theory

- 나이브 베이즈 분류기(Naïve Bayesian Classifier)
  - 베이즈 규칙 적용
  - 각 변수들은 서로 통계적으로 독립이라고 가정

$$P(C_i \mid x_1, x_2, \ldots, x_d) = \frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_d \mid C_i) P(C_i)}{P(x)}$$

Baye's Rule

$$= \frac{\left(P(x_1 \mid C_i) \cdot P(x_2 \mid C_i) \cdot \ldots \cdot P(x_n \mid C_i)\right) P(C_i)}{P(x)}$$

Naïve: Variables are statistically independent!

Naïve Bayesian Classification: Decision Rule

❖ 각 범주에 대한 사후 확률 계산

$$P(C_1 \mid x_1, x_2, \ldots, x_d) = \frac{\left(P(x_1 \mid C_1) \cdot P(x_2 \mid C_1) \cdot \ldots \cdot P(x_n \mid C_1)\right) P(C_1)}{P(x)}$$

$$P(C_2 \mid x_1, x_2, \ldots, x_d) = \frac{\left(P(x_1 \mid C_2) \cdot P(x_2 \mid C_2) \cdot \ldots \cdot P(x_n \mid C_2)\right) P(C_2)}{P(x)}$$

❖ 사후 확률값이 높은 범주로 분류

Naïve Bayesian Classification: Concept

- 우리가 여기서 구하고자 하는 것은 다음의 두 확률
  - P(정형돈 Height, 정형돈 BFP | Male)*P(Male) vs.
  - P(정형돈 Height, 정형돈 BFP | Female)*P(Female)
- 만일 두 속성인 height 와 BFP가 통계적으로 독립이라는 가정을 할 수 있고 남자와 여자의 비율이 같다면
  - P(정형돈 Height, 정형돈 BFP | Male) *P(Male) =

    P(정형돈 Height | Male)* P(정형돈 BFP | Male) *P(Male) = 0.035*0.01*= 0.000175
  - P(정형돈 Height, 정형돈 BFP | Female) P(Female) =

    P(정형돈 Height | Female)* P(정형돈 BFP | Female)* P(Female) = 0.001*0.08*0.5 = 0.00004
- 0.000175 > 0.00004 이므로 정형돈은 남자로 분류!

Naïve Bayesian Classification: Procedure

1

학습 데이터 준비

- 설명변수를 정의하고 필요한 학습 데이터 수집
  - ✓ 학습 데이터 총 개체 수: 200 (남성 100명, 여성 100명)
  - ✓ 설명변수: 키(Height), 체지방률(BFS)

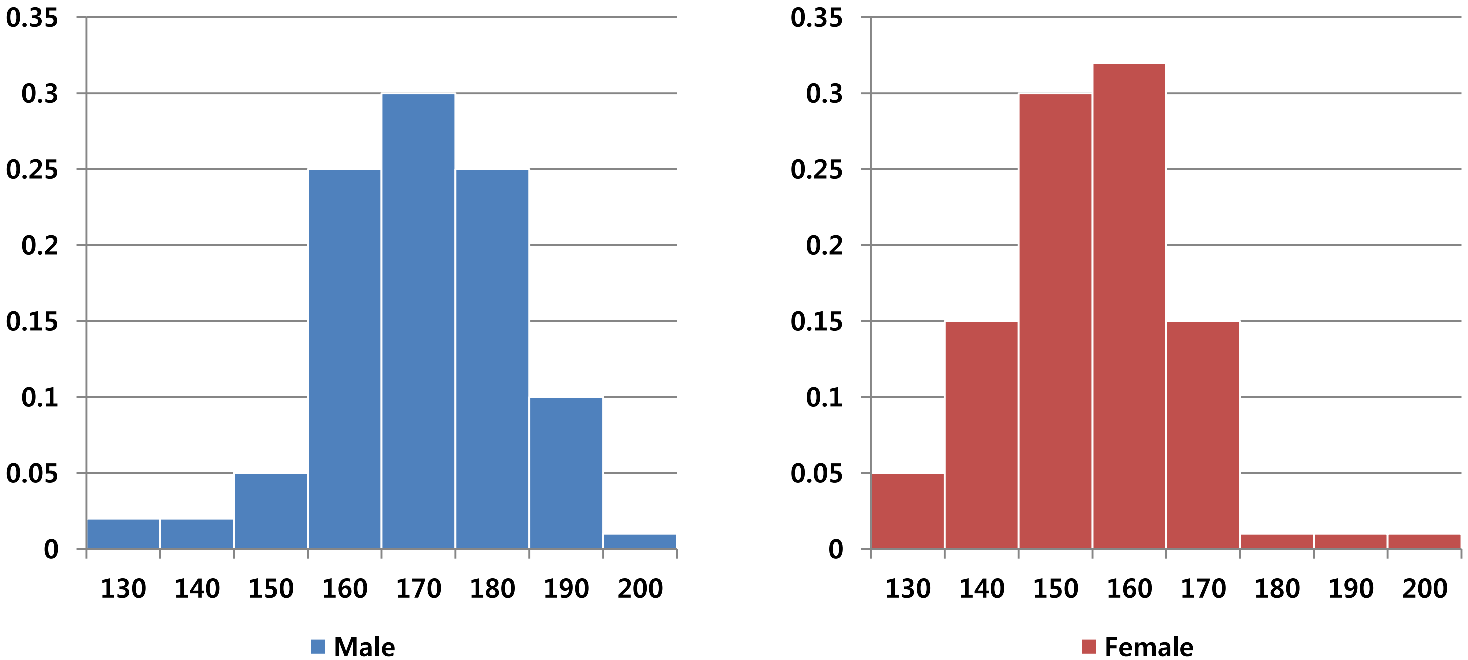
Record	Height	BFS	Class
1	187	15	M
2	165	25	F
3	174	14	M
4	156	29	F
…	…	…	…
N	168	12	M

Naïve Bayesian Classification: Procedure

2

범주-변수별 확률분포 추정

- 각 범주의 모든 변수에 대해 확률분포 추정: 히스토그램 사용
- 키에 대한 히스토그램

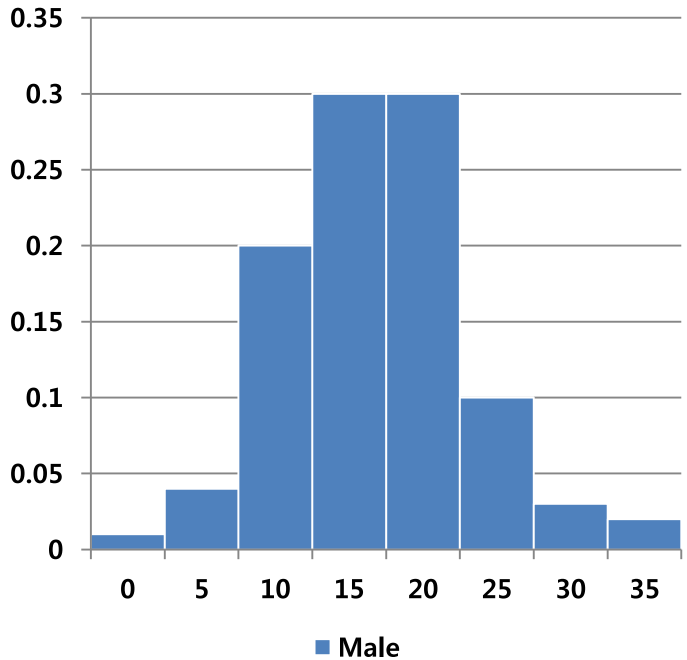


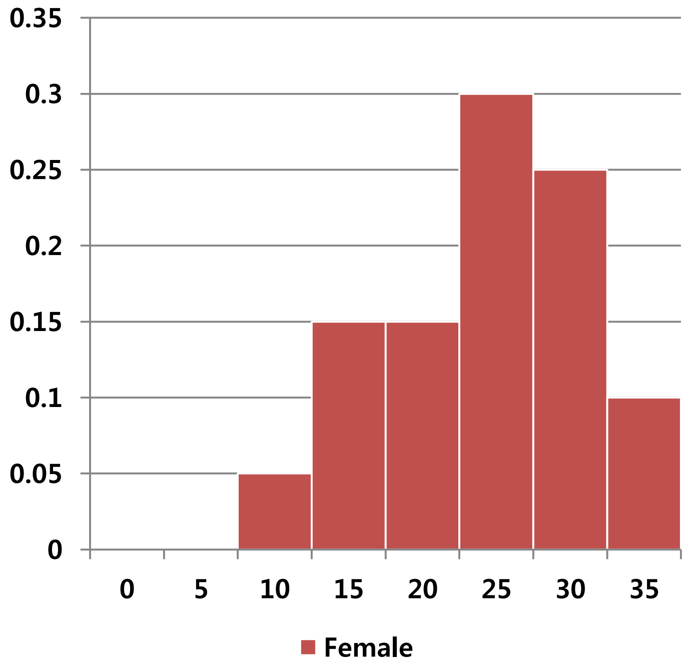
Naïve Bayesian Classification: Procedure

범주-변수별 확률분포 추정

2

- 각 범주의 모든 변수에 대해 확률분포 추정: 히스토그램 사용
- 체지방률에 대한 히스토그램



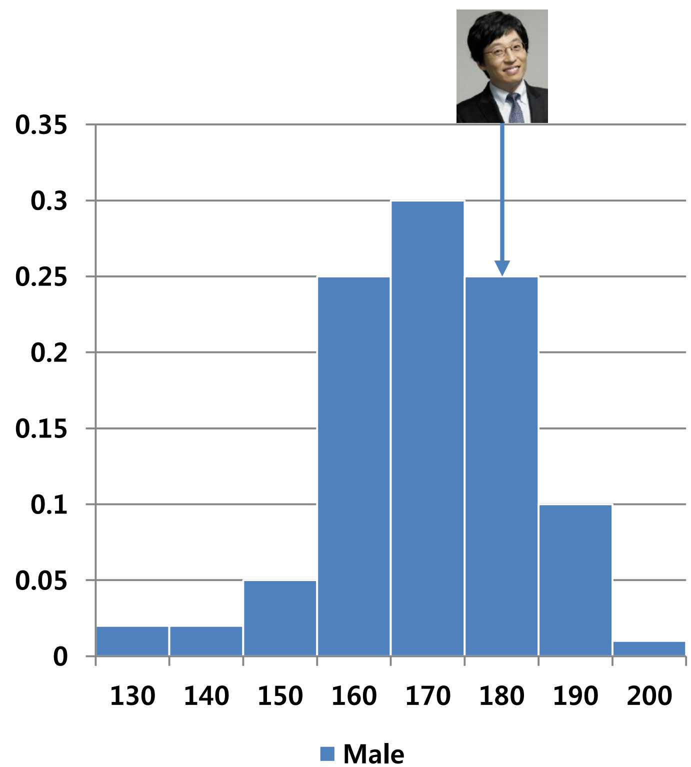


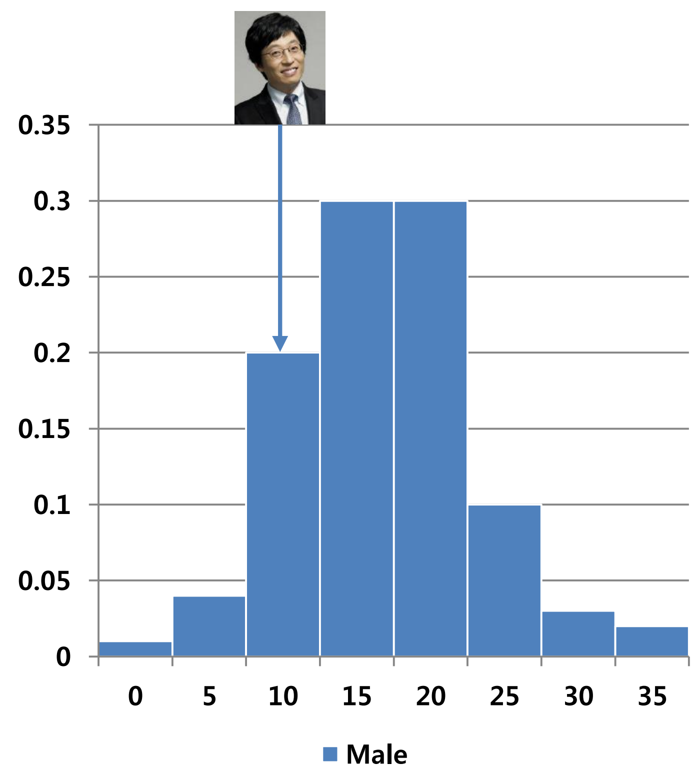
Naïve Bayesian Classification: Procedure

3

각 변수에 대한 조건부 확률 추정

- P(Height = 178 | Male) = 0.25, P(BFS = 11 | Male) = 0.2



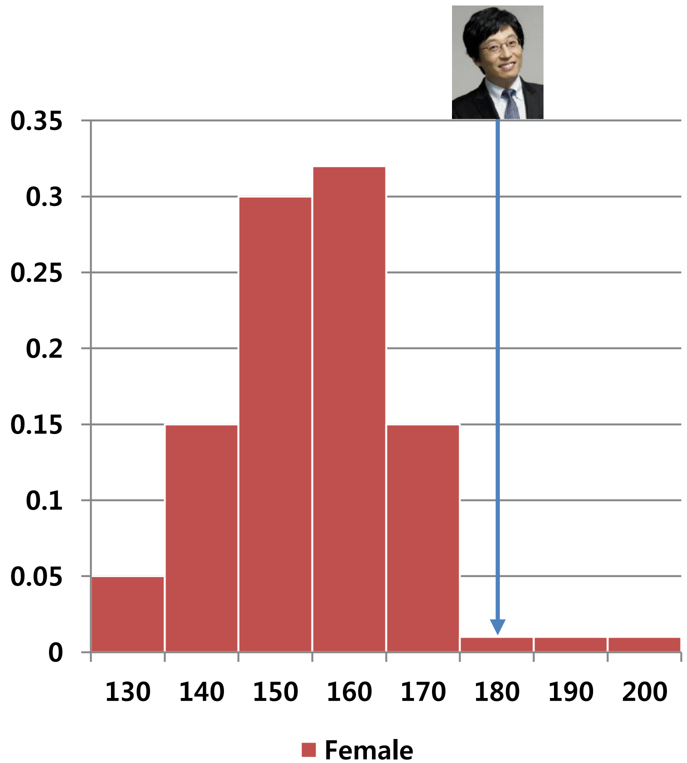


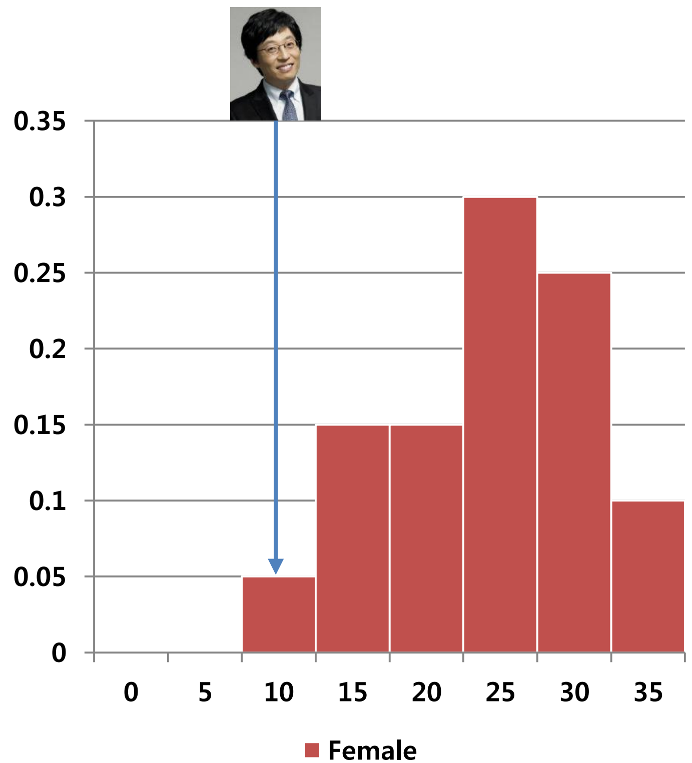
Naïve Bayesian Classification: Procedure

3

각 변수에 대한 조건부 확률 추정

- P(Height = 178 | Female) = 0.01, P(BFS = 11 | Female) = 0.05





Naïve Bayesian Classification: Procedure

4

각 범주에 속할 사후 확률(Posterior Probability) 추정

- 각 범주에 대한 사후 확률
  - ✓ P(Height = 178, BFS = 11 | Male) * P(Male)

    = P(Height = 178 | Male)* P(BFS = 11 | Male) * P(Male)

    = 0.25*0.2*0.5 = 0.025
  - ✓ P(Height = 178, BFS = 11 | Female) * P(Female)

    = P(Height = 178 | Female)* P(BFS = 11 | Female) * P(Female)

    = 0.01*0.05*0.5 = 0.00025

Naïve Bayesian Classification: Procedure

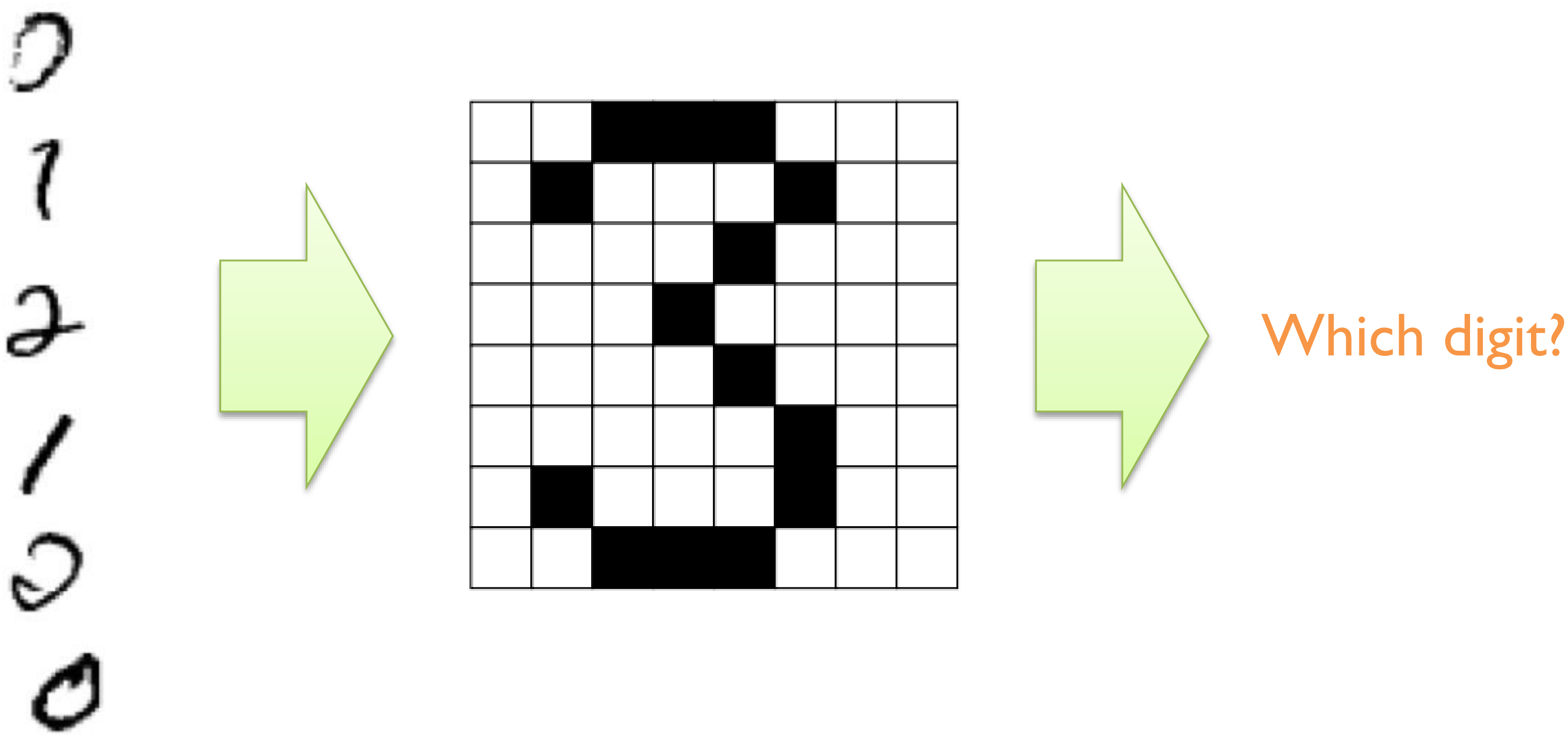
5

최종 범주 예측

- P(Height=178, BFS=11 | Male) * P(Male) > P(Height=178, BFS=11 | Female) P(Female) ➔ 남성으로 분류
- 만일 학습 데이터가 400명의 남성과 100명의 여성으로 구성되어 있다면?
  - ✓ 각 범주의 사전확률 고려: P(Male) & P(Female)
  - ✓ P(Height=178, BFS=11 | Male)*P(Male) = 0.05*0.8 = 0.04
  - ✓ P(Height=178, BFS=11 | Female)*P(Female) = 0.0005*0.2 = 0.0001

Naïve Bayesian Classifier Example

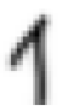
- 손으로 쓴 숫자를 판별하는 문제
  - 입력 변수: 픽셀 정보
  - 범주: 0부터 9까지 10개 범주



Naïve Bayesian Classifier Example

❖ 변수(속성 정의)

- 각 격자의 위치인 <i, j>에 대해 값을 부여
- 단순히 1/0으로 사용할 수도 있고, 어두운 정도를 연속형 숫자로 표현할 수도 있음
- 각 이미지는 아래와 같이 벡터 형태로 변환



$$\rightarrow \langle F_{0,0}=0 \;\; F_{0,1}=0 \;\; F_{0,2}=1 \;\; F_{0,3}=1 \;\; F_{0,4}=0 \;\; \ldots F_{15,15}=0 \rangle$$

❖ 나이브 베이지안 분류기

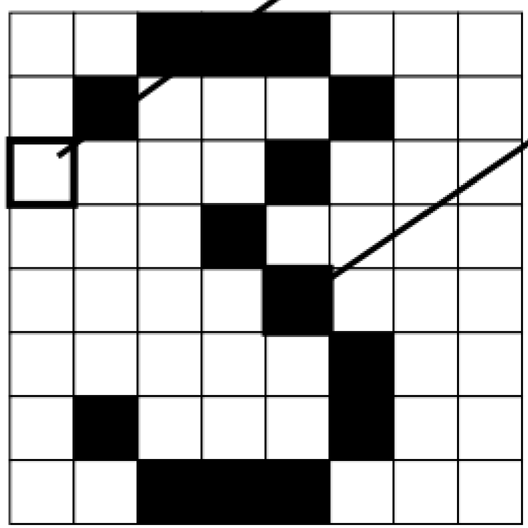
$$P(Y|F_{0,0}\ldots F_{15,15}) \propto P(Y)\prod_{i,j} P(F_{i,j}|Y)$$

Naïve Bayesian Classifier Example

- 추정해야 되는 값은 무엇인가?

$P(Y)$

1	0.1
2	0.1
3	0.1
4	0.1
5	0.1
6	0.1
7	0.1
8	0.1
9	0.1
0	0.1



$P(F_{3,1} = on|Y)$

1	0.01
2	0.05
3	0.05
4	0.30
5	0.80
6	0.90
7	0.05
8	0.60
9	0.50
0	0.80

$P(F_{5,5} = on|Y)$

1	0.05
2	0.01
3	0.90
4	0.80
5	0.90
6	0.90
7	0.25
8	0.85
9	0.60
0	0.80

Naïve Bayesian Classifier Example

학습 절차

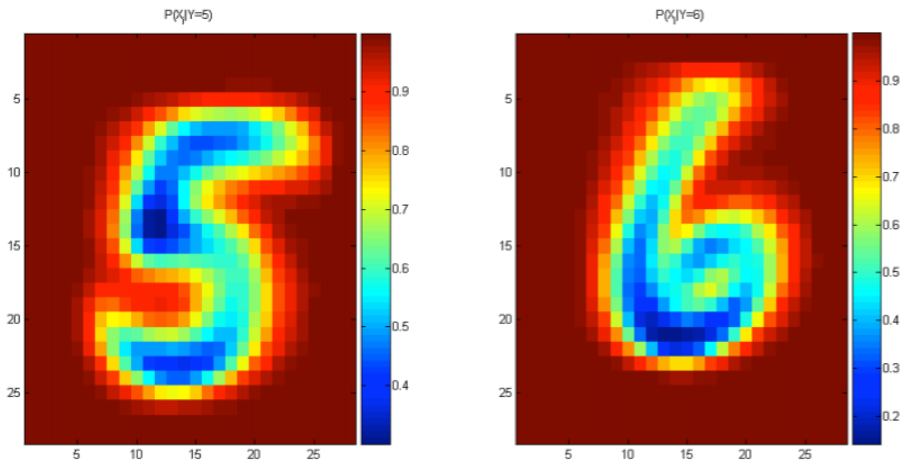
- 각 격자에 대해 범주의 비율을 구함
  - Prior:

$$P(Y=y) = \frac{Count(Y=y)}{\sum_{y'} Count(Y=y')}$$

  - Observation distribution:

$$P(X_i = x|Y=y) = \frac{Count(X_i = x, Y = y)}{\sum_{x'} Count(X_i = x', Y = y)}$$

학습된 예제

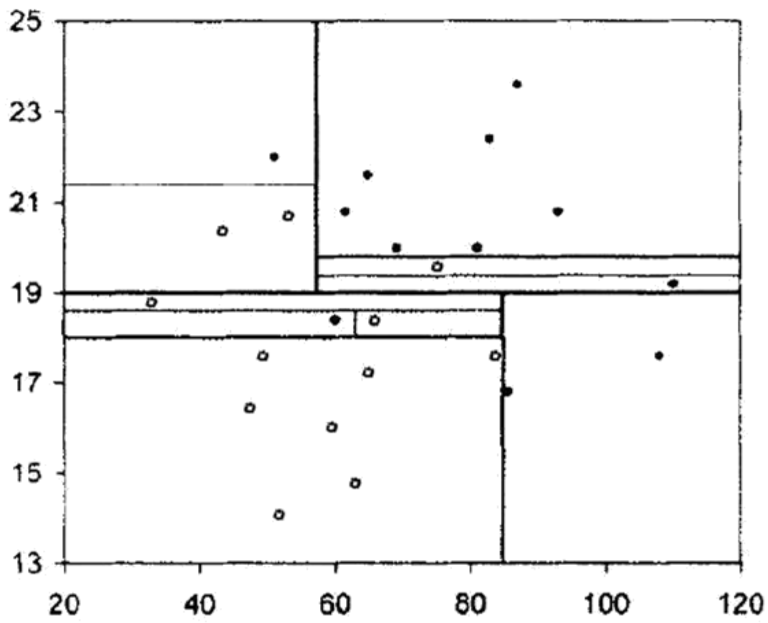


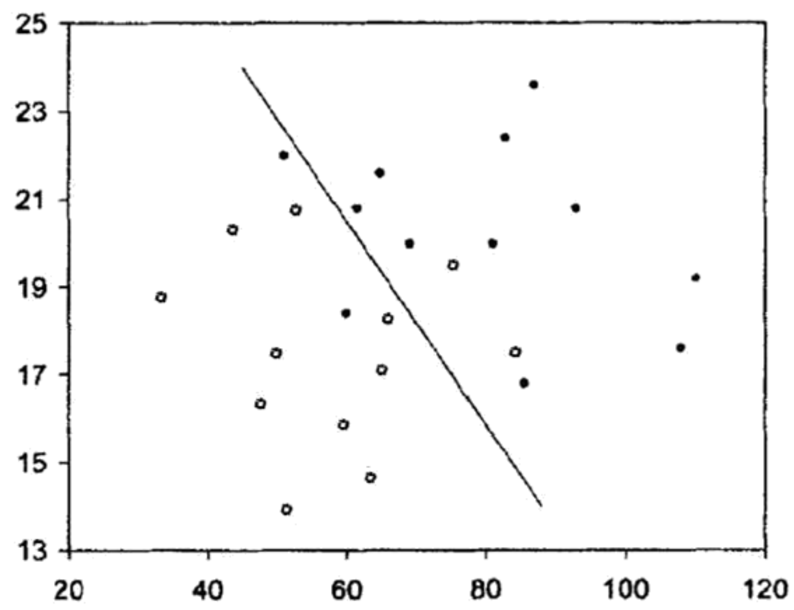
목차

분류 알고리즘 경계면

- 분류를 수행하기 위한 알고리즘은 여러 가지가 존재
  - 동일한 결과를 얻기 위한 다양한 길이 존재하기 때문

"Separate the riding mower buyers(●) from non-buyers(○)"





다중선형회귀분석

❖ 목적

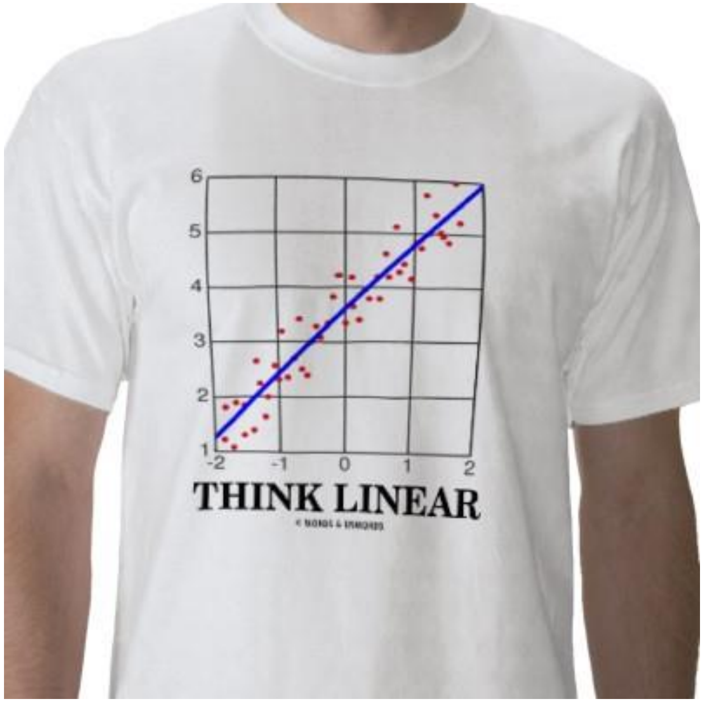
- 수치형 설명변수 X와 종속변수 Y간의 관계를 선형으로 가정하고 이를 가장 잘 표현할 수 있는 회귀 계수를 추정

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \cdots + \beta_d x_d + \epsilon$$

unexplained

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d$$

coefficients



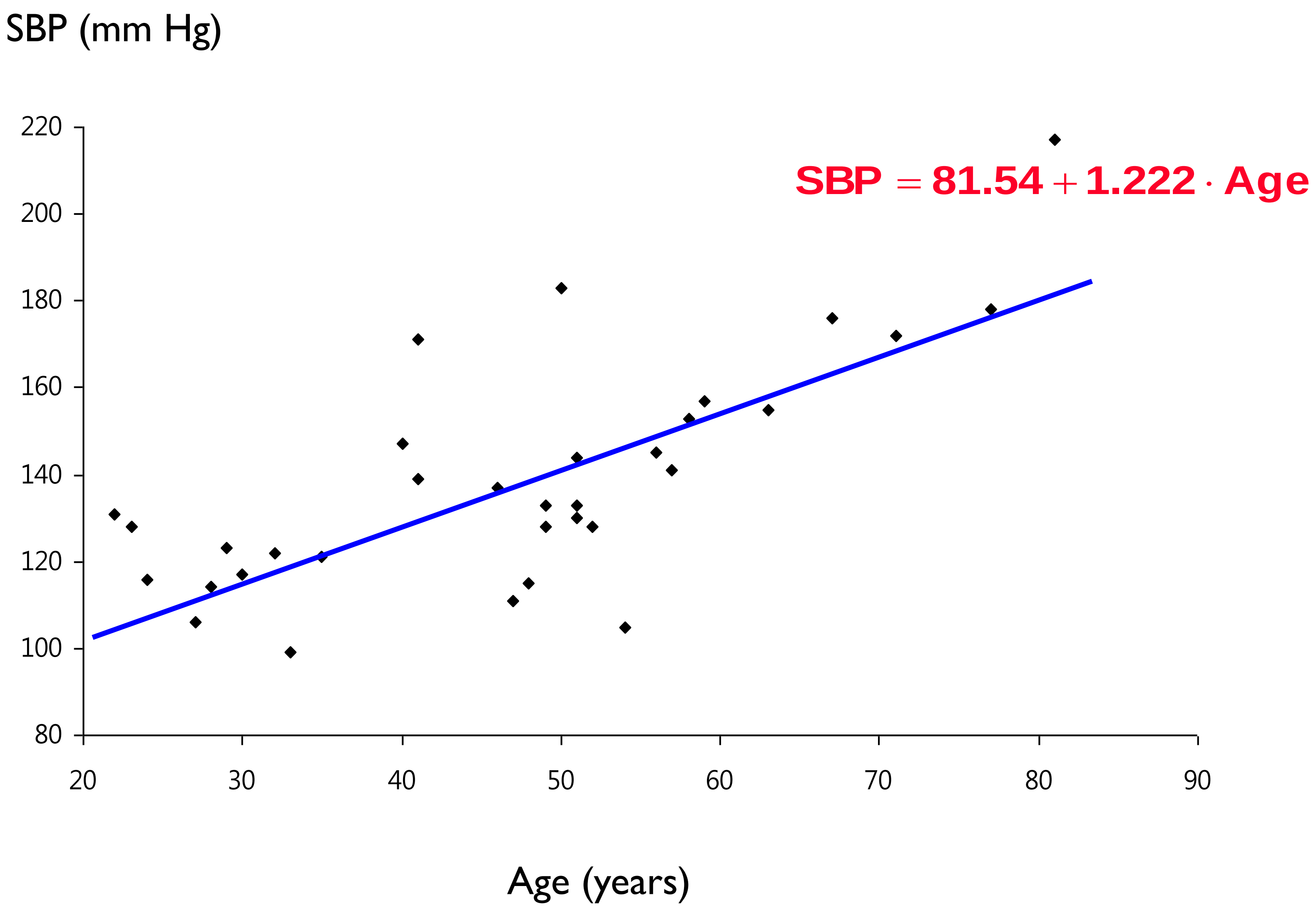
다중선형회귀분석

❖ 예시 I

- 33명의 성인 여성에 대한 나이와 혈압 사이의 관계

Age	SBP	Age	SBP	Age	SBP
22	131	41	139	52	128
23	128	41	171	54	105
24	116	46	137	56	145
27	106	47	111	57	141
28	114	48	115	58	153
29	123	49	133	59	157
30	117	49	128	63	155
32	122	50	183	67	176
33	99	51	130	71	172
35	121	51	133	77	178
40	147	51	144	81	217

다중선형회귀분석


SBP (mm Hg)
220
200
180
160
140
120
100
80
20
30
40
50
60
70
80
90
SBP = 81.54 + 1.222 · Age
Age (years)

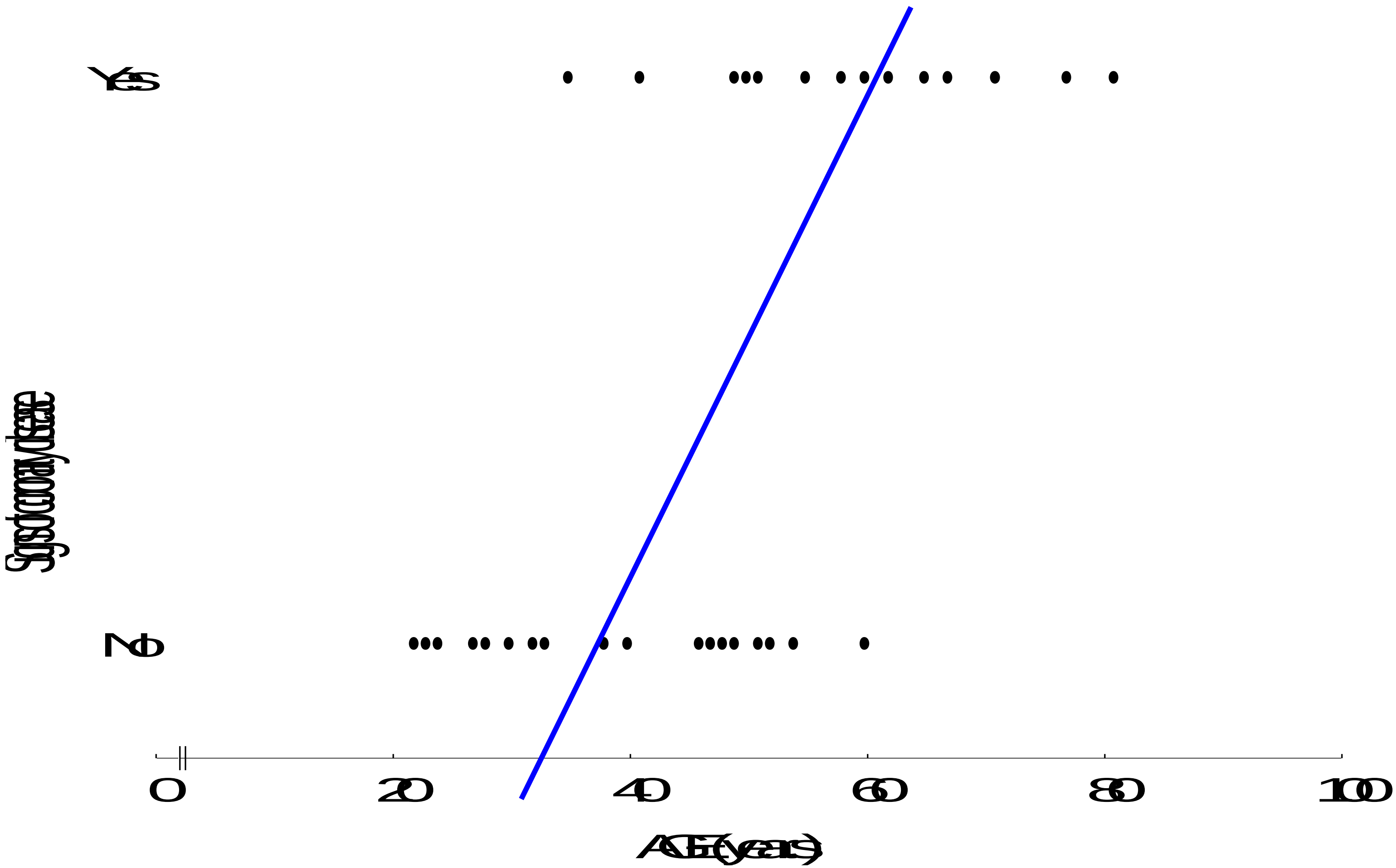
만약에...

❖ 예시 2

- 연속형 변수가 아닌 이진형(Binary) 변수인 Cancer Diagnosis를 사용한다면?

Age	CD	Age	CD	Age	CD
22	0	40	0	54	0
23	0	41	1	55	1
24	0	46	0	58	1
27	0	47	0	60	1
28	0	48	0	60	0
30	0	49	1	62	1
30	0	49	0	65	1
32	0	50	1	67	1
33	0	51	0	71	1
35	1	51	1	77	1
38	0	52	0	81	1

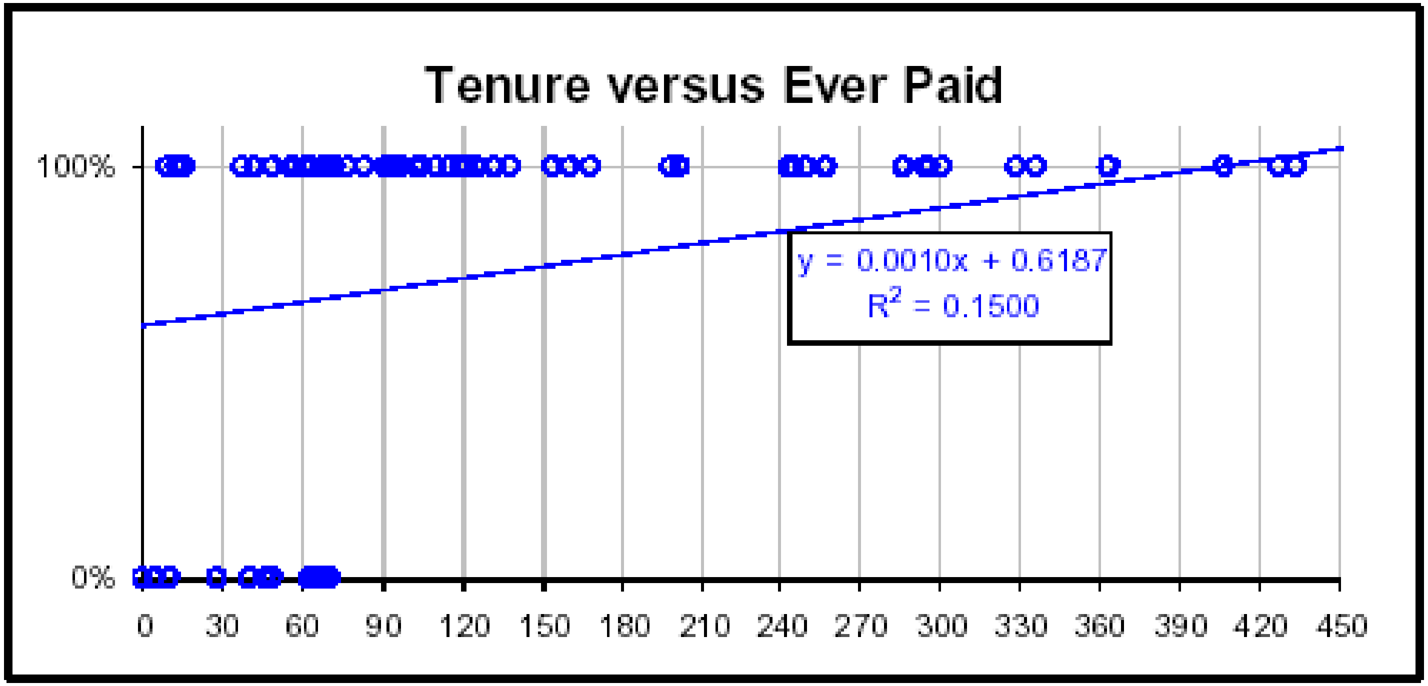
만약에...



분류 문제의 경우

- 확률값을 선형회귀분석의 종속 변수로 사용하는 것이 타당한가?
  - 선형회귀분석의 우변의 범위에 대한 제한이 없기 때문에 종속변수(좌변) 역시 범위의 제한을 받지 않음

$$P(Y=1) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon$$



로지스틱 회귀분석

목적

- 이진형(0/1)의 형태를 갖는 종속변수(분류문제)에 대해 회귀식의 형태로 모형을 추정하는 것

속성

- 종속변수 Y 자체를 그대로 사용하는 것이 아니라 Y에 대한 로짓 함수(logit function)를 회귀식의 종속변수로 사용
- 로짓함수는 설명변수의 선형결합으로 표현될 수 있음
- 로짓함수의 값은 종속변수에 대한 성공 확률로 역산될 수 있으며, 이는 따라서 분류 문제에 적용할 수 있음

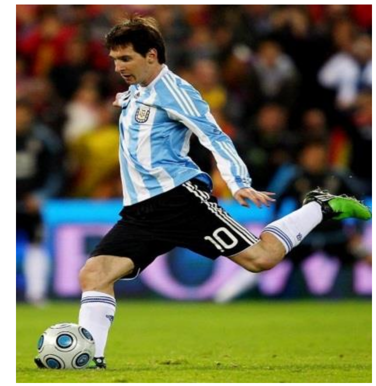
로지스틱 회귀분석

❖ 2010 World Cup Betting Odds

9 : 2

9 : 2

6 : 1



9 : 1

200 : 1

250 : 1

500 : 1

1000 : 1

로지스틱 회귀분석: Odds

Odds

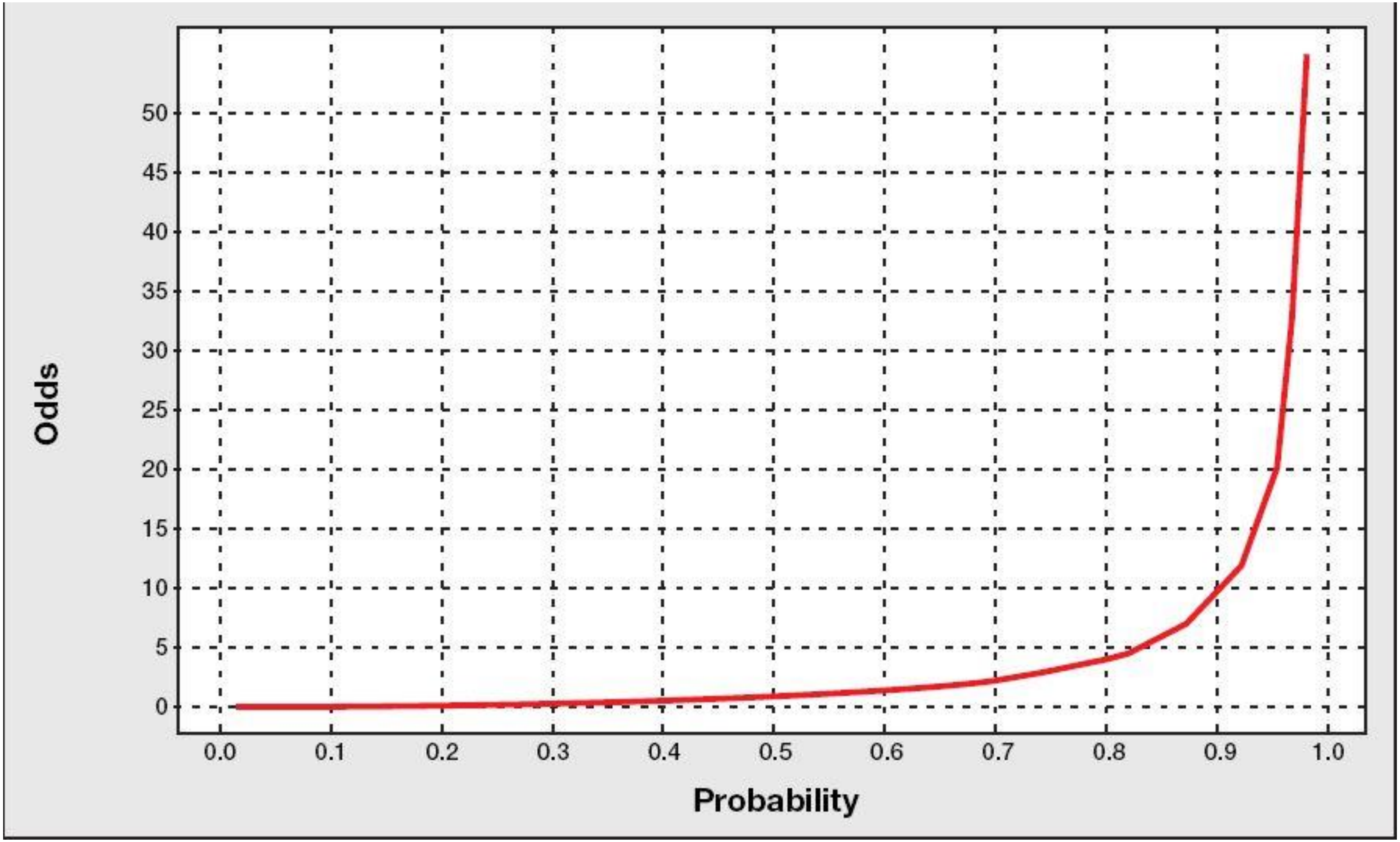
- p = probability of belonging to class 1 (success).

$$Odds = \frac{p}{1-p}$$

이전 예시에 대해

- 스페인의 우승 odds는 2/9이므로 스페인의 우승 확률은 2/11임
- 대한민국의 우승 odds는 1/250 이므로 대한민국의 우승확률은 1/251 ≒ 0.00398 (0.398%)임
- 1,000년을 살면 대한민국이 월드컵에서 한 번 우승하는 모습을 목격할 수 있음

로지스틱 회귀분석: Odds



로지스틱 회귀분석: Log Odds

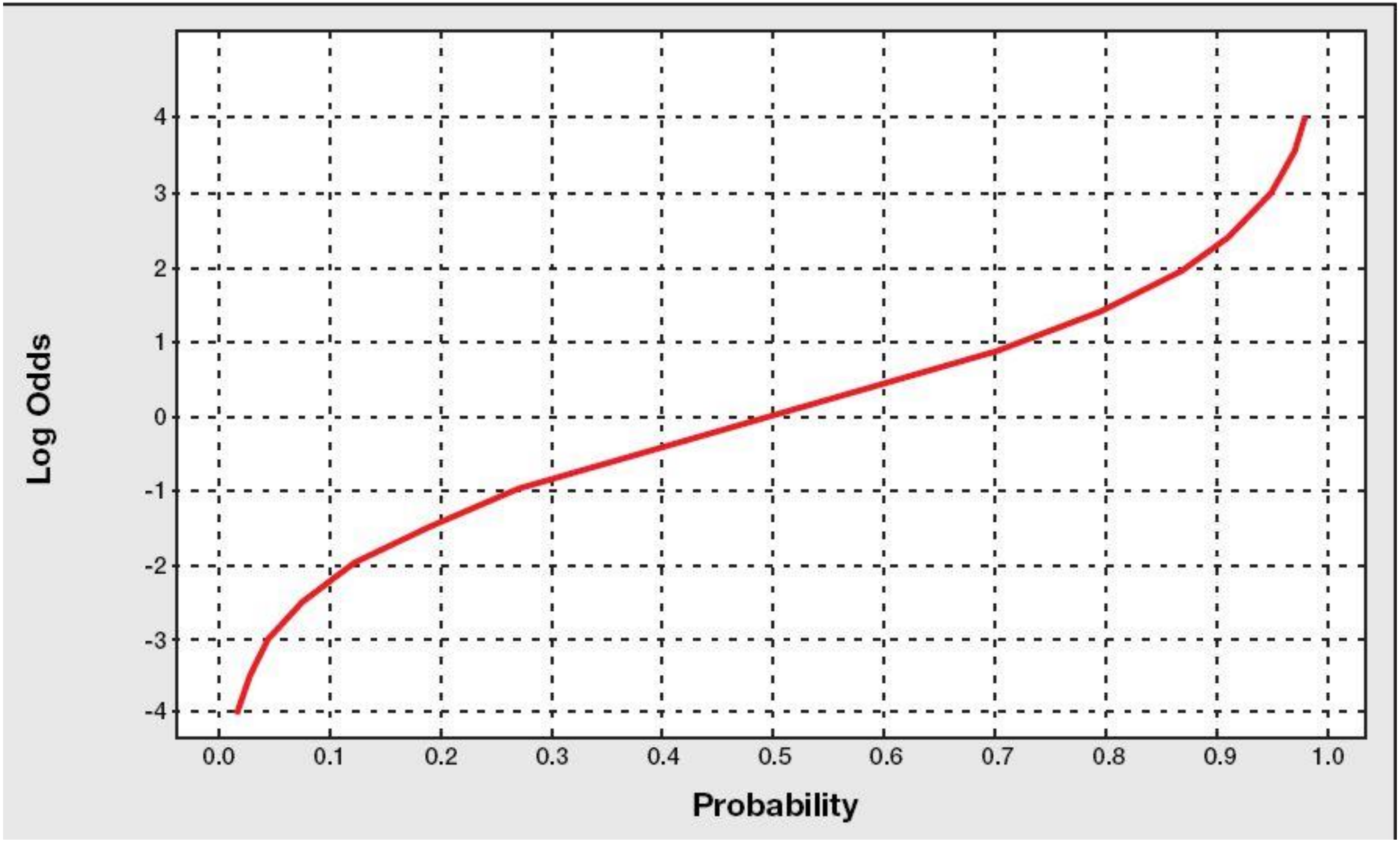
- Odds의 한계
  - 여전히 범위에 대한 제약이 존재함: 0 < odds < ∞
  - 비대칭성(Asymmetric)

- Odds에 로그를 취하자

$$\log(Odds) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

  - 드디어 범위에 대한 제약이 없어짐: - ∞ < log(odds) < ∞
  - 대칭성 확보
  - 성공확률 p가 작으면 음수값을 갖고, 성공확률 p가 크면 양수값을 가짐

로지스틱 회귀분석: Log Odds



로지스틱 회귀분석: Equation

❖ 로지스틱 회귀분석 식

- Log Odds를 이용한 회귀분석 식

$$log(Odds) = log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d$$

- 양변에 로그를 취하면

$$\frac{p}{1-p} = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d}$$

- 성공확률에 대한 식으로 표현

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d)}}$$

로지스틱 회귀분석: Equation

❖ 로지스틱회귀분석 식

Logistic Regression 선형식

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

: logit
(odds에 자연로그를 취한 상태)

$$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_i x_i$$

- 로지스틱 회귀 모형은 종속변수가 이분형일 때 선형회귀모형의 제약을 극복하기 위해 확률에 대한 로짓 변환을 고려하여 분석

$$P = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_i x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_i x_i)}$$

- 위의 모형식에서 추정된 회귀계수로부터 사후확률에 대한 추정식을 계산

로지스틱 회귀분석: 학습 (Optional)

- 최대 우도 추정법: Maximum likelihood estimation (MLE)
  - Expectation function:

$$P(x_i, y_i \mid \beta) = \begin{cases} \sigma(\mathrm{x}, \beta) & \text{if } y = 1 \\ 1 - \sigma(\mathrm{x}, \beta) & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

$$= \sigma(\mathrm{x}, \beta)^{y} \left(1 - \sigma(\mathrm{x}, \beta)\right)^{1-y}$$

  - Likelihood and log-likelihood of the training data **X**:

$$L(\mathrm{X}, y, \beta) = \prod_{i=1}^{R} \sigma(\mathrm{x_i}, \beta)^{y_i} \left(1 - \sigma(\mathrm{x_i}, \beta)\right)^{1-y_i}$$

$$\ln L(\mathrm{X}, y, \beta) = \sum_{i=1}^{R} y_i \ln\left(\sigma(\mathrm{x_i}, \beta)\right) + (1 - y_i) \ln\left(1 - \sigma(\mathrm{x_i}, \beta)\right)$$

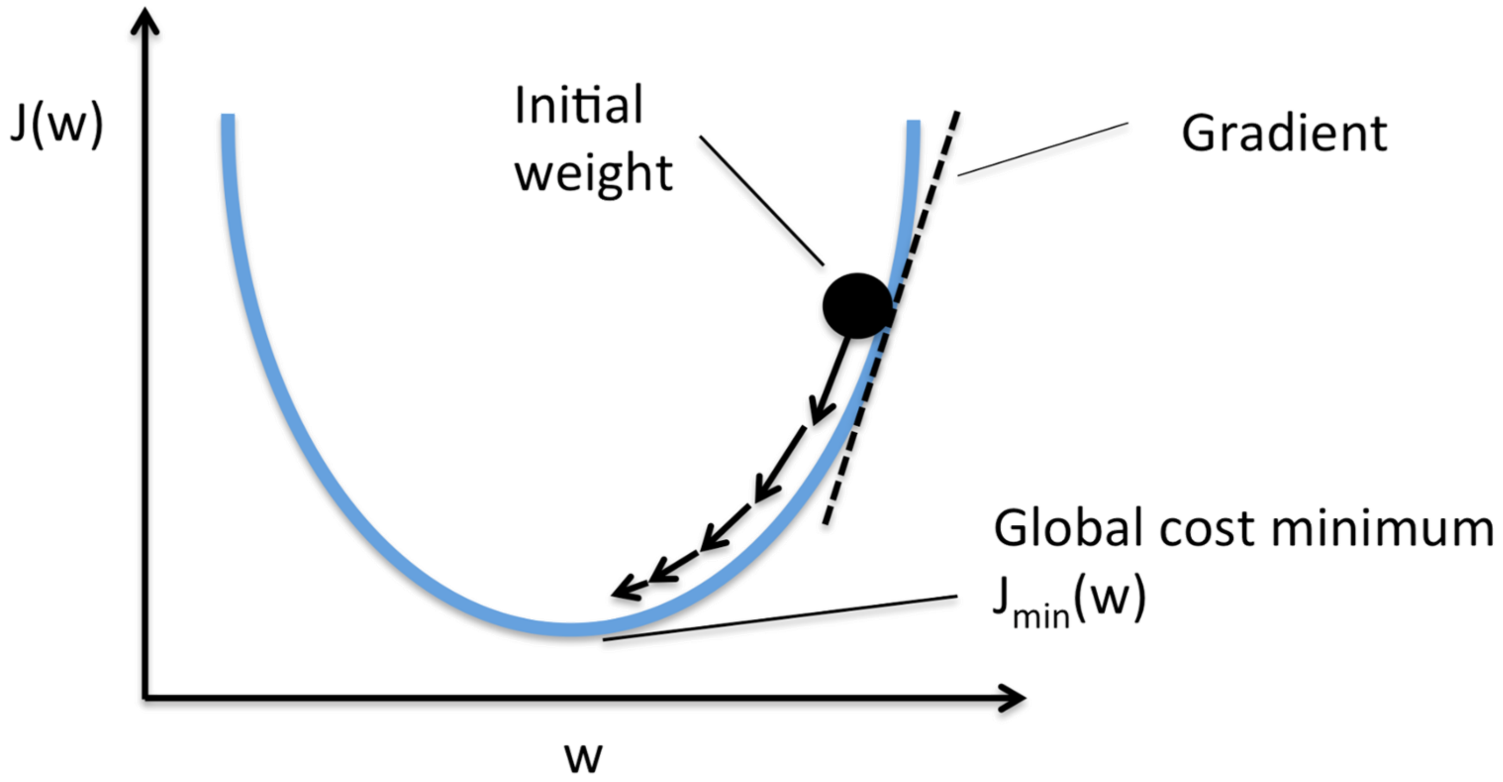
  - 우도함수와 로그-우도함수는 회귀계수 β에 대해 비선형이므로 선형회귀분석과 같이 명시적인 해가 존재하지 않음
    - ✓ Conjugate gradient 등의 최적화 알고리즘을 차용하여 해를 구함

기울기 하강: Gradient Descent

❖ 눈을 가린채로 산에서 가장 낮은 곳을 찾아가기

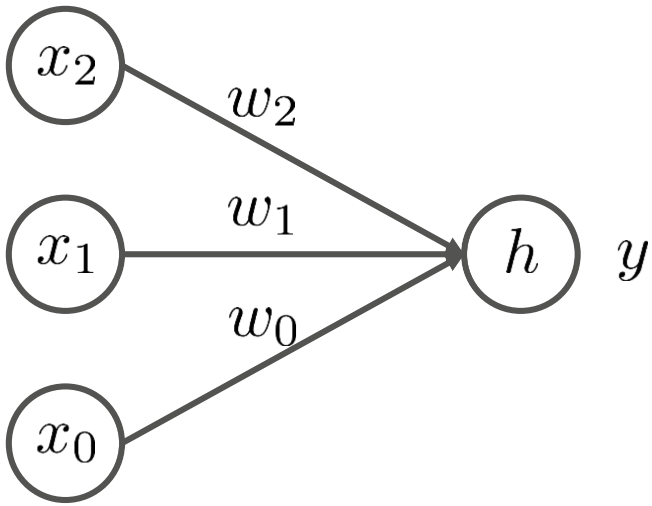
기울기 하강: Gradient Descent

- 기울기 하강: Gradient descent algorithm
  - 파란색 선: 가중치 w의 변화에 따른 목적함수 값의 변화
  - 검은색 점: 현재 해의 위치
  - 화살표: 목적함수를 최적화하기 위해 가중치 w가 이동해야 하는 방향



기울기 하강: Gradient Descent

- A Simple Example (Logistic Regression with two input variables)



$$h = \sum_{i=0}^{2} w_i x_i$$

$$y = \frac{1}{1 + exp(-h)}$$

- Let's define the squared loss function $L = \frac{1}{2}(t - y)^2$
- How to find the gradient w.r.t. w or x?

기울기 하강: Gradient Descent

- Use chain rule

$$\frac{\partial L}{\partial y} = y - t$$

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{exp(-h)}{(1+exp(-h))^2} = \frac{1}{1+exp(-h)} \cdot \frac{exp(-h)}{1+exp(-h)} = y(1-y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial w_i} = x_i$$

- Gradients for w and x

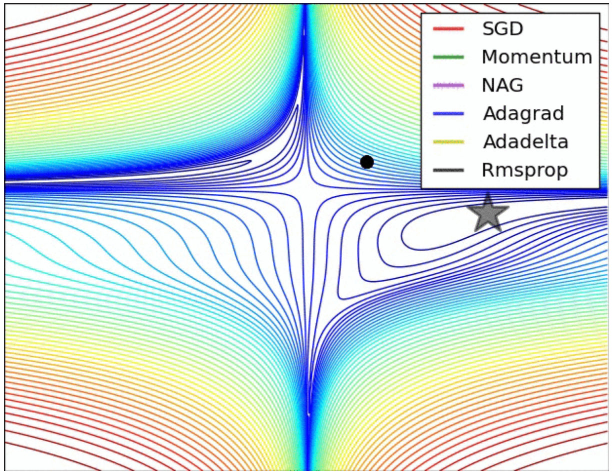
$$\frac{L}{\partial w_i} = \frac{L}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial w_i} = (y-t) \cdot y(1-y) \cdot x_i$$

- Update w

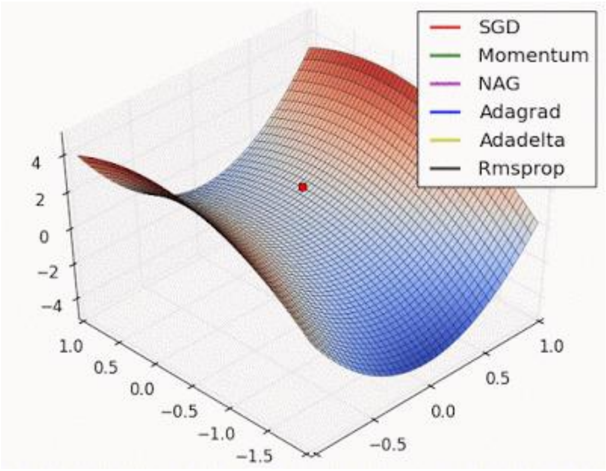
$$w_{new} = w_{old} - \alpha \times \frac{L}{\partial w_i} = w_{old} - \alpha \times (y-t) \cdot y(1-y) \cdot x_i$$

기울기 하강: Gradient Descent

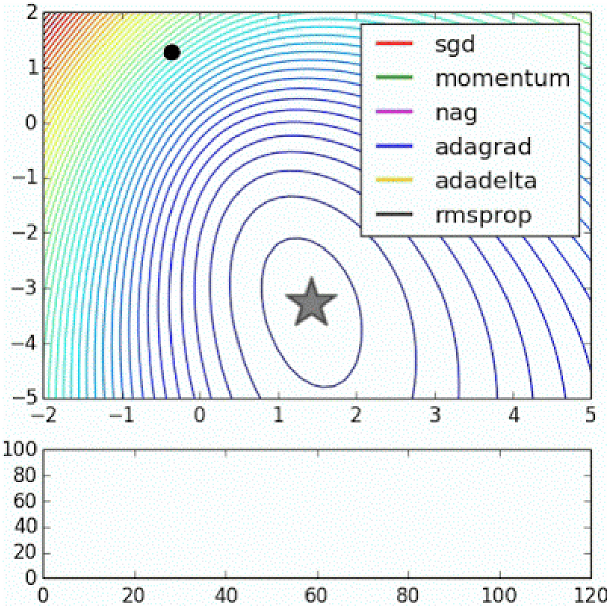
❖ Gradient Descent 의 수렴(Convergence)



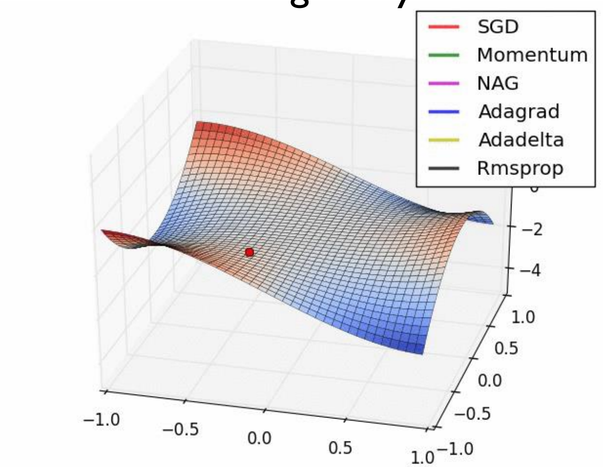
Beale's function



Long valley



Noisy moons



Saddle point

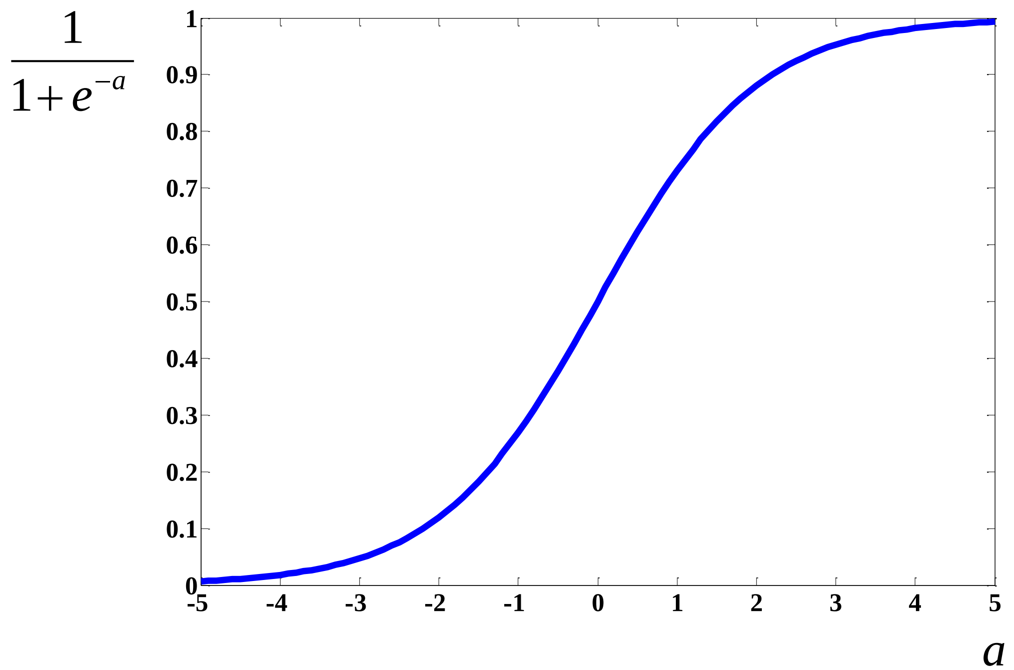
http://www.denizyuret.com/2015/03/alec-radfords-animations-for.html

로지스틱 회귀분석: 학습

❖ 성공 확률

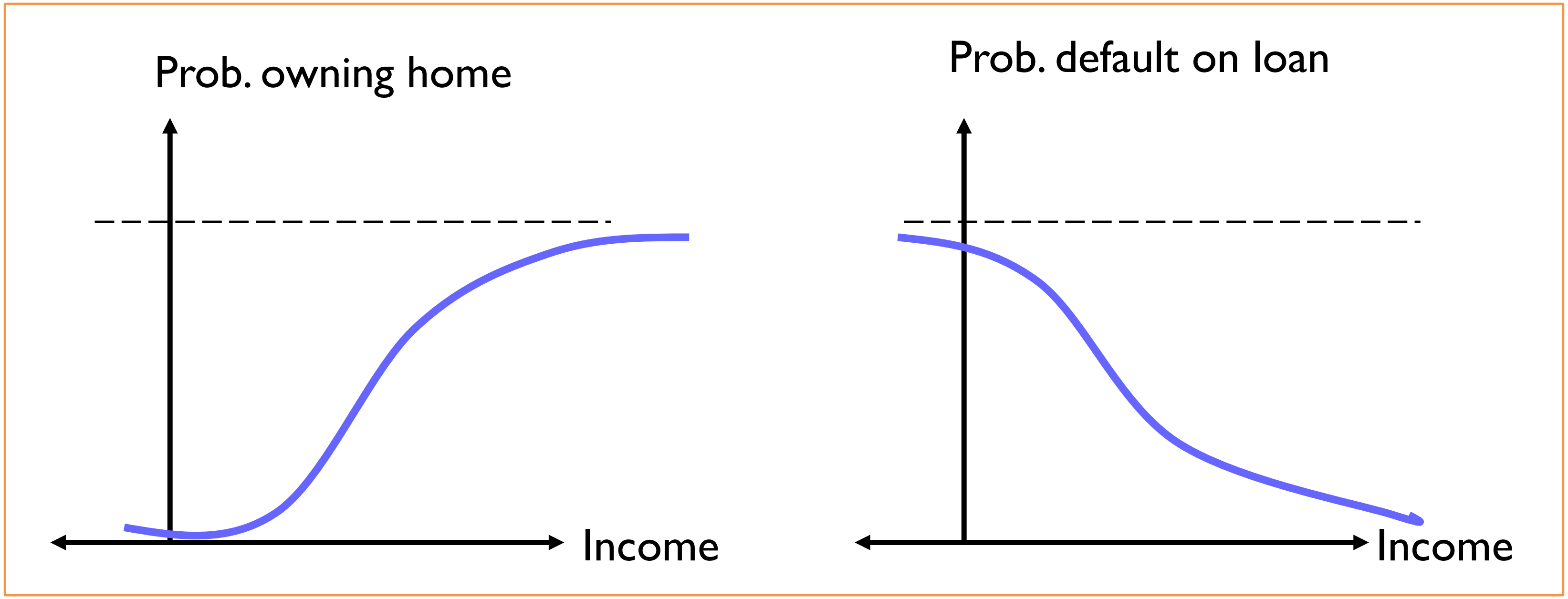
- 회귀계수가 추정되고 나면 주어진 설명변수집합에 대한 성공확률을 다음과 같이 계산할 수 있음

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d)}}$$



로지스틱 함수의 의미

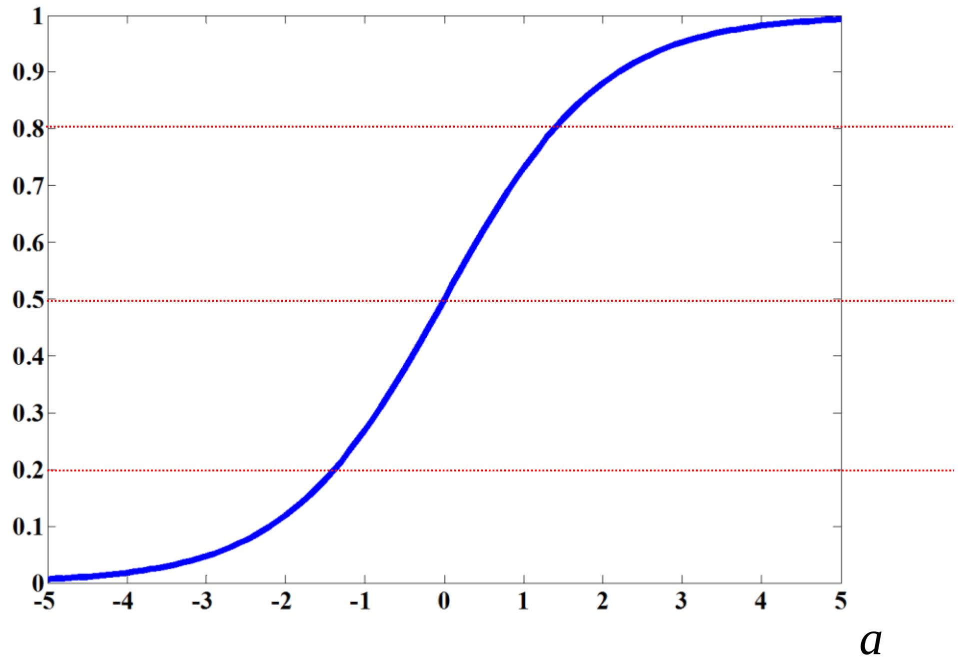
- 실제 상황에서는
  - 특정 변수에 대한 확률 값은 선형이 아닌 S-커브 형태를 따르는 경우가 많음



로지스틱 회귀분석: Cut-off

❖ 이진분류를 위한 cut-off 설정

$$\frac{1}{1+e^{-a}}$$



성공 범주의 비중이 높을 때 (제조업 데이터에서는 거의 발생하지 않는 case)

가장 일반적인 cut-off

성공 범주의 비중이 낮을 때 (예: 불량 예측)

- 일반적으로 0.50가 주로 사용됨
- 사전확률을 고려한 cut-off나 검증데이터의 정확도를 최대화하는 cut-off 등이 사용될 수도 있음

로지스틱 회귀분석: Interpretation

❖ 로지스틱 회귀분석 회귀계수의 의미

- 선형 회귀분석 회귀식

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d$$

✓ 선형 회귀분석에서의 회귀계수는 해당 변수가 1 증가함에 따른 종속변수의 변화량

- 로지스틱 회귀분석 회귀식

$$log(Odds) = log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d$$

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d)}}$$

✓ 로지스틱 회귀분석에서의 회귀계수는 해당 변수가 1 증가함에 따른 로그 승산의 변화량

로지스틱 회귀분석: Interpretation

❖ 승산 비율: Odds Ratio

- 로지스틱 회귀분석에서 나머지 변수는 모두 고정시킨 상태에서 한 변수를 1만큼 증가시켰을 때 변화하는 Odds의 비율
- Odds ratio:

$$\frac{odds(x_1+1,\cdots,x_d)}{odds(x_1,\cdots,x_d)}=\frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1(x_1+1)+\hat{\beta}_2x_2+\cdots+\hat{\beta}_dx_d}}{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2+\cdots+\hat{\beta}_dx_d}}=e^{\hat{\beta}_1}$$

- x_1이 1 증가하게 되면 성공에 대한 승산 비율이 e^{β_1} 만큼 변화함
  - ✓회귀 계수가 양수 → 변수가 증가하면 성공 확률이 <u>증가</u> (성공범주와 <u>양의 상관관계</u>)
  - ✓회귀 계수가 음수 → 변수가 증가하면 성공 확률이 <u>감소</u> (성공범주와 <u>음의 상관관계</u>)

$$\frac{p}{1-p}=e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2\cdots+\hat{\beta}_dx_d}$$

로지스틱 회귀분석: Interpretation

❖ 로지스틱 회귀분석 결과 및 해석

- 로지스틱 회귀분석을 수행하고 나면 선형 회귀분석과 유사하게 다음과 같은 표를 결과로 얻을 수 있음

$$p = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 \cdots + \hat{\beta}_d x_d)}}$$

Input variables	Coefficient	Std. Error	p-value	Odds
Constant term	-13.20165825	2.46772742	0.00000009	*
Age	-0.04453737	0.09096102	0.62439483	0.95643985
Experience	0.05657264	0.09005365	0.5298661	1.05820346
Income	0.0657607	0.00422134	0	1.06797111
Family	0.57155931	0.10119002	0.00000002	1.77102649
CCAvg	0.18724874	0.06153848	0.00234395	1.20592725
Mortgage	0.00175308	0.00080375	0.02917421	1.00175464
Securities Account	-0.85484785	0.41863668	0.04115349	0.42534789
CD Account	3.46900773	0.44893095	0	32.10486984
Online	-0.84355801	0.22832377	0.00022026	0.43017724
CreditCard	-0.96406376	0.28254223	0.00064463	0.38134006
EducGrad	4.58909273	0.38708162	0	98.40509796
EducProf	4.52272701	0.38425466	0	92.08635712

로지스틱 회귀분석: Interpretation

❖ 로지스틱 회귀분석 결과 및 해석

- 회귀계수: Coefficient
  - ✓ 로지스틱 회귀분석에서 각 변수에 대응하는 베타값임
  - ✓ 선형회귀분석에서는 해당 변수가 1단위 증가할 때 종속변수의 변화량을 의미하나, 로지스틱 회귀분석에서는 해당 변수가 1단위 증가할 때 로그승산비의 변화량을 의미
  - ✓ 양수이면 성공확률과 양의 상관관계, 음수이면 성공 확률과 음의 상관관계

Input variables	Coefficient	Std. Error	p-value	Odds
Constant term	-13.20165825	2.46772742	0.00000009	*
Age	-0.04453737	0.09096102	0.62439483	0.95643985
Experience	0.05657264	0.09005365	0.5298661	1.05820346
Income	0.0657607	0.00422134	0	1.06797111
Family	0.57155931	0.10119002	0.00000002	1.77102649
CCAvg	0.18724874	0.06153848	0.00234395	1.20592725
Mortgage	0.00175308	0.00080375	0.02917421	1.00175464
Securities Account	-0.85484785	0.41863668	0.04115349	0.42534789
CD Account	3.46900773	0.44893095	0	32.10486984
Online	-0.84355801	0.22832377	0.00022026	0.43017724
CreditCard	-0.96406376	0.28254223	0.00064463	0.38134006
EducGrad	4.58909273	0.38708162	0	98.40509796
EducProf	4.52272701	0.38425466	0	92.08635712

로지스틱 회귀분석: Interpretation

❖ 로지스틱 회귀분석 결과 및 해석

- 유의확률: p-value
  - ✓로지스틱 회귀분석에서 해당 변수가 통계적으로 유의미한지 여부를 알려주는 지표
  - ✓0에 가까울수록 모델링에 중요한 변수이며, 1에 가까울수록 유의미하지 않은 변수임
  - ✓특정 유의수준(α)을 설정하여 해당 값 미만의 변수만을 사용하여 다시 로지스틱 회귀분석을 구축하는 것도 가능함 (주로 $\alpha = 0.05$ 사용)

Input variables	Coefficient	Std. Error	p-value	Odds
Constant term	-13.20165825	2.46772742	0.00000009	*
Age	-0.04453737	0.09096102	0.62439483	0.95643985
Experience	0.05657264	0.09005365	0.5298661	1.05820346
Income	0.0657607	0.00422134	0	1.06797111
Family	0.57155931	0.10119002	0.00000002	1.77102649
CCAvg	0.18724874	0.06153848	0.00234395	1.20592725
Mortgage	0.00175308	0.00080375	0.02917421	1.00175464
Securities Account	-0.85484785	0.41863668	0.04115349	0.42534789
CD Account	3.46900773	0.44893095	0	32.10486984
Online	-0.84355801	0.22832377	0.00022026	0.43017724
CreditCard	-0.96406376	0.28254223	0.00064463	0.38134006
EducGrad	4.58909273	0.38708162	0	98.40509796
EducProf	4.52272701	0.38425466	0	92.08635712

로지스틱 회귀분석: Interpretation

❖ 로지스틱 회귀분석 결과 및 해석

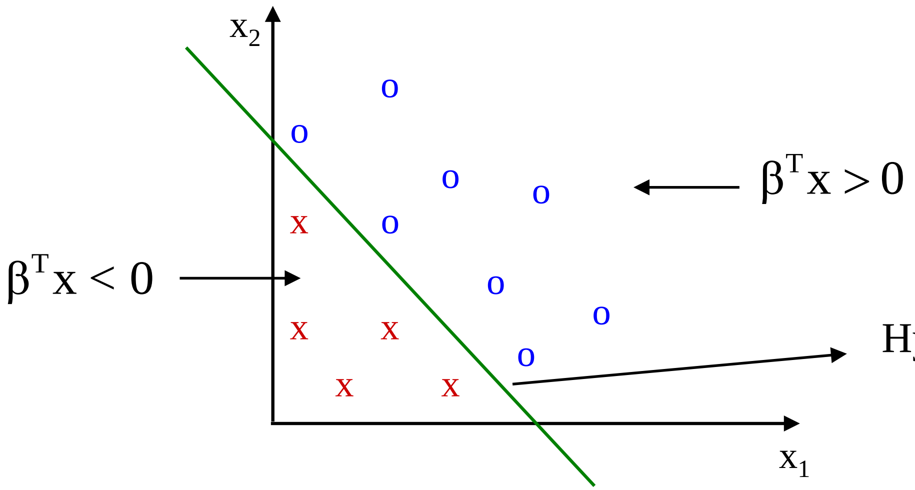
- 승산 비율: Odds Ratio
  - ✓ 나머지 변수는 모두 고정시킨 상태에서 한 변수를 1만큼 증가시켰을 때 변화하는 Odds의 비율

Input variables	Coefficient	Std. Error	p-value	Odds
Constant term	-13.20165825	2.46772742	0.00000009	*
Age	-0.04453737	0.09096102	0.62439483	0.95643985
Experience	0.05657264	0.09005365	0.5298661	1.05820346
Income	0.0657607	0.00422134	0	1.06797111
Family	0.57155931	0.10119002	0.00000002	1.77102649
CCAvg	0.18724874	0.06153848	0.00234395	1.20592725
Mortgage	0.00175308	0.00080375	0.02917421	1.00175464
Securities Account	-0.85484785	0.41863668	0.04115349	0.42534789
CD Account	3.46900773	0.44893095	0	32.10486984
Online	-0.84355801	0.22832377	0.00022026	0.43017724
CreditCard	-0.96406376	0.28254223	0.00064463	0.38134006
EducGrad	4.58909273	0.38708162	0	98.40509796
EducProf	4.52272701	0.38425466	0	92.08635712

로지스틱 회귀분석: Interpretation

Geometric interpretation

- 로지스틱 회귀분석은 d차원의 데이터를 구분하는 (d-1)차원의 초평면을 찾는 것으로 이해할 수 있음



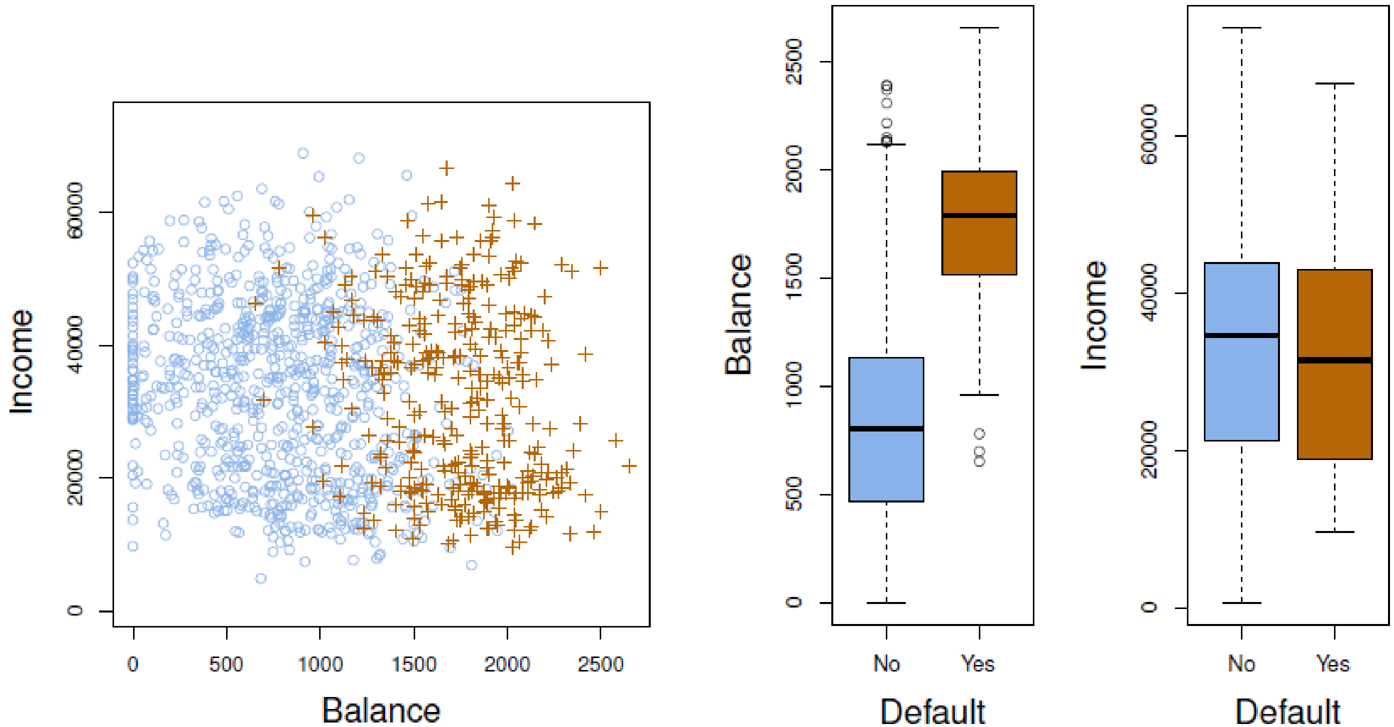
Hyperplane: $\beta^T x = 0$ where $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Classifier

$$y = \frac{1}{\left(1 + \exp(-\beta^T x)\right)} \qquad \begin{pmatrix} y \to 1 & if & \beta^T x \to \infty \\ y = \frac{1}{2} & if & \beta^T x = 0 \\ y \to 0 & if & \beta^T x \to -\infty \end{pmatrix}$$

로지스틱 회귀분석: 예시

❖ 신용카드 연체 예측



$$p(X) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0+\beta_1 X}}.$$

$$\log\left(\frac{p(X)}{1-p(X)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X.$$

로지스틱 회귀분석: 예시

- Credit Card Default: single variable

	Coefficient	Std. Error	Z-statistic	P-value
Intercept	-10.6513	0.3612	-29.5	< 0.0001
balance	0.0055	0.0002	24.9	< 0.0001

What is our estimated probability of default for someone with a balance of \$1000?

$$\hat{p}(X) = \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X}} = \frac{e^{-10.6513+0.0055\times 1000}}{1+e^{-10.6513+0.0055\times 1000}} = 0.006$$

With a balance of \$2000?

$$\hat{p}(X) = \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X}} = \frac{e^{-10.6513+0.0055\times 2000}}{1+e^{-10.6513+0.0055\times 2000}} = 0.586$$

로지스틱 회귀분석: 예시

- Credit Card Default: multiple variables

$$\log\left(\frac{p(X)}{1-p(X)}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p$$

$$p(X) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}}$$

	Coefficient	Std. Error	Z-statistic	P-value
Intercept	-10.8690	0.4923	-22.08	< 0.0001
balance	0.0057	0.0002	24.74	< 0.0001
income	0.0030	0.0082	0.37	0.7115
student[Yes]	-0.6468	0.2362	-2.74	0.0062

목차

Naïve Bayes & Logistic Regression: R Exercise

❖ Personal Loan Prediction

- 은행 고객의 인구통계학적 정보 및 은행상품 이용정보를 바탕으로 미래에 개인신용대출 상품을 이용할 고객 예측

Data Description:

ID	Customer ID
Age	Customer's Age in completed years
Experience	#years of professional experience
Income	Annual income of the customer ($000)
ZIPCode	Home Address ZIP code.
Family	Family size (dependents) of the customer
CCAvg	Avg. Spending on Credit Cards per month ($000)
Education	Education Level. 1: Undergrad; 2: Graduate; 3: Advanced/Professional
Mortgage	Value of house mortgage if any. ($000)
Personal Loan	Did this customer accept the personal loan offered in the last campaign?
Securities Account	Does the customer have a Securities account with the bank?
CD Account	Does the customer have a Certificate of Deposit (CD) account with the bank?
Online	Does the customer use internet banking facilities?
CreditCard	Does the customer use a credit card issued by UniversalBank?

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ 분류모델 성능평가 함수 작성

```
# Performance Evaluation Function ---------------------------------------
perf_eval <- function(cm){
         # True positive rate: TPR
         TPR = cm[2,2]/sum(cm[2,])
         # True negative rate: TNR
         TNR = cm[1,1]/sum(cm[1,])
         # Simple Accuracy
         ACC = (cm[1,1]+cm[2,2])/sum(cm)
         # Balanced Correction Rate
         BCR = sqrt(TPR*TNR)
         return(c(TPR, TNR, ACC, BCR))
}
```

- 함수명: perf_eval
  - ✓함수 실행에 필요한 인자: confusion matrix (cm)
  - ✓함수 결과물: True positive rate, True negative rate, Simple accuracy, Balanced correction rate

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ 필요 패키지 설치

```
# Naive Bayesian Classifier ----------------------------------------------
# e1071 package install
install.packages("e1071", dependencies = TRUE)

# Call the e1071 package
library(e1071)
```

- Naïve Bayesian Classification: “e1071” 패키지에서 제공
- Logistic regression: R base에서 기본으로 제공하므로 별도의 패키지 필요 없음

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ 데이터 불러오기 및 전처리

```
ploan <- read.csv("Personal Loan.csv")
input_idx <- c(2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14)
target_idx <- 10

ploan_input <- ploan[,input_idx]
ploan_target <- as.factor(ploan[,target_idx])
ploan_data <- data.frame(ploan_input, ploan_target)

# Split the data into the training/validation sets
set.seed(12345)
trn_idx <- sample(1:dim(ploan_data)[1], round(0.7*dim(ploan_data)[1]))
ploan_trn <- ploan_data[trn_idx,]
ploan_val <- ploan_data[-trn_idx,]
```

- ID변수(1열), zip code(5열) 제거
- Naïve Bayesian classifier는 종속변수의 형태로 factor형을 요구함
- 70%의 학습 데이터와 30%의 검증 데이터를 무작위로 선택

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ Naïve Bayesian Classifier 학습

```
# Training the Naive Bayesian Classifier
nb_model <- naiveBayes(ploan_target ~ ., data = ploan_trn)
nb_model$apriori
nb_model$tables
```

- naiveBayes( ): Naïve Bayesian classifier 학습 함수
  - ✓첫 번째 인자: Formula
  - ✓두 번째 인자: 학습 데이터
  - ✓이 패키지에서는 모든 변수를 정규분포로 가정하고 각 범주-변수 조합별 평균 및 표준편차를 산출 → 별도의 파라미터가 존재하지 않음
- nb_model$apriori: 각 범주별 학습 데이터 수
- nb_model$tables: 각 범주-변수별 평균 및 표준편차가 저장된 테이블

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ Naïve Bayesian Classifier 학습

```
# Training the Naive Bayesian Classifier
nb_model <- naiveBayes(ploan_target ~ ., data = ploan_trn)
nb_model$apriori
nb_model$tables
```

```
> nb_model$apriori
Y
   0    1
1573  177
```

prior distribution

```
> nb_model$tables
$Age
   Age
Y       [,1]     [,2]
  0 45.24984 11.49341
  1 44.72881 11.61039

$Experience
   Experience
Y       [,1]     [,2]
  0 20.03942 11.48734
  1 19.48023 11.73286

$Income
   Income
Y        [,1]     [,2]
  0  67.03242 41.28474
  1 143.28814 34.74226
```

[,1]: mean
[,2]: standard deviation

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ Naïve Bayesian Classifier 성능 평가

```
# Predict the new input data based on Naive Bayesian Classifier
posterior = predict(nb_model, ploan_val, type = "raw")
nb_prey = predict(nb_model, ploan_val, type ="class")
```

- predict( ): 학습된 모형을 새로운 데이터에 적용하여 예측을 수행하는 함수
  - ✓ 첫 번째 인자: 학습된 모형
  - ✓ 두 번째 인자: 새로운 데이터
  - ✓ 세 번째 인자 (type): “raw”: 각 범주에 속할 확률을 반환, “class” 예측된 범주를 반환

```
> posterior
                 0            1
 [1,] 9.999055e-01 9.449567e-05
 [2,] 9.998128e-01 1.871716e-04
 [3,] 9.998873e-01 1.127369e-04
 [4,] 9.998346e-01 1.654241e-04
 [5,] 9.996633e-01 3.367041e-04
 [6,] 7.584541e-01 2.415459e-01
 [7,] 9.421491e-01 5.785089e-02
 [8,] 9.996655e-01 3.345240e-04
 [9,] 9.996813e-01 3.186617e-04
[10,] 9.871787e-01 1.282129e-02
```

```
> nb_prey
 [1] 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[17] 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[33] 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0
[49] 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0
[65] 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
[81] 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
[97] 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

R 실습: Naïve Bayesian Classification

❖ Naïve Bayesian Classifier 성능 평가

```
# Generate a confusion matrix
cfmatrix <- table(ploan_val$ploan_target, nb_prey)

# Evaluate the performance
perf_mat <- matrix(0, 4, 3)
perf_mat[,1] <- perf_eval(cfmatrix)
perf_mat
```

- table( ): 교차빈도표를 작성해주는 함수, 정답 범주와 모델에 의해 예측된 범주를 사용하여 confusion matrix 생성 가능

```
> cfmatrix
   nb_prey
      0   1
  0 615  56
  1  32  47
```

```
> perf_mat
          [,1] [,2] [,3]
[1,] 0.5949367    0    0
[2,] 0.9165425    0    0
[3,] 0.8826667    0    0
[4,] 0.7384340    0    0
```

- Naïve Bayesian Classifier는 대출 이용 고객에 대한 정확도가 59.4%로 낮은 편이며 단순 정확도는 88.27%, 균형정확도는 0.7384를 나타냄

R 실습: Logistic Regression

❖ 데이터 전처리: 정규화 및 데이터 분할

```
# Logistic Regression -----------------------------------------------------
# Conduct the normalization
ploan_input <- scale(ploan_input, center = TRUE, scale = TRUE)
ploan_target <- as.numeric(ploan_target)-1
ploan_data <- data.frame(ploan_input, ploan_target)

ploan_trn <- ploan_data[trn_idx,]
ploan_val <- ploan_data[-trn_idx,]
```

- Gradient descent를 사용하는 알고리즘들은 정확한 수렴을 위하여 데이터 정규화가 필요 (scale 함수 사용)
- Naïve Bayesian classifier와는 달리 로지스틱 회귀분석은 분류문제임에도 불구하고 종속변수의 속성이 수치형(numeric)이어야 함
- (주의) factor를 바로 수치형으로 변환하면 예상과는 다른 결과가 나타날 가능성이 높음

R 실습: Logistic Regression

❖ 모든 변수를 사용하여 로지스틱 회귀분석 학습

```
# Train the Logistic Regression Model with all variables
full_lr <- glm(ploan_target ~ ., family=binomial, ploan_trn)
summary(full_lr)
```

- glm( ): R에서 기본 제공하는 generalized linear model 함수이며 로지스틱 회귀분석을 포함한 다양한 형태의 모형 학습 가능
  - ✓ 첫 번째 인자: Formula
  - ✓ 두 번째 인자: "family = binomial"로 설정해야 로지스틱 회귀분석이 학습됨
  - ✓ 세 번째 인자: 학습 데이터

R 실습: Logistic Regression

❖ 모든 변수를 사용하여 로지스틱 회귀분석 학습

```
# Train the Logistic Regression Model with all variables
full_lr <- glm(ploan_target ~ ., family=binomial, ploan_trn)
summary(full_lr)
```

- 신뢰수준 95%에서 유의미한 변수: Income, Family, CCAvg, Education, Securities.Account, CD.Account, CreditCard

```
Coefficients:
                   Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)    
(Intercept)        -4.21016    0.22999 -18.306  < 2e-16 ***
Age                -0.05479    1.06837  -0.051  0.95910    
Experience          0.23514    1.06214   0.221  0.82480    
Income              2.07961    0.17125  12.144  < 2e-16 ***
Family              0.80944    0.13411   6.036 1.58e-09 ***
CCAvg               0.30738    0.10800   2.846  0.00442 ** 
Education           1.13270    0.14325   7.907 2.63e-15 ***
Mortgage            0.07188    0.08685   0.828  0.40790    
Securities.Account -0.44039    0.15266  -2.885  0.00392 ** 
CD.Account          0.94355    0.12160   7.760 8.52e-15 ***
Online             -0.13209    0.12191  -1.083  0.27859    
CreditCard         -0.61753    0.15835  -3.900 9.63e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

R 실습: Logistic Regression

❖ 후방 소거법을 이용한 변수 선택

```
# Train the Logistic Regression Model with selected variables
reduced_lr <- step(full_lr, direction = "backward")
summary(reduced_lr)
```

- 총 11개의 변수 중 3개의 변수(Age, Mortgage, Online)가 제거됨
- Experience를 제외하고 신뢰수준 99%에서 모두 통계적으로 유의한 변수임

```
Coefficients:
                   Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)    
(Intercept)         -4.1925     0.2279 -18.394  < 2e-16 ***
Experience           0.1838     0.1211   1.518 0.128956    
Income               2.1047     0.1700  12.379  < 2e-16 ***
Family               0.8192     0.1337   6.128 8.92e-10 ***
CCAvg                0.2990     0.1071   2.793 0.005229 ** 
Education            1.1224     0.1397   8.034 9.46e-16 ***
Securities.Account  -0.4336     0.1518  -2.856 0.004293 ** 
CD.Account           0.9123     0.1170   7.795 6.42e-15 ***
CreditCard          -0.6037     0.1571  -3.844 0.000121 ***
```

R 실습: Logistic Regression

❖ 모든 변수를 사용한 모형의 검증

```
# Evaluate the logistic regression performance on the validation data
# Case 1: full model
full_response <- predict(full_lr, type = "response", newdata = ploan_val)
full_target <- ploan_val$ploan_target
full_predicted <- rep(0, length(full_target))
full_predicted[which(full_response >= 0.5)] <- 1

cm_full <- table(full_target, full_predicted)
perf_mat[,2] <- perf_eval(cm_full)
```

- predict( )함수의 type = “response”로 설정하면 positive(1) 범주에 속할 확률을 반환함
- 본 실습에서는 로지스틱 회귀모형의 cut-off를 0.5로 설정하였으나 상황에 따라 이를 다르게 설정할 수 있음

R 실습: Logistic Regression

❖ 모든 변수를 사용한 모형의 검증

```
# Evaluate the logistic regression performance on the validation data
# Case 1: full model
full_response <- predict(full_lr, type = "response", newdata = ploan_val)
full_target <- ploan_val$ploan_target
full_predicted <- rep(0, length(full_target))
full_predicted[which(full_response >= 0.5)] <- 1

cm_full <- table(full_target, full_predicted)
perf_mat[,2] <- perf_eval(cm_full)
```

- 모든 변수를 사용한 로지스틱 회귀분석의 경우 대출 고객에 대한 정확도는 67%, 단순 정확도 96%, BCR 0.8166으로 나이브베이즈 분류기보다 향상된 예측 성능을 나타냄

```
> cm_full
           full_predicted
full_target   0   1
          0 667   4
          1  26  53
```

```
> perf_mat
          [,1]      [,2] [,3]
[1,] 0.5949367 0.6708861    0
[2,] 0.9165425 0.9940387    0
[3,] 0.8826667 0.9600000    0
[4,] 0.7384340 0.8166313    0
```

R 실습: Logistic Regression

❖ 후방소거법에 의해 선택된 변수를 사용한 모형의 검증

```
# Case 2: reduced model
reduced_response <- predict(reduced_lr, type = "response", newdata = ploan_val)
reduced_target <- ploan_val$ploan_target
reduced_predicted <- rep(0, length(reduced_target))
reduced_predicted[which(reduced_response >= 0.5)] <- 1

cm_reduced <- table(reduced_target, reduced_predicted)
perf_mat[,3] <- perf_eval(cm_reduced)
colnames(perf_mat) <- c("Naive Bayes", "LR with all variables", "LR with selected
                            variables")
rownames(perf_mat) <- c("TPR", "TNR", "ACC", "BCR")
perf_mat
```

- 결과물에 대한 빠른 이해를 위해 colnames( ) 및 rownames( ) 함수를 사용하여 열과 행에 이름을 지정

R 실습: Logistic Regression

❖ 후방소거법에 의해 선택된 변수를 사용한 모형의 검증

- 변수선택을 수행한 모형은 전체 변수를 사용한 모형과 비교할 때 대출 이용 고객 2명을 정확히 예측하지 못하는 차이를 보임

```
> cfmatrix
   nb_prey
      0   1
  0 615  56
  1  32  47
```

```
> cm_full
           full_predicted
full_target   0   1
          0 667   4
          1  26  53
```

```
> cm_reduced
              reduced_predicted
reduced_target   0   1
             0 667   4
             1  28  51
```

- 그 결과, TPR 기준 2.5%p, 단순 정확도 기준 0.03%p, BCR 기준 0.015의 성능 저하를 보임

```
> perf_mat
    Naive Bayes LR with all variables LR with selected variables
TPR   0.5949367             0.6708861                  0.6455696
TNR   0.9165425             0.9940387                  0.9940387
ACC   0.8826667             0.9600000                  0.9573333
BCR   0.7384340             0.8166313                  0.8010750
```

Q & A