ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Convex Analysis - Giải tích lồi

Nhóm 12

Quy hoạch tuyến tính

Ngày 16 tháng 6 năm 2024

Thông tin nhóm

MSSV	Họ và tên
20120300	Trần Đình Khải
20120441	Nguyễn Đình Chiến
20120454	Lê Công Đắt
20120526	Nguyễn Thành Long
20120604	Lương Văn Triều

Bảng: Các thành viên trong nhóm

Nội dung

Tổ hợp lồi

Cho một tập hữu hạn các điểm $z_1, z_2, ..., z_n$ trong $\mathbb{R}^m$, một điểm z được gọi là tổ hợp lồi nếu:

$$z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j, \quad t_j \geq 0 \text{ với mỗi j và } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1.$$

Nếu tồn tại $t_j \neq 0$, tổ hợp trên được gọi là một tổ hợp lồi nghiêm ngặt (strict convex combination).
Với n = 2, tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của hai điểm là đoạn thẳng nối chúng.

Tập lồi - Định lý 1

Tập hợp con S của $\mathbb{R}^m$ được gọi là lồi nếu:

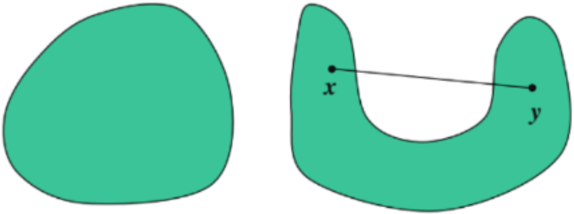
$$\forall x, y \in S;\ S \text{ chứa tất cả các điểm trên đoạn thẳng nối } x \text{ và } y.$$

Điều đó có nghĩa là, với mọi $0 < t < 1$, ta có $tx + (1 - t)y \in S$.

Định lý 1

Một tập hợp C là lồi nếu và chỉ nếu nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của các điểm trong C.

Ví dụ



Hình: Tập hợp bên trái là lồi - đối với bất kỳ cặp điểm nào trong tập hợp, đoạn thẳng nối hai điểm đó cũng nằm trong tập hợp. Tập hợp bên phải không lồi - tồn tại các cặp điểm, như điểm x và y đã được chỉ ra, trong đó đoạn thẳng nối chúng không nằm hoàn toàn trong tập hợp.

Chứng minh định lý 1

Giả sử C là một tập hợp lồi. Theo định nghĩa, C chứa tất cả các tổ hợp lồi của các cặp điểm trong C. Để chứng minh rằng C chứa tất cả các tổ hợp lồi của các bộ ba điểm trong C, giữ nguyên z_1, z_2, và z_3 trong C và xem xét.

$$z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \quad (1)$$

Ở đó

$$t_j \geq 0 \text{ cho mỗi j và } \sum_{j=1}^{3} t_j = 1$$

Chứng minh định lý 1 (tiếp theo)

Nếu một trong số các giá trị t_j bằng 0, thì z thực sự chỉ là một tổ hợp lồi của hai điểm và do đó thuộc về C. Vì vậy, giả sử rằng mỗi giá trị t_j đều dương tuyệt đối. Viết lại (1) như sau:

$$
\begin{aligned}
z &= (1-t_3)\left(\frac{t_1}{1-t_3}z_1 + \frac{t_2}{1-t_3}z_2\right) + t_3 z_3 \\
&= (1-t_3)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}z_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}z_2\right) + t_3 z_3
\end{aligned}
$$

Vì C chứa tất cả các tổ hợp lồi của các cặp điểm, do đó ta có thể suy ra rằng:

$$\frac{t_1}{t_1+t_2}z_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}z_2 \in C$$

Vì z là một tổ hợp lồi của hai điểm $\frac{t_1}{t_1+t_2}z_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}z_2$ và z_3, cả hai điểm này đều thuộc C, do đó ta có z thuộc C.

Chứng minh định lý 1 (tiếp theo)

- Dễ thấy rằng lập luận này có thể được mở rộng thành một chứng minh theo quy nạp rằng C chứa tất cả các tổ hợp lồi của tập hợp hữu hạn các điểm trong C.
- Thực tế, ta chỉ cần chứng minh rằng việc C chứa tất cả các tổ hợp lồi của n điểm từ C đồng nghĩa với việc C chứa tất cả các tổ hợp lồi của n + 1 điểm từ C.
- Việc chứng minh rằng một tập hợp là lồi chỉ cần lấy tổ hợp lồi của các cặp điểm để chứng minh rằng nó là lồi.

Bao lồi - Định lý 2

Đối với mỗi tập hợp S trong $\mathbb{R}^m$ (không nhất thiết phải là lồi), tồn tại một tập hợp lồi nhỏ nhất, ký hiệu là $conv(S)$, chứa S.
Tập hợp này được định nghĩa là giao của tất cả các tập hợp lồi chứa S, được gọi là bao lồi của S.

Định lý 2

Bao lồi $conv(S)$ của một tập hợp S trong $\mathbb{R}^m$ chính xác bao gồm tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của tập hợp hữu hạn các điểm từ S.

Chứng minh định lý 2

Gọi H là tập hợp của tất cả các tổ hợp lồi của các tập hợp hữu hạn các điểm từ S:

$$H = \left\{ z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j : n \geq 1 : z_j \in S \text{ và } t_j > 0 \text{ với mọi j , và } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\}$$

Để thấy rằng H chứa S, chỉ cần lấy n $= 1$ trong định nghĩa của H.
Để thấy rằng H là lồi, giữ nguyên hai điểm x và y trong H và một số thực $0 < t < 1$. Ta phải chứng minh rằng $z = tx + (1 - t)y \in H$.

Chứng minh định lý 2 (tiếp theo)

Sự thật rằng $x \in H$ ngụ ý rằng:

$$x = \sum_{j=1}^{r} p_j x_j, \quad \text{Với } r \geq 1, p_j > 0, \sum_{j=1}^{r} p_j = 1, x_j \in S \text{ và } j = 1, 2, \ldots, r.$$

Tương tự với $y \in H$:

$$y = \sum_{j=1}^{s} q_j y_j, \quad \text{Với } s \geq 1, q_j > 0, \sum_{j=1}^{s} q_j = 1, y_j \in S \text{ và } j = 1, 2, \ldots, s.$$

Do đó,

$$z = tx + (1-t)y = \sum_{j=1}^{r} tp_i x_j + \sum_{j=1}^{r} (1-t) q_i y_j \tag{2}$$

Chứng minh định lý 2 (tiếp theo)

- Vì các hệ số $(tp_1, \ldots, tp_r, (1-t)q_1, \ldots, (1-t)q_s)$ đều dương và tổng của chúng bằng một, suy ra biểu thức (2) cho z là một tổ hợp lồi của $r+s$ từ S. Do đó, z thuộc H.
- Vì vậy, x và y là các điểm tùy ý trong H và t là một số thực tùy ý trong khoảng (0,1), sự thật rằng $z \in H$ ngụ ý rằng H là lồi. Chỉ cần chứng minh rằng H nằm trong mọi tập hợp lồi chứa S. Gọi C là một tập hộp như vậy (lồi và chứa S).
- Từ Định lý 1 và sự thật rằng C chứa S, ta có rằng C chứa tất cả các tổ hợp lồi của điểm trong S. Do đó, C chứa H.

Định lý Carathéodory

Trong phần trước, ta đã chỉ ra được rằng bao lồi của một tập hợp S có thể được xây dựng bằng cách tạo tất cả các tổ hợp lồi của các tập hợp hữu hạn các điểm từ S.
Năm 1907, Carathéodory đã chỉ ra rằng không cần phải sử dụng tất cả các tập hợp hữu hạn. Thay vào đó, chỉ cần m + 1 điểm là đủ:

Định lý 3

Bao lồi conv(S) *của một tập hợp S trong* $\mathbb{R}^m$ *bao gồm toàn bộ tổ hợp lồi của m + 1 điểm từ S:*

$$conv(S) = \left\{ z = \sum_{j=1}^{m+1} t_j z_j : z_j \in S \text{ và } t_j \geq 0, \sum_j t_j = 1 \right\}$$

Chứng minh định lý Carathéodory

Gọi H là tập hợp ở bên phải. Từ Định lý 2, ta có thể thấy H nằm trong $conv(S)$. Do đó, chỉ cần chứng minh **mọi điểm thuộc conv(S) đều thuộc H**

Dựa vào mục đích này, ta cố định một điểm z trong $conv(S)$. Theo Định lý 2, tồn tại một tập hợp có n điểm $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ trong S (xét $n > m$, $n \leq m$ là trường hợp tầm thường) và các hệ số nhân không âm tương ứng $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$ có tổng bằng 1, sao cho:

$$z = \sum_{j=1}^{n} t_j z_j \tag{3}$$

Chứng minh định lý Carathéodory (tiếp theo)

Gọi A là ma trận với các điểm $z_1, z_2, ..., z_n$ là các cột của A:

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

Thêm vào đó, gọi **x*** là vector chứa các hệ số nhân $t_1, t_2, ..., t_n$:

$$(x^*)^T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, đặt b = z. Từ (3), ta có thể thấy rằng **x*** là phương án chấp nhận được cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x \\ \text{Ràng buộc} \quad & Ax = b \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

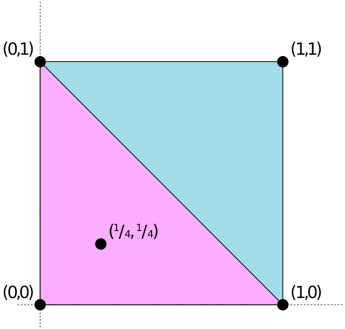
Chứng minh định lý Carathéodory (tiếp theo)

Định lý cơ bản của quy hoạch tuyến tính cho chúng ta biết rằng mọi bài toán quy hoạch tuyến tính khả thi đều có một phương án chấp nhận được cơ bản.
Đối với một phương án như vậy, chỉ các biến cơ sở mới có thể khác không. Số lượng biến cơ sở trong (4) trùng với số lượng ràng buộc có dấu bằng (tối đa m+1 ràng buộc vì $x \in S \subset R^m$.). Tức là có tối đa m + 1 phần tử khác không trong phương án.
Do đó, phương pháp chấp nhận được **x*** tương ứng với một tổ hợp lồi của đúng m + 1 điểm trong số n điểm ban đầu. Vậy **mọi điểm thuộc conv(S) đều thuộc H**. Định lý được chứng minh.

Ví dụ

Trong không gian 2 chiều R^2, định lý Carathéodory phát biểu rằng chúng ta có thể dựng một tam giác gồm các điểm từ P bao quanh bất kì điểm nào trong bao lồi của P.
Ví dụ, đặt $P = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Bao lồi của tập này là một hình vuông. Cho điểm $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ thuộc bao lồi của P. Khi đó chúng ta có thể xây dựng một tập gồm 3 điểm $P' = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$, mà bao lồi của nó bao quanh điểm x.

Ví dụ



Hình: Minh họa định lý Carathéodory trong R^2

Nửa không gian

Một nửa không gian của $\mathbb{R}^n$ là bất kỳ tập hợp nào được cho bởi một bất đẳng thức tuyến tính (không tầm thường) duy nhất:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b\}, \qquad (a_1, a_2, ..., a_n) \neq 0. \tag{5}$$

Nửa không gian (tiếp theo)

Mọi nửa không gian đều lồi.
Để thấy điều này, giả sử rằng $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ đều thỏa mãn bất đẳng thức tuyến tính trong (5). Cố định t giữa không và một. Khi đó cả t và $1 - t$ đều không âm, do đó nhân chúng với nhau giữ nguyên hướng của bất đẳng thức. Vì vậy, nhân $\sum_j a_j x_j \leq b$ với t và $\sum_j a_j y_j \leq b$ với $1 - t$, sau đó cộng lại, chúng ta có được:

$$\sum_j a_j(tx_j + (1-t)y_j) \leq b.$$

Nghĩa là, $tx + (1-t)y$ cũng thỏa mãn bất đẳng thức xác định nửa không gian.

Nửa không gian tổng quát

- Nếu chúng ta cho phép vector hệ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ trong định nghĩa của nửa không gian bằng không, thì chúng ta gọi tập hợp được định nghĩa như vậy là nửa không gian tổng quát.
- Rất dễ thấy rằng mỗi nửa không gian tổng quát đơn giản là một nửa không gian, toàn bộ $\mathbb{R}^n$, hoặc là tập rỗng.
- Ngoài ra, mỗi nửa không gian tổng quát rõ ràng là tập hợp lồi.

Đa diện

- Một *đa diện* được định nghĩa là giao của một tập hợp hữu hạn các nửa không gian tổng quát. Tức là, một đa diện là bất kỳ tập hợp nào có dạng:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1, 2, ..., m\}.$$

- Mỗi đa diện, do là giao của một tập hợp các tập lồi, nên là tập lồi.

Định lý phân tách

Định lý 4

Giả sử P và $\tilde{P}$ là hai đa diện rời rạc và không rỗng trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, tồn tại hai nửa không gian rời rạc H và $\tilde{H}$ sao cho $P \subset H$ và $\tilde{P} \subset \tilde{H}$.

Chứng minh định lý phân tách

Giả sử rằng P và $\tilde{P}$ được cho bởi các hệ bất đẳng thức sau:

$$P = \{x : Ax \leq b\}$$
$$\tilde{P} = \{x : \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$$

Sự rời rạc giữa P và $\tilde{P}$ ngụ ý rằng không có nghiệm nào cho hệ:

$$\begin{bmatrix} A \\ \tilde{A} \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ \tilde{b} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Chứng minh định lý phân tách (tiếp theo)

Để tiếp tục chứng minh, chúng ta cần một kết quả được gọi là Bổ đề Farkas, trong đó nói rằng $Ax \leq b$ không có nghiệm khi và chỉ khi có vector y kích thước m sao cho:

$$\begin{aligned} A^T y &= 0 \\ y &\geq 0 \\ b^T y &< 0. \end{aligned}$$

Chứng minh định lý phân tách (tiếp theo)

Áp dụng Bổ đề Farkas, việc không có nghiệm nào của (6) ngụ ý rằng tồn tại một vectơ:

$$\begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix},$$

sao cho:

$$\begin{bmatrix} A^T & \tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = A^T y + \tilde{A}^T \tilde{y} = 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} b^T & \tilde{b}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = b^T y + \tilde{b}^T \tilde{y} = 0. \tag{9}$$

Chứng minh định lý phân tách (tiếp theo)

Từ điều kiện cuối cùng, chúng ta thấy rằng $b^T y < 0$ hoặc $\tilde{b}^T \tilde{y} < 0$ (hoặc cả hai). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng:

$$b^T y < 0.$$

Bổ đề Farkas (lần này được áp dụng theo hướng khác) cùng với tính khác rỗng của P giờ đây hàm ý rằng:

$$A^T y \neq 0$$

Chứng minh định lý phân tách (tiếp theo)

$$H = \{x : (A^T y)^T x \leq b^T y\} \text{ và } \tilde{H} = \{x : (A^T y)^T x \geq -\tilde{b}^T \tilde{y}\}.$$

- Những tập hợp này rõ ràng là nửa không gian. Để kết thúc chứng minh, chúng ta phải chứng minh rằng chúng rời nhau và chứa các khối đa diện tương ứng.
- Trước hết, từ (9) suy ra rằng H và $\tilde{H}$ là rời nhau. Thật vậy, giả sử rằng $x \in H$. Khi đó $(A^T y)^T x \leq b^T y < -\tilde{b}^T \tilde{y}$, suy ra rằng x không thuộc $\tilde{H}$.
- Để chứng minh $P \subset H$, cố định x trong P. Khi đó $Ax \subset B$. Vì $y \geq 0$ (như chúng ta đã biết từ (8)), nên $y^T Ax \leq y^T b$. Nhưng đây chính xác là điều kiện nói rằng x thuộc về H. Vì x là một điểm tùy ý trong P nên nó tuân theo $P \subset H$.

Chứng minh định lý phân tách (tiếp theo)

- Chứng minh $\tilde{P}$ là tập con của $\tilde{H}$ cũng tương tự.
- Thật vậy, giả sử rằng $x \in \tilde{P}$. Khi đó $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$. Nhân bên trái với $-\tilde{y}^T$ và lưu ý rằng $\tilde{y} \geq 0$, ta thấy $-\tilde{y}^T\tilde{A}x \leq -\tilde{y}^T\tilde{b}$.
- Nhưng từ (7) chúng ta thấy $-\tilde{y}^T\tilde{A}x = y^TAx$, và do đó bất đẳng thức cuối cùng này chính xác là điều kiện $x \in \tilde{H}$.
- Một lần nữa, tính tùy ý của $x \in \tilde{P}$ dẫn đến $\tilde{P} \subset \tilde{H}$, và chứng minh hoàn tất.

Bổ đề Farkas

Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày nó một cách chính thức như một bổ đề và đưa ra chứng minh của nó.

Bổ đề 5

Hệ phương trình $Ax \leq b$ không có nghiệm khi và chỉ khi có một vector y sao cho:

$$\begin{aligned} A^T y &= 0 \\ y &\geq 0 \\ b^T y &< 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Chứng minh bổ đề Farkas

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 0 \\ \text{sao cho} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

và bài toán đối ngẫu của nó:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^T y \\ \text{sao cho} \quad & A^T y = 0 \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Chứng minh bổ đề Farkas (tiếp theo)

Rõ ràng, bài toán đối ngẫu luôn có phương án khả thi (chỉ cần lấy $y = 0$). Vì vậy, nếu bài toán gốc có phương án khả thi, thì bài toán đối ngẫu sẽ bị chặn. Ngược lại, nếu bài toán gốc không khả thi, thì bài toán đối ngẫu sẽ không bị chặn. Nghĩa là, bài toán gốc không khả thi khi và chỉ khi bài toán đối ngẫu không bị chặn.
Để hoàn tất chứng minh, ta chỉ cần chứng tỏ rằng bài toán đối ngẫu không bị chặn khi và chỉ khi tồn tại một nghiệm $(y \neq 0)$ thỏa mãn (10). Thật vậy, giả sử rằng bài toán đối ngẫu không bị chặn. Phương pháp đơn hình sẽ suy diễn chứng minh được điều này, vì nó lần lượt xét các tập con của các ràng buộc.

Chứng minh bổ đề Farkas (tiếp theo)

Tại vòng lặp cuối cùng, một hướng đi Δy được tính toán sao cho giá trị nghiệm tính khả thi, tức là:

$$A^T \Delta y = 0$$

là một hướng giảm cho hàm mục tiêu, tức là

$$b^T \Delta y < 0.$$

Điều này hướng đến một dải bước đi không bị chặn, tức là

$$\Delta y > 0.$$

Chứng minh bổ đề Farkas (tiếp theo)

Nhưng những tính chất này cho thấy Δy chính là nghiệm của hệ (10) mà ta đang tìm kiếm. Ngược lại, giả sử rằng tồn tại một nghiệm của hệ (10). Gọi nó là Δy. Dễ thấy rằng, xuất phát từ $y = 0$, hướng đi này cung cấp mức giảm không giới hạn trong hàm mục tiêu. Điều này hoàn tất chứng minh.

Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu

Ta có bài toán gốc (11) như sau:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad c^T x \\ &\text{Ràng buộc} \quad Ax + w = b \\ &x, w \geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Và bài toán đối ngẫu (12) tương ứng:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad b^T y \\ &\text{Ràng buộc} \quad A^T y - z = c \\ &y, z \geq 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Đối ngẫu chặt chẽ

Với w, z là các biến phụ được thêm vào ở mỗi bài toán. Giả sử ta gọi (x', y') là phương án tối ưu của bài toán gốc, (y', x') là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Theo định lý độ lệch bù, với mỗi $j = 1, 2, \ldots, n$ với n là số biến ở bài toán gốc, ta có $x'_j = 0$ hoặc $z'_j = 0$ (hoặc cả 2), tương tự với $i = 1, 2, \ldots, m$ với m là số ràng buộc, ta có $y'_i = 0$ hoặc $w'_i = 0$ (hoặc cả 2). Với các cặp phương án tối ưu của bài toán gốc và đối ngẫu mà chỉ có một trong hai điều kiện thoả định lý độ lệch bù, không xảy ra đồng thời, ta gọi các cặp phương án tối ưu này đối ngẫu chặt chẽ với nhau (strictly complementary). Định lý độ lệch bù ở trường hợp này thường được thể hiện dưới dạng:

$$x' + z' > 0$$
$$y' + w' > 0$$

Định lý độ lệch bù chặt chẽ

Định lý 6

Nếu cả hai bài toán gốc và bài toán đối ngẫu đều có các phương án khả thi, tồn tại một phương án khả thi $(\bar{x} + \bar{w})$ *cho bài toán gốc và* $(\bar{y} + \bar{z})$ *cho bài toán đối ngẫu, sao cho* $(\bar{x} + \bar{z} > 0)$ *và* $(\bar{y} + \bar{w} > 0)$.

Chứng minh định lý 6

Với mọi phương án khả thi, ta cho j là các chỉ số sao cho $x_j = 0$.
Ta lập bài toán mới (13) như sau:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & x_j \\ \text{Ràng buộc} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Chứng minh định lý 6 (tiếp theo)

Bài toán trên tồn tại phương án khả thi (vì ràng buộc của nó tương tự như với bài toán gốc (11)) cũng như có một phương án tối ưu (hàm mục tiêu sẽ bằng 0). Bài toán đối ngẫu của bài toán trên (14) sẽ là:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & b^T y \\ \text{Ràng buộc} \quad & A^T y \geq e_j \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{14}$$

(e_j ở đây là một vector đơn vị với mọi giá trị bằng 0 trừ giá trị ở vị trí j)

Chứng minh định lý 6 (tiếp theo)

Dựa vào định luật đối ngẫu mạnh, bài toán trên cũng có một phương án tối ưu, gọi là y' cùng với biến phụ tương ứng z'. Ta cho y là một phương án khả thi bất kì của bài toán đối ngẫu ban đầu (12) và z là biến phụ tương ứng. Vì y' là một phương án tối ưu, cho nên $y' + y$ cũng có thể ngầm hiểu là một phương án khả thi và biến phụ tương ứng của nó sẽ là $z + z' + e_j$. Biến phụ thứ j của phương án khả thi này sẽ có giá trị ít nhất là 1. Từ đây, ta có thể kết luật rằng, tồn tại một phương án khả thi ở bài toán gốc (x, w) và tương ứng ở bài toán đối ngẫu (y, z) sao cho $x_j + z_j > 0$ và $y_j + w_j > 0$.

Định lý độ lệch bù hoàn chỉnh

Định lý 7

Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có một phương án tối ưu, thì tồn tại một phương án tối ưu cho bài toán gốc (x', w') *và phương án tối ưu cho bài toán đối ngẫu* (y', z') *sao cho* $x' + z' > 0$ *và* $y' + w' > 0$.

Chứng minh định lý 7

Phương pháp chứng minh gần như tương tự như với định lý 6, ngoại trừ lần này j là chỉ số sao cho x_j biến mất ở tất cả các phương án tối ưu. Ta lại có được bài toán mới.

$$\begin{aligned} \text{Maximize } & x_j \\ \text{Ràng buộc } & Ax \le b, \\ & c^T x \ge \zeta^*, \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{15}$$

ζ^* ở đây là giá trị hàm mục tiêu của phương án tối ưu ở bài toán gốc. Ngoài các biến đối ngẫu y, ta có thêm biến t đi kèm với ràng buộc $c^T x \ge \zeta^*$. Giờ đây ta sẽ phải xem xét thêm đến 2 trường hợp là: (a) giá trị tối ưu của t là một số dương và (b) không tồn tại giá trị tối ưu t.

Cảm ơn vì đã lắng nghe