ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Báo cáo Cuối kỳ

Đề tài: Convex Analysis - Giải tích lồi

Môn học: Quy hoạch tuyến tính

Nhóm thực hiện:

Nhóm 12

Giảng viên hướng dẫn:

ThS. Lê Phúc Lữ

ThS. Trần Hà Sơn

Ngày 16 tháng 6 năm 2024

LỜI CẢM ƠN

Nhóm xin chân thành cảm ơn các thầy đã tận tình hướng dẫn và nhận xét, góp ý phù hợp để nhóm có thể hoàn thành báo cáo này.

Trân trọng.

TP. Hồ Chí Minh, ngày 16 tháng 6 năm 2024

NHÓM SINH VIÊN THỰC HIỆN

Đại diện

Lê Công Đắt

GIỚI THIỆU ĐỀ TÀI

Cuốn sách *Linear Programming: Foundations and Extensions* [1] chủ yếu nói về quy hoạch tuyến tính. Tuy nhiên, chủ đề này, tuy quan trọng nhưng chỉ là một tập hợp con của một chủ đề lớn hơn gọi là *giải tích lồi*. Bài báo cáo, với chủ đề là chương 10 của quyển sách, sẽ giới thiệu ngắn gọn về giải tích lồi. Đặc biệt, chúng ta sẽ chứng minh một số kết quả cơ bản của giải tích lồi và thấy rằng chứng minh của chúng phụ thuộc vào một số lý thuyết quy hoạch tuyến tính mà chúng ta đã phát triển.

THÔNG TIN NHÓM VÀ PHÂN CÔNG CÔNG VIỆC

Tên nhóm: Nhóm 12

Danh sách thành viên

MSSV	**Họ và tên**	**Công việc**
20120300	Trần Đình Khải	Lý thuyết: 1. Convex Sets Bài tập: 10.1
20120441	Nguyễn Đình Chiến	Lý thuyết: 2. Caratheodory's Theorem Bài tập: 10.2
20120454	Lê Công Đắt [1]	Lý thuyết: 3. The Separation Theorem Bài tập: 10.3, 10.5, 10.6
20120526	Nguyễn Thành Long	Lý thuyết: 4. Farkas' Lemma Bài tập: 10.4
20120604	Lương Văn Triều	Lý thuyết: 5. Strict Complementarity Bài tập: 10.7

Bảng 1: Danh sách thành viên và phân công công việc

[1] Nhóm trưởng

Mục lục

1 Lý thuyết **5**

1.1 Convex Sets - Tập Lồi 5

1.2 Carathéodory's Theorem - Định Lý Carathéodory 8

1.3 The Separation Theorem - Định Lý Phân Tách 10

1.4 Farkas' Lemma - Bổ Đề Farkas 12

1.5 Strict Complementarity - Độ Lệch Bù Chặt Chẽ 14

2 Bài tập **16**

2.1 Bài 10.1 16

2.2 Bài 10.2 17

2.3 Bài 10.3 18

2.4 Bài 10.4 19

2.5 Bài 10.5 20

2.6 Bài 10.6 21

2.7 Bài 10.7 23

Tài liệu **25**

1 Lý thuyết

1.1 Convex Sets - Tập Lồi

Cho một tập hữu hạn các điểm $z_1, z_2, ..., z_n$ trong $\mathbb{R}^m$, một điểm z được gọi là tổ hợp lồi nếu:

$$z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j, \quad t_j \geq 0 \text{ với mỗi j và } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1.$$

Nếu tồn tại $t_j \neq 0$, tổ hợp trên được gọi là một tổ hợp lồi nghiêm ngặt (strict convex combination).

Với n = 2, tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của hai điểm là đoạn thẳng nối chúng.

Tập hợp con S của $\mathbb{R}^m$ được gọi là lồi nếu:

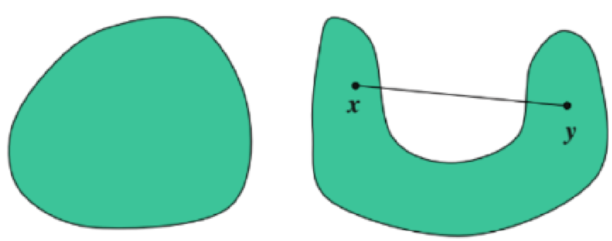
$$\forall x, y \in S; S \text{ chứa tất cả các điểm trên đoạn thẳng nối } x \text{ và } y.$$

Điều đó có nghĩa là, với mọi $0 < t < 1$, ta có $tx + (1-t)y \in S$.

Một số tính chất cơ bản của các tập lồi rất dễ chứng minh. Ví dụ, giao của một tập hợp bất kỳ các tập lồi cũng là một tập lồi: Cho tập $S_\alpha, \alpha \in I$, là một tập hợp các tập lồi được chỉ mục bởi tập I. Điều cần chứng minh là $\cap_{\alpha \in I} S_\alpha$ là một tập lồi.

Để thấy điều này, xét một cặp điểm x và y bất kỳ trong giao điểm đó. Khi đó x và y nằm trong mỗi tập S_α, ta có S_α chứa đoạn thẳng nối x và y. Vì mỗi tập này đều chứa đoạn thẳng, giao của chúng cũng chứa đoạn thẳng. Do đó, giao của chúng là một tập lồi.

ĐỊNH LÝ 1 *Một tập hợp C là lồi nếu và chỉ nếu nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của các điểm trong C.*



Hình 1: Tập hợp bên trái là lồi - đối với bất kỳ cặp điểm nào trong tập hợp, đoạn thẳng nối hai điểm đó cũng nằm trong tập hợp. Tập hợp bên phải không lồi - tồn tại các cặp điểm, như điểm x và y đã được chỉ ra, trong đó đoạn thẳng nối chúng không nằm hoàn toàn trong tập hợp.

CHỨNG MINH. Giả sử C là một tập hợp lồi. Theo định nghĩa, C chứa tất cả các tổ hợp lồi của các cặp điểm trong C. Để chứng minh rằng C chứa tất cả các tổ hợp lồi của các bộ ba điểm trong C, giữ nguyên z_1, z_2, và z_3 trong C và xem xét.

$$z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \tag{1}$$

Ở đó

$$t_j \geq 0 \text{ cho mỗi j và } \sum_{j=1}^{3} t_j = 1$$

Nếu một trong số các giá trị t_j bằng 0, thì z thực sự chỉ là một tổ hợp lồi của hai điểm và do đó thuộc về C. Vì vậy, giả sử rằng mỗi giá trị t_j đều dương tuyệt đối. Viết lại z(1) như sau:

$$\text{z} = (1 - t_3)(\frac{t_1}{1 - t_3} z_1 + \frac{t_2}{1 - t_3} z_2) + t_3 z_3$$

$$= (1 - t_3)(\frac{t_1}{t_1 + t_2} z_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} z_2) + t_3 z_3$$

Vì C chứa tất cả các tổ hợp lồi của các cặp điểm, do đó ta có thể suy ra rằng

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} z_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} z_2 \in C$$

Bây giờ, vì z là một tổ hợp lồi của hai điểm $\frac{t_1}{t_1+t_2} z_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2} z_2$ và z_3, cả hai điểm này đều thuộc C, do đó ta có z thuộc C.

Dễ thấy rằng lập luận này có thể được mở rộng thành một chứng minh theo quy nạp rằng C chứa tất cả các tổ hợp lồi của tập hợp hữu hạn các điểm trong C. Thực tế, ta chỉ cần chứng minh rằng việc C chứa tất cả các tổ hợp lồi của n điểm từ C đồng nghĩa với việc C chứa tất cả các tổ hợp lồi của n + 1 điểm từ C. Việc chứng minh rằng một tập hợp là lồi chỉ cần lấy tổ hợp lồi của các cặp điểm để chứng minh rằng nó là lồi.

Đối với mỗi tập hợp S trong $\mathbb{R}^m$ (không nhất thiết phải là lồi), tồn tại một tập hợp lồi nhỏ nhất, ký hiệu là **conv(S)**, chứa S. Tập hợp này được định nghĩa là giao của tất cả các tập hợp lồi chứa S. Từ các tính chất về giao, ta có thể suy ra rằng tập hợp này là lồi. Tập hợp **conv(S)** được gọi là bao lồi của S. Định nghĩa này có thể được coi là một định nghĩa từ "bên ngoài", vì nó liên quan đến việc hình thành giao của một tập hợp các tập hợp chứa S. Định lý tiếp theo sẽ cung cấp sự định nghĩa về tập hợp lồi từ "bên trong":

ĐỊNH LÝ 2 *Bao lồi $conv(S)$ của một tập hợp S trong $\mathbb{R}^m$ chính xác bao gồm tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của tập hợp hữu hạn các điểm từ S.*

CHỨNG MINH. Gọi H là tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của các tập hợp hữu hạn các điểm từ S:

$$H = \left\{ z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j : n \geq 1 : z_j \in S \text{ và } t_j > 0 \text{ với mọi j và } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}$$

Để chứng minh H chứa S, chỉ cần lấy n = 1 trong định nghĩa của H.

Để chứng minh H là lồi, giữ nguyên hai điểm x và y trong H và một số thực $0 < t < 1$. Ta phải chứng minh rằng $z = tx + (1-t)y \in H$.

Sự thật rằng $x \in H$ ngụ ý rằng:

$$x = \sum_{j=1}^{r} p_j x_j, \quad \text{Với } r \geq 1, p_j > 0, \sum_{j=1}^{r} p_j = 1, x_j \in S \text{ và } j = 1, 2, \ldots, r.$$

Tương tự với $y \in H$:

$$y = \sum_{j=1}^{s} q_j y_j, \quad \text{Với } s \geq 1, q_j > 0, \sum_{j=1}^{s} q_j = 1, y_j \in S \text{ và } j = 1, 2, \ldots, s.$$

Do đó,

$$z = tx + (1-t)y = \sum_{j=1}^{r} tp_i x_j + \sum_{j=1}^{r} (1-t) q_i y_j \tag{2}$$

Vì các hệ số $(tp_1, \ldots, tp_r, (1-t)q_1, \ldots, (1-t)q_s)$ đều dương và tổng của chúng bằng một, suy ra biểu thức cuối cùng này cho z là một tổ hợp lồi của $r + s$ từ S. Do đó, z thuộc H.

Vì vậy, x và y là các điểm tùy ý trong H và t là một số thực tùy ý trong khoảng từ 0 đến 1, sự thật rằng $z \in H$ ngụ ý rằng H là lồi. Chỉ cần chứng minh rằng H nằm trong mọi tập hợp lồi chứa S. Gọi C là một tập hộp như vậy (tức là lồi và chứa S).

Từ Định lý 1 và sự thật rằng C chứa S, ta có rằng C chứa tất cả các tổ hợp lồi của điểm trong S. Do đó, C chứa H.

1.2 Carathéodory's Theorem - Định Lý Carathéodory

Trong phần trước, ta đã chỉ ra được rằng bao lồi của một tập hợp S có thể được xây dựng bằng cách tạo tất cả các tổ hợp lồi của các tập hợp hữu hạn các điểm từ S.
Năm 1907, Carathéodory đã chỉ ra rằng không cần phải sử dụng tất cả các tập hợp hữu hạn. Thay vào đó, chỉ cần m + 1 điểm là đủ:

ĐỊNH LÝ 3 *Bao lồi **conv(S)** của một tập hợp S trong $\mathbb{R}^m$ bao gồm toàn bộ tổ hợp lồi của m + 1 điểm từ S:*

$$conv(S) = \left\{ z = \sum_{j=1}^{m+1} t_j z_j : z_j \in S \text{ và } t_j \geq 0, \ \sum_j t_j = 1 \right\}$$

CHỨNG MINH. Gọi H là tập hợp ở bên phải. Từ Định lý 2, ta có thể thấy H nằm trong $conv(S)$. Do đó, chỉ cần chứng minh **mọi điểm thuộc conv(S) đều thuộc H**

Dựa vào mục đích này, ta cố định một điểm z trong $conv(S)$. Theo Định lý 2, tồn tại một tập hợp có n điểm $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ trong S (xét $n > m$, khi $n \leq m$ là trường hợp tầm thường) và các hệ số nhân không âm tương ứng $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ có tổng bằng 1, sao cho:

$$z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j \tag{3}$$

Gọi A là ma trận với các điểm $z_1, z_2, ..., z_n$ là các cột của A:

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

Thêm vào đó, gọi x* là vector chứa các hệ số nhân $t_1, t_2, ..., t_n$:

$$x^* = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, đặt b = z. Từ (3), ta có thể thấy rằng x* là phương án chấp nhận được cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

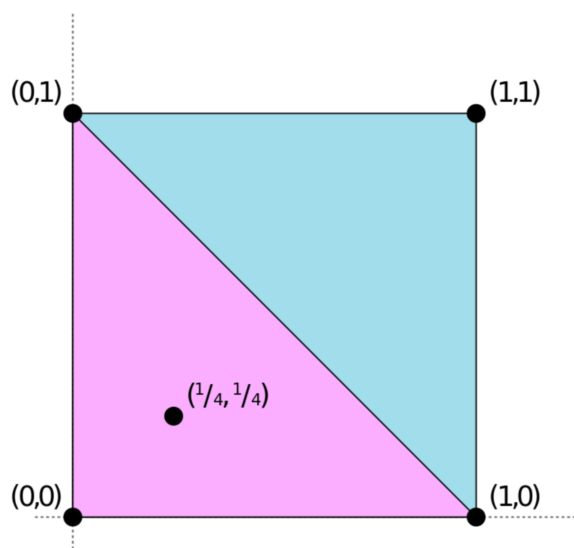
$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & c^T x \\
\text{Ràng buộc} \quad & Ax = b \\
& e^T x = 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

Định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính cho chúng ta biết rằng mọi bài toán quy hoạch tuyến tính khả thi đều có một phương án chấp nhận được cơ bản.

Đối với một phương án như vậy, chỉ các biến cơ sở mới có thể khác không. Số lượng biến cơ sở trong (4) trùng với số lượng ràng buộc có dấu bằng (tối đa m+1 ràng buộc vì $x \in S \subset R^m$.). Tức là có tối đa m + 1 phần tử khác không trong phương án.

Do đó, phương pháp chấp nhận được **x*** tương ứng với một tổ hợp lồi của đúng m + 1 điểm trong số n điểm ban đầu. Vậy **mọi điểm thuộc conv(S) đều thuộc H**. Định lý được chứng minh.

Trong không gian 2 chiều R^2, định lý Carathéodory phát biểu rằng chúng ta có thể dựng một tam giác gồm các điểm từ P bao quanh bất kì điểm nào trong bao lồi của P. Ví dụ, đặt $P = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Bao lồi của tập này là một hình vuông. Cho điểm $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ thuộc bao lồi của P. Khi đó chúng ta có thể xây dựng một tập gồm 3 điểm $P' = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$, mà bao lồi của nó bao quanh điểm x.



Hình 2: Minh họa định lý Carathéodory trong R^2

1.3 The Separation Theorem - Định Lý Phân Tách

Chúng ta sẽ định nghĩa một nửa không gian của $\mathbb{R}^n$ là bất kỳ tập hợp nào được cho bởi một bất đẳng thức tuyến tính (không tầm thường) duy nhất:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b\}, \quad (a_1, a_2, ..., a_n) \neq 0. \tag{5}$$

Mọi nửa không gian đều lồi. Để thấy điều này, giả sử rằng $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ đều thỏa mãn bất đẳng thức tuyến tính trong (5). Cố định t giữa không và một. Khi đó cả t và $1-t$ đều không âm, do đó nhân chúng với nhau giữ nguyên hướng của bất đẳng thức. Vì vậy, nhân $\sum_j a_j x_j \leq b$ với t và $\sum_j a_j y_j \leq b$ với $1-t$, sau đó cộng lại, chúng ta có được:

$$\sum_j a_j(tx_j + (1-t)y_j) \leq b.$$

Nghĩa là, $tx + (1-t)y$ cũng thỏa mãn bất đẳng thức xác định nửa không gian.

Nếu chúng ta cho phép vector hệ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ trong định nghĩa của nửa không gian bằng không, thì chúng ta gọi tập hợp được định nghĩa như vậy là nửa không gian tổng quát. Rất dễ thấy rằng mỗi nửa không gian tổng quát đơn giản là một nửa không gian, toàn bộ $\mathbb{R}^n$, hoặc là tập rỗng. Ngoài ra, mỗi nửa không gian tổng quát rõ ràng là tập hợp lồi.

Một *đa diện* được định nghĩa là giao của một tập hợp hữu hạn các nửa không gian tổng quát. Tức là, một đa diện là bất kỳ tập hợp nào có dạng:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1{,}2{,}...{,}m\}.$$

Mỗi đa diện, do là giao của một tập hợp các tập lồi, nên là tập lồi.

Định lý sau đây được gọi là *định lý phân tách* cho các đa diện.

ĐỊNH LÝ 4 *Giả sử P và $\tilde{P}$ là hai đa diện rời rạc và không rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại hai nửa không gian rời rạc H và $\tilde{H}$ sao cho $P \subset H$ và $\tilde{P} \subset \tilde{H}$.*

CHỨNG MINH. Giả sử rằng P và $\tilde{P}$ được cho bởi các hệ bất đẳng thức sau:

$$P = \{x : Ax \leq b\}$$

$$\tilde{P} = \{x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$$

Sự rời rạc giữa P và $\tilde{P}$ ngụ ý rằng không có nghiệm nào cho hệ:

$$\begin{bmatrix} A \\ \tilde{A} \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Để tiếp tục chứng minh, chúng ta cần một kết quả được gọi là Bổ đề Farkas, trong đó nói rằng $Ax \leq b$ không có nghiệm khi và chỉ khi có vector y kích thước m sao cho:

$$\begin{aligned} A^T y &= 0 \\ y &\geq 0 \\ b^T y &< 0. \end{aligned}$$

Chúng ta sẽ chứng minh kết quả này ở phần tiếp theo. Bây giờ, chúng ta hãy áp dụng Bổ đề Farkas cho tình huống hiện tại. Thật vậy, việc không có nghiệm nào của (6) ngụ ý rằng tồn tại một vectơ mà chúng ta sẽ viết dưới dạng khối là:

$$\begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix},$$

sao cho:

$$\begin{bmatrix} A^T & \tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = A^T y + \tilde{A}^T \tilde{y} = 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} b^T & \tilde{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = b^T y + \tilde{b}^T \tilde{y} = 0. \tag{9}$$

Từ điều kiện cuối cùng, chúng ta thấy rằng $b^T y < 0$ hoặc $\tilde{b}^T \tilde{y} < 0$ (hoặc cả hai). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng:

$$b^T y < 0.$$

Bổ đề Farkas (lần này được áp dụng theo hướng khác) cùng với tính khác rỗng của P giờ đây hàm ý rằng:

$$A^T y \neq 0$$

Đặt

$$H = \{x : (A^T y)^T x \leq b^T y\} \text{ và } \tilde{H} = \{x : (A^T y)^T x \geq -\tilde{b}^T \tilde{y}\}.$$

Những tập hợp này rõ ràng là nửa không gian. Để kết thúc chứng minh, chúng ta phải chứng minh rằng chúng rời nhau và chứa các khối đa diện tương ứng.

Trước hết, từ (9) suy ra rằng H và $\tilde{H}$ là rời nhau. Thật vậy, giả sử rằng $x \in H$. Khi đó $(A^T y)^T x \leq b^T y < -\tilde{b}^T \tilde{y}$, suy ra rằng x không thuộc $\tilde{H}$.

Để chứng minh $P \subset H$, cố định x trong P. Khi đó $Ax \subset B$. Vì $y \geq 0$ (như chúng ta đã biết từ (8)), nên $y^T Ax \leq y^T b$. Nhưng đây chính xác là điều kiện nói rằng x thuộc về H. Vì x là một điểm tùy ý trong P nên nó tuân theo $P \subset H$.

Chứng minh $\tilde{P}$ là tập con của $\tilde{H}$ cũng tương tự. Thật vậy, giả sử rằng $x \in \tilde{P}$. Khi đó $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$. Nhân bên trái với $-\tilde{y}^T$ và lưu ý rằng $\tilde{y} \geq 0$, ta thấy $-\tilde{y}^T \tilde{A}x \leq -\tilde{y}^T \tilde{b}$. Nhưng từ (7) chúng ta thấy $-\tilde{y}^T \tilde{A}x = y^T Ax$, và do đó bất đẳng thức cuối cùng này chính xác là điều kiện $x \in \tilde{H}$. Một lần nữa, tính tùy ý của $x \in \tilde{P}$ dẫn đến $\tilde{P} \subset \tilde{H}$, và chứng minh hoàn tất.

1.4 Farkas' Lemma - Bổ Đề Farkas

Kết quả sau đây, được gọi là bổ đề Farkas, đã đóng vai trò quan trọng trong chứng minh định lý phân chia của phần trước (Định lý 4). Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày nó một cách chính thức như một bổ đề và đưa ra chứng minh của nó.

BỔ ĐỀ 5 *Hệ phương trình $Ax \leq b$ không có nghiệm khi và chỉ khi có một vector y sao cho:*

$$\begin{aligned} A^T y &= 0 \\ y &\geq 0 \\ b^T y &< 0. \end{aligned} \tag{10}$$

CHỨNG MINH. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 0 \\ \text{sao cho} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

và bài toán đối ngẫu của nó:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^T y \\ \text{sao cho} \quad & A^T y = 0 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Rõ ràng, bài toán đối ngẫu luôn có phương án khả thi (chỉ cần lấy $y = 0$). Vì vậy, nếu bài toán gốc có phương án khả thi, thì bài toán đối ngẫu sẽ bị chặn. Ngược lại, nếu bài toán gốc không khả thi, thì bài toán đối ngẫu sẽ không bị chặn. Nghĩa là, bài toán gốc không khả thi khi và chỉ khi bài toán đối ngẫu không bị chặn.

Để hoàn tất chứng minh, ta chỉ cần chứng tỏ rằng bài toán đối ngẫu không bị chặn khi và chỉ khi tồn tại một nghiệm ($y \neq 0$) thỏa mãn (10). Thật vậy, giả sử rằng bài toán đối ngẫu không bị chặn. Phương pháp đơn hình sẽ suy diễn chứng minh được điều này, vì nó lần lượt xét các tập con của các ràng buộc.

Tại vòng lặp cuối cùng, một hướng đi Δy được tính toán sao cho giá trị nghiệm tính khả thi, tức là:

$$A^T \Delta y = 0$$

là một hướng giảm cho hàm mục tiêu, tức là

$$b^T \Delta y < 0.$$

Điều này hướng đến một dải bước đi không bị chặn, tức là

$$\Delta y > 0.$$

Nhưng những tính chất này cho thấy Δy chính là nghiệm của hệ (10) mà ta đang tìm kiếm. Ngược lại, giả sử rằng tồn tại một nghiệm của hệ (10). Gọi nó là Δy. Dễ thấy rằng, xuất phát từ $y = 0$, hướng đi này cung cấp mức giảm không giới hạn trong hàm mục tiêu. Điều này hoàn tất chứng minh.

1.5 Strict Complementarity - Độ Lệch Bù Chặt Chẽ

Ta có bài toán gốc (11) như sau:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad c^T x \\ &\text{Ràng buộc} \quad Ax + w = b \\ &x, w \geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Và bài toán đối ngẫu (12) tương ứng:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad b^T y \\ &\text{Ràng buộc} \quad A^T y - z = c \\ &y, z \geq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Với w, z là các biến phụ được thêm vào ở mỗi bài toán. Giả sử ta gọi (x', y') là phương án tối ưu của bài toán gốc, (y', x') là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Theo định lý độ lệch bù, với mỗi $j = 1,2,\ldots,n$ với n là số biến ở bài toán gốc, ta có $x'_j = 0$ hoặc $z'_j = 0$ (hoặc cả 2), tương tự với $i = 1,2,\ldots,m$ với m là số ràng buộc, ta có $y'_i = 0$ hoặc $w'_i = 0$ (hoặc cả 2). Với các cặp phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu mà chỉ có một trong hai điều kiện thoả định lý độ lệch bù, không xảy ra đồng thời, ta gọi các cặp phương án tối ưu này đối ngẫu chặt chẽ với nhau (strictly complementary). Định lý độ lệch bù ở trường hợp này thường được thể hiện dưới dạng:

$$\begin{aligned} &x' + z' > 0 \\ &y' + w' > 0 \end{aligned}$$

ĐỊNH LÝ 6 *Nếu cả hai bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có các phương án khả thi, tồn tại một phương án khả thi $(\bar{x} + \bar{w})$ cho bài toán gốc và $(\bar{y} + \bar{z})$ cho bài toán đối ngẫu, sao cho $(\bar{x} + \bar{z} > 0)$ và $(\bar{y} + \bar{w} > 0)$.*

CHỨNG MINH: Với mọi phương án khả thi, ta cho j là các chỉ số sao cho $x_j = 0$.

Ta lập bài toán mới (13) như sau:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_j \\ \text{Ràng buộc} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Bài toán trên tồn tại phương án khả thi (vì ràng buộc của nó tương tự như với bài toán gốc (11)) cũng như có một phương án tối ưu (hàm mục tiêu sẽ bằng 0). Bài toán đối ngẫu của bài toán trên (14) sẽ là:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^T y \\ \text{Ràng buộc} \quad & A^T y \ge e_j \\ & y \ge 0. \end{aligned} \tag{14}$$

(e_j ở đây là một vector đơn vị với mọi giá trị bằng 0 trừ giá trị ở vị trí j)
Dựa vào định luật đối ngẫu mạnh, bài toán trên cũng có một phương án tối ưu, gọi là y' cùng với biến phụ tương ứng z'.

$$\begin{aligned} A^T y' - z' &= e_j \\ y', z' &\ge 0 \end{aligned}$$

Ta cho y là một phương án khả thi bất kì của bài toán đối ngẫu ban đầu (12) và z là biến phụ tương ứng. Vì y' là một phương án tối ưu, cho nên $y' + y$ cũng có thể ngầm hiểu là một phương án khả thi và biến phụ tương ứng của nó sẽ là $z + z' + e_j$. Biến phụ thứ j của phương án khả thi này sẽ có giá trị ít nhất là 1. Từ đây, ta có thể kết luật rằng, tồn tại một phương án khả thi ở bài toán gốc (x, w) và tương ứng ở bài toán đối ngẫu (y, z) sao cho $x_j + z_j > 0$ và $y_j + w_j > 0$. Để hoàn thiện việc chứng minh, ta sẽ tạo một tổ hợp lồi hoàn chỉnh từ $n + m$ phương án khả thi. Bởi vì miền khả thi của bài toán là một tập lồi, các tổ hợp lồi vẫn giữ tính khả thi của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Và cũng vì đây là các tổ hợp hoàn chỉnh, dẫn đến tổng của mỗi biến bài toán gốc và biến phụ của bài toán đối ngẫu cho kết quả là một số dương, tương tự như với tổng của mỗi cặp biến bên bài toán đối ngẫu và biến phụ của bài toán gốc.

Tiếp theo, ta có thêm một định lý nữa gọi là định lý độ lệch bù hoàn chỉnh:

ĐỊNH LÝ 7 *Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có một phương án tối ưu, thì tồn tại một phương án tối ưu cho bài toán gốc* (x', w') *và phương án tối ưu cho bài toán đối ngẫu* (y', z') *sao cho* $x' + z' > 0$ *và* $y' + w' > 0$.

Phương pháp chứng minh gần như tương tự như với định lý đầu tiên, ngoại trừ lần này j là chỉ số sao cho x_j biến mất ở tất cả các phương án tối ưu. Ta lại có được bài toán mới.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & x_j \\ \text{Ràng buộc } & Ax \leq b, \\ & c^T x \geq \zeta^*, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

ζ^* ở đây là giá trị hàm mục tiêu của phương án tối ưu ở bài toán gốc. Ngoài các biến đối ngẫu y, ta có thêm biến t đi kèm với ràng buộc $c^T x \geq \zeta^*$. Giờ đây ta sẽ phải xem xét thêm đến 2 trường hợp là: (a) giá trị tối ưu của t là một số dương và (b) không tồn tại giá trị tối ưu t.

2 Bài tập

2.1 Bài 10.1

$\mathbb{R}^n$ có phải là một đa diện hay không?

Bài giải:

Một đa diện được định nghĩa là giao của hữu hạn các nửa không gian, hoặc là một tập lồi có hữu hạn các điểm.

Một nửa không gian trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các điểm thỏa mãn bất phương trình:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b, \quad b, a_i \text{ là số thực } (i = 1, \ldots, n)$$

Mà không gian $\mathbb{R}^n$ chứa vô hạn điểm có n tọa độ. Do đó, không có bất kỳ bất đẳng thức tuyến tính nào cần được thỏa mãn để một điểm thuộc $\mathbb{R}^n$. Vì không có nửa không gian nào xác định được $\mathbb{R}^n$, nên $\mathbb{R}^n$ không được coi là giao của hữu hạn các nửa không gian.
Kết luận: $\mathbb{R}^n$ không phải là một đa diện.

2.2 Bài 10.2

Với mỗi $b \in \mathbb{R}^m$, cho $\varphi(b)$ là giá trị tối ưu của hàm mục tiêu cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad c^T x \\ &\text{Ràng buộc} \quad Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Giả sử $\varphi(b) < \infty$ với mọi b. Chứng tỏ rằng hàm $\varphi(b)$ là một hàm lồi (Hàm f được gọi là một hàm lồi khi $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \quad$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^m$ và $0 < t < 1$)
Bài giải:
Đầu tiên ta tiến hành lập bài toán đối ngẫu từ bài toán gốc:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad b^T y \\ &\text{Ràng buộc} \quad A^T y \geq c \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Do bài toán gốc tồn tại phương án khả thi với mọi b ($\varphi(b) < \infty$), áp dụng định lý đối ngẫu mạnh, giá trị tối ưu của hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu sẽ bằng $\varphi(b)$ với mọi b. Ta gọi những giá trị tối ưu này là $\xi(c) \Rightarrow \xi(c) = \varphi(b)$. Tiếp theo, xét $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^m$, và $0 <$ t < 1. Cho y_1, y_2 lần lượt là các phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và c_1, c_2 là các hệ số ở hàm mục tiêu của bài toán gốc. Ta có:

$$\begin{aligned} &A^T y_1 \geq c_1 \\ &A^T y_2 \geq c_2 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cho $y = ty_1 + (1-t)y_2$, ta được:

$$A^T y = A^T(ty_1 + (1-t)y_2) = tA^T y_1 + (1-t)A^T y_2 \geq tc_1 + (1-t)c_2$$

y lúc này là phương án khả thi của bài toán đối ngẫu với hệ số hàm mục tiêu $tc_1 + (1-t)c_2$. Từ đó:

$$\xi(tc_1 + (1-t)c_2) \leq b^T y - tb^T y_1 + (1-t)b^T y_2 \leq t\xi(c_1) + (1-t)\xi(c_2)$$

Suy ra $\xi(c)$ là một hàm lồi. Mà $\xi(c) = \varphi(b)$, nên nếu hàm mục tiêu $\xi(c)$ của bài toán đối ngẫu là một hàm lồi, thì hàm mục tiêu $\varphi(b)$ của bài toán sẽ là một hàm lõm. Bài toán được chứng minh.

2.3 Bài 10.3

Mô tả cách sửa đổi chứng minh của Định lý 4 để chứng minh kết quả sau:

Giả sử P và $\tilde{P}$ là hai đa diện rời rạc trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại các nửa không gian tổng quát rời rạc H và $\tilde{H}$ sao cho $P \subset H$ và $\tilde{P} \subset \tilde{H}$.

Bài giải:

Trước hết, hãy nhớ lại chứng minh của Định lý 4, nó khẳng định rằng đối với hai tập lồi rời nhau A và B trong $\mathbb{R}^n$, luôn tồn tại một siêu phẳng chia cắt chúng một cách nghiêm ngặt. Chứng minh này sử dụng thực tế là hàm $f(x) = \inf\{\|x-a\|^2 : a \in A\} - \inf\{\|x-b\|^2 : b \in B\}$ là liên tục và dương nghiêm ngặt trên A và âm nghiêm ngặt trên B. Sau đó, áp dụng Định lý giá trị trung gian, tồn tại một siêu phẳng H sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in H$.

Giờ chúng ta xem xét vấn đề đã cho. Chúng ta có hai đa diện P và $\tilde{P}$ rời nhau trong không gian $\mathbb{R}^n$. Vì các đa diện là các tập lồi, ta có thể áp dụng kết quả của Định lý 4 để tìm một siêu phẳng H_0 chia cắt P và $\tilde{P}$ một cách nghiêm ngặt.

Tiếp theo, chúng ta cần tìm các nửa không gian tổng quát H và $\tilde{H}$ rời nhau sao cho $P \subset H$ và $\tilde{P} \subset \tilde{H}$. Để làm điều này, chúng ta có thể sử dụng siêu phẳng chia cắt H_0 như một đường ranh giới cho cả hai nửa không gian.

Cuối cùng, chúng ta cần chứng minh rằng H và $\tilde{H}$ là rời nhau. Giả sử tồn tại một điểm x_0 thuộc cả H và $\tilde{H}$. Khi đó, $f(x_0) \geq 0$ và $f(x_0) \leq 0$, cho nên $f(x_0) = 0$. Tuy nhiên, điều này mâu thuẫn với việc H_0 chia cắt P và $\tilde{P}$ một cách nghiêm ngặt, vì x_0 sẽ thuộc về H_0. Do đó, H và $\tilde{H}$ phải là rời nhau. Tóm lại, chúng ta có thể điều chỉnh bằng chứng của Định lý 4 để tìm các nửa không gian tổng quát H và $\tilde{H}$ rời nhau sao cho $P \subset H$ và $\tilde{P} \subset \tilde{H}$ bằng cách sử dụng siêu phẳng chia cắt H_0 như một ranh giới cho cả hai nửa không gian và định nghĩa H và $\tilde{H}$ dựa trên hàm $f(x)$ được sử dụng trong chứng minh của Định lý 4.

2.4 Bài 10.4

Tìm một giải pháp bù tối ưu (strictly complementary solution) cho bài toán tối ưu tuyến tính sau đây và bài toán đối ngẫu của nó:

Bài toán gốc:

$$\text{maximize } 2x_1 + x_2$$

$$\text{ràng buộc } 4x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bài toán đối ngẫu:

$$\text{minimize } 6y_1 + y_2 + 3y_3$$

$$\text{ràng buộc } 4y_1 + 2y_3 \geq 2$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Một giải pháp bù tối ưu là một cặp giải pháp cho bài toán gốc và bài toán đối ngẫu, lần lượt sao cho đối với mỗi cặp ràng buộc gốc và đối ngẫu, ít nhất một trong hai biến tương ứng là dương tuyệt đối.

Chúng ta có thể giải bài toán gốc đó thì bằng cách vẽ vùng khả thi và đỉnh tối ưu.

Vùng khả thi được xác định bởi sự giao nhau của các mặt phẳng xác định bởi các ràng buộc: $4x_1 + 2x_2 \leq 6$, $x_2 \leq 1$, $2x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Đỉnh tối ưu là $(x_1, x_2) = (1,1)$ với giá trị mục tiêu tối ưu là $2(1) + 1(1) = 3$.

Giờ chúng ta có thể tìm giải pháp đối ngẫu bằng cách thay thế giải pháp nguyên thủy vào các ràng buộc đối ngẫu: $4y_1 + 2y_3 \geq 2$, $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$.

Do giải pháp nguyên thủy là tối ưu, phải tồn tại một giải pháp đối ngẫu thỏa mãn những ràng buộc này với đẳng thức: $4y_1 + 2y_3 = 2$, $2y_1 + y_2 + y_3 = 1$

Giải pháp nguyên thủy tối ưu (1,1) là một giải pháp đối ngẫu thỏa mãn các ràng buộc này với dạng thức: $4y_1 + 2y_3 = 2$, $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Chúng ta có thể giải phương trình này để tìm giải pháp đối ngẫu $(y_1, y_2, y_3) =$ (0,1,1), cho giá trị mục tiêu tối ưu là $6(0) + 1 + 3(1) = 4$. Tuy nhiên, đây không phải là một giải pháp bù tối ưu, vì cả $x1$ và $y1$ đều bằng 0.

Để tìm giải pháp tối ưu, chúng ta có thể xáo trộn giải pháp nguyên thủy một chút, ví dụ, bằng cách đặt $x_1 = 1 - \epsilon$ và $x_2 = 1 + \epsilon$ với ϵ rất nhỏ và lớn hơn 0. Điều này tạo ra một giải pháp nguyên thủy mới $(x_1, x_2) = (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$. Thay giải pháp nguyên thủy mới này vào các ràng buộc đối ngẫu, ta có: $4y_1 + 2y_3 = 2 - 4\epsilon$ và $2y_1 + y_2 + y_3 = 1 - \epsilon$. Tiếp theo chúng ta giải hệ phương trình này để tìm được giải pháp tối ưu (y_1, y_2, y_3) thỏa mãn các ràng buộc đối ngẫu.

2.5 Bài 10.5

Có một sự đơn giản hóa quá mức trong chứng minh của Định lý 3. Bạn có thể nhận ra nó không? Bạn có thể sửa nó không?

Bài giải:

Định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính được chứng minh chỉ cho các bài toán ở dạng chuẩn.

Do đó, bài toán Quy hoạch tuyến tính (4) cần được biến đổi thành dạng chuẩn để áp dụng định lý cơ bản một cách hợp lý.

Bài toán Quy hoạch tuyến tính ở dạng chuẩn có dạng như sau:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{Ràng buộc} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2,...,m \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1,2,...,n
\end{aligned}
$$

Ta sẽ biến đổi bài toán (4) về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x \\ \text{Ràng buộc} \quad & Ax = b \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x \\ \text{Ràng buộc} \quad & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \\ & e^T x \leq 1 \\ & -e^T x \leq -1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

2.6 Bài 10.6

Hoàn thành chứng minh Định lý 7

Bài giải:

Phương pháp chứng minh gần như tương tự như với định lý 6, ngoại trừ lần này j là chỉ số sao cho x_j biến mất ở tất cả các phương án tối ưu. Ta lại có được bài toán mới.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & x_j \\ \text{Ràng buộc } & Ax \leq b, \\ & c^T x \geq \zeta^*, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

ζ^* ở đây là giá trị hàm mục tiêu của phương án tối ưu ở bài toán gốc. Ngoài các biến đối ngẫu y, ta có thêm biến t đi kèm với ràng buộc $c^T x \geq \zeta^*$. Giờ đây ta sẽ phải xem xét thêm đến 2 trường hợp là: (a) giá trị tối ưu của t là một số dương và (b) không tồn tại giá trị tối ưu t.

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên sẽ là:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^T y - \zeta^* t \\ \text{subject to} \quad & A^T y - ct \geq e_j, \\ & y \geq 0, \\ & t \geq 0. \end{aligned}$$

(e_j ở đây là một vector đơn vị với mọi giá trị bằng 0 trừ giá trị ở vị trí j)

Dựa vào định luật đối ngẫu mạnh, bài toán trên cũng có một phương án tối ưu, gọi là y' cùng với biến phụ tương ứng z'.

$$\begin{aligned} A^T y' - ct - z' = e_j \\ y', z' \geq 0 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

(a) Giá trị tối ưu của t là một số dương:

Giả sử giá trị tối ưu của t là một số dương, tức là $t > 0$. Khi đó, ta có thể chia cả hai vế của bất đẳng thức cho t để có:

$$\frac{1}{t} A^T y - c \geq \frac{1}{t} e_j.$$

Đặt $z = \frac{1}{t} y$, ta có:

$$A^T z - c \geq \frac{1}{t} e_j,$$

với $z \geq 0$. Điều này chỉ ra rằng $z_j > 0$. Do đó, chúng ta có:

$$x_j + z_j > 0.$$

(b) Không tồn tại giá trị tối ưu t:

Nếu không tồn tại giá trị tối ưu t, điều này nghĩa là bài toán đối ngẫu không có phương án khả thi hoặc không giới nội. Điều này chỉ ra rằng x_j không thể biến mất ở tất cả các phương án tối ưu, vì vậy phải tồn tại ít nhất một $x_j > 0$.

Kết luận

Trong cả hai trường hợp, ta luôn có thể tìm được phương án tối ưu cho bài toán gốc và bài toán đối ngẫu sao cho $x_j + z_j > 0$ và $y_j + w_j > 0$.

Do đó, tồn tại một phương án tối ưu cho bài toán gốc (x', w') và phương án tối ưu cho bài toán đối ngẫu (y', z') sao cho $x' + z' > 0$ và $y' + w' > 0$.

Như vậy, Định lý 7 được chứng minh.

2.7 Bài 10.7

Chứng minh phát biểu sau: Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án chấp nhận được và tập các phương án chấp nhận được là giới hạn, thì sẽ có một phương án đối ngẫu dương chấp nhận được: y > 0 và z > 0.

Bài giải:

Đề bài cho chúng ta một bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án chấp nhận được và tập các phương án chấp nhận được là giới hạn. Ta đặt bài toán chính như sau:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } c^T x \\ &\text{Ràng buộc } Ax \le b, \\ &\qquad x \ge 0. \end{aligned}$$

Ta muốn chứng minh rằng tồn tại một phương án đối ngẫu dương chấp nhận được, tức là y > 0 và z > 0. Bài toán đối ngẫu có thể được phát biểu như sau:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } b^T y \\ &\text{Ràng buộc } a^T y + z = c, \\ &\qquad y \ge 0, \\ &\qquad z > 0. \end{aligned}$$

Giả sử đối ngẫu có biến bằng không (biến null), ví dụ y = 0, z = 0. Ràng buộc của bài toán đối ngẫu trở thành:

$$\mathrm{a}^T y + z = a^T 0 + 0 = 0 = c$$

Vì c = 0, nên bài toán chính trở thành:

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } 0^T x \\ &\text{Ràng buộc } Ax \le b, \\ &\qquad\qquad x \ge 0. \end{aligned}$$

Hàm mục tiêu là một hằng số nên bài toán chính không giới hạn khi và chỉ khi có tồn tại một phương án tối ưu x sao cho:

$$\mathrm{A}x \le b,\ x \ge 0.$$

Tuy nhiên, đề bài đã nói rằng tập các phương án chấp nhận được là giới hạn. Điều này có nghĩa rằng không tồn tại một phương án x như vậy, và do đó đối ngẫu không thể có biến null.
Từ đó ta suy ra được rằng phải tồn tại một phương án đối ngẫu dương chấp nhận được, tức là:

$$\mathrm{y} \ge 0,\ z > 0 \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Tài liệu

[1] Robert J. Vanderbei. *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Springer, fifth edition, 2020.