Mapping $s \rightarrow z$ e risposta armonica
LT Cap.3 – Cap.4
Stabilità dei sistemi a tempo discreto
LT Cap.5

Controllo Digitale

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Prof. Federica Pascucci

March 29, 2023

Indice

Legame $s \to z$

Data una funzione $x(t)$ campionata

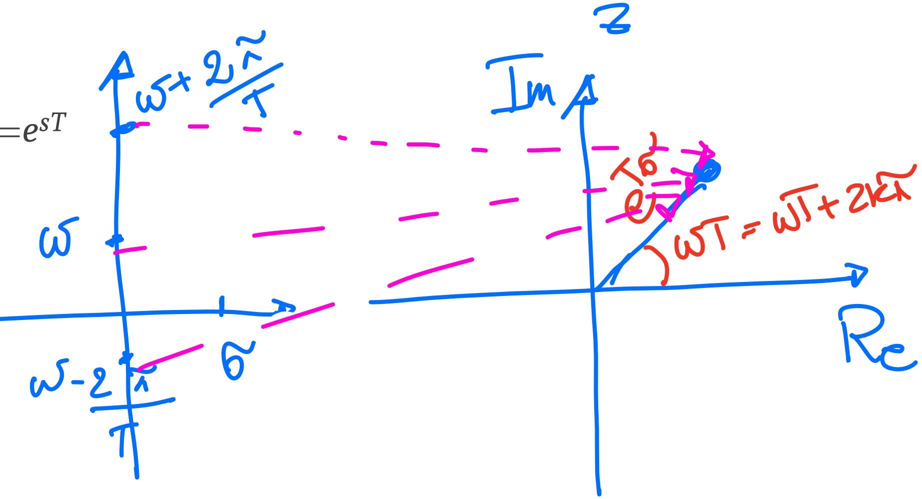
$$X^*(s) = X(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

da cui si deduce i legame $s \to z$

$$z = e^{sT}$$

s è una variabile complessa

$$s = \sigma + j\omega$$



da cui

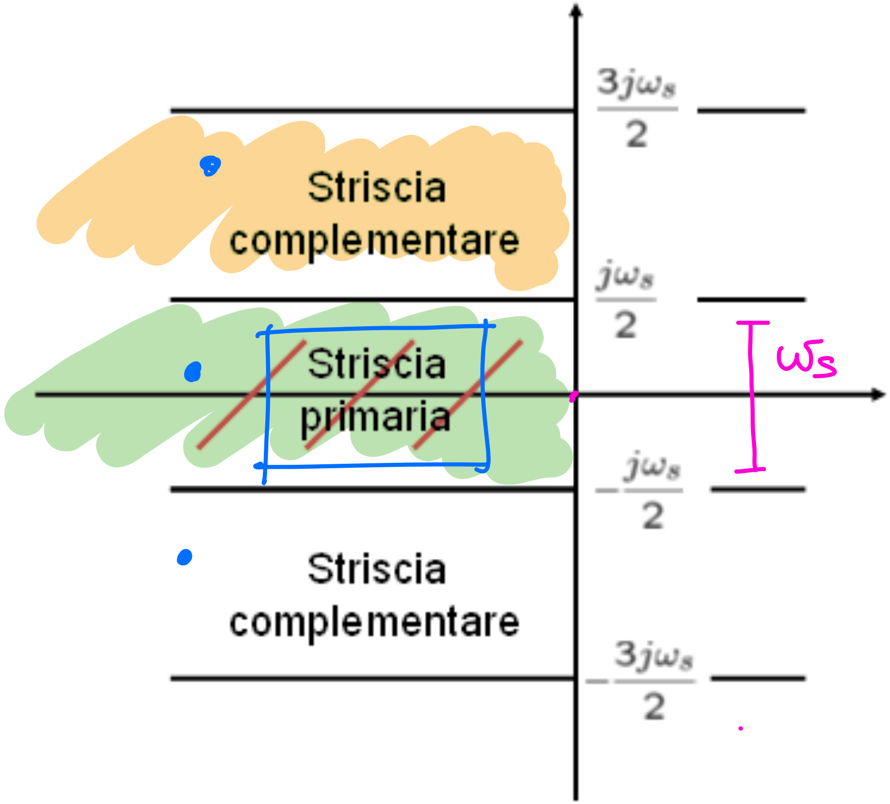
$$z = e^{sT} = e^{\underbrace{T(\sigma+j\omega)}} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega+\frac{2k\pi}{T})} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\rightarrow \underbrace{\boxed{e^{T\sigma}}}_{|z|} e^{j\boxed{\omega T}} \quad \angle z$$

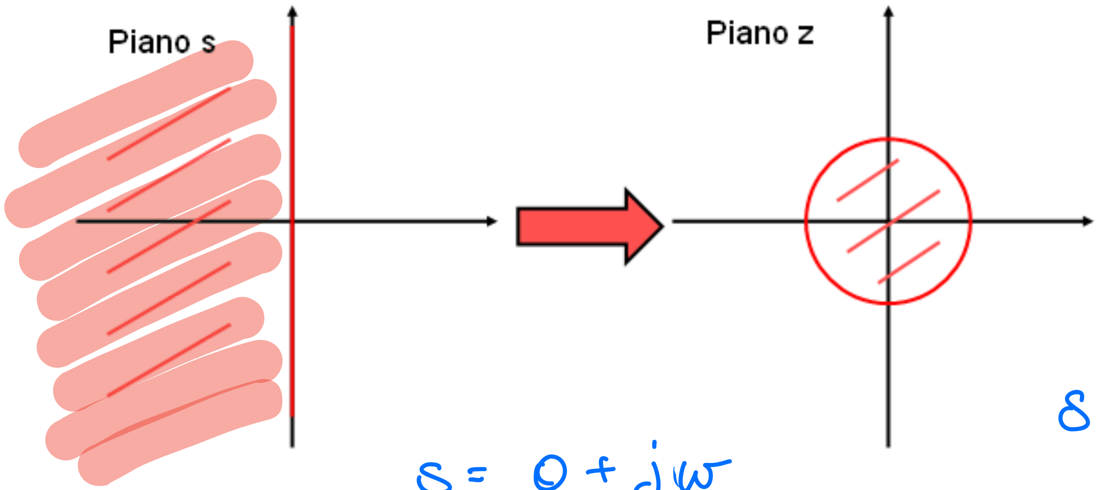
$$e^{T\sigma} e^{\underbrace{jT\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right)}_{T\omega + 2k\pi}}$$

Suddivisione piano S

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_s$$



Poli stabili



$s = -\alpha + j\omega \qquad \alpha > 0$

$s = 0 + j\omega$

Asse immaginario

$$z = e^{0T} e^{j\omega T} = \underline{1}\, e^{j\omega T}$$

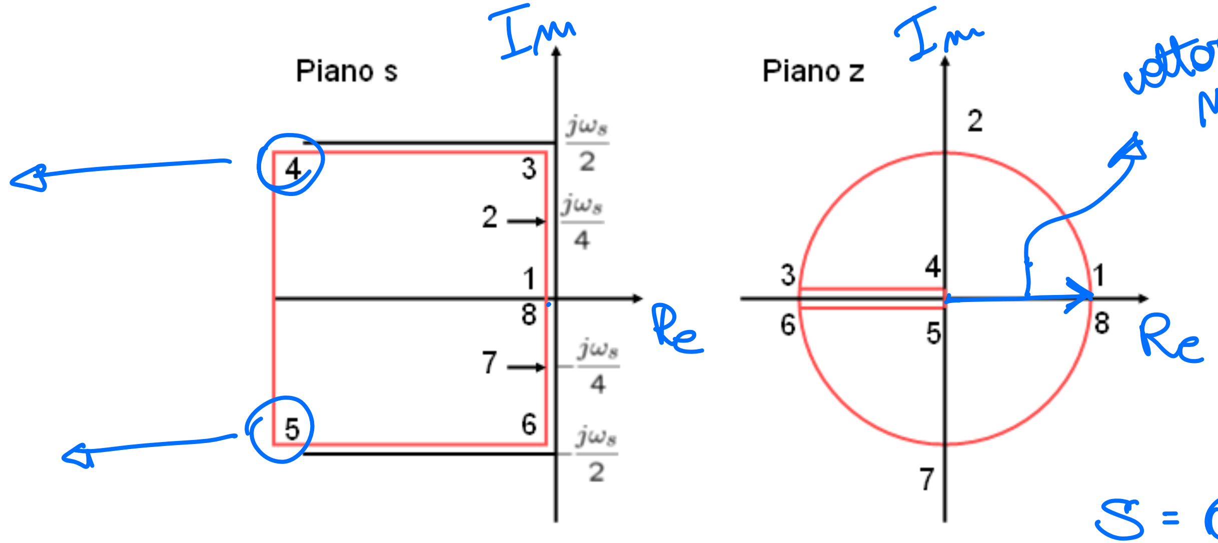
$$|z| = e^{-\alpha T} = \frac{1}{e^{\alpha T}} < 1$$

Modulo

$$\boxed{|z| = e^{T\sigma} < 1}$$

Polo nell'origine (1-8)

1 Mapping $s \to z$



vettore di modulo 1 e fase 0

$s = 0 + j0^{\pm}$ → 1, → 8

Modulo

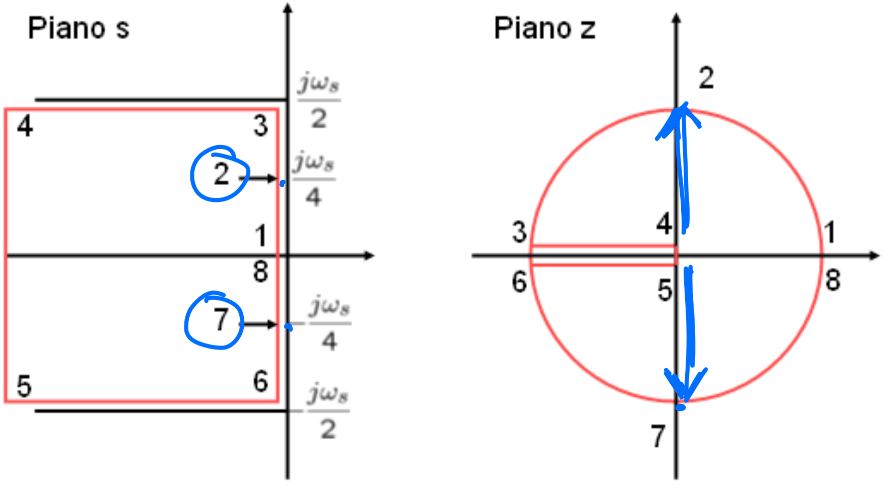
$$|z| = e^{0T} = 1$$

Fase

$$\angle z = \angle e^{j0^- \cdot T} = \angle e^{j0^+ \cdot T} = 0$$

$z = 1$

$s = 0 + \frac{j\omega_s}{4} = 0 + j\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{4}T}$



Modulo

$$|z| = e^{0T} = 1$$

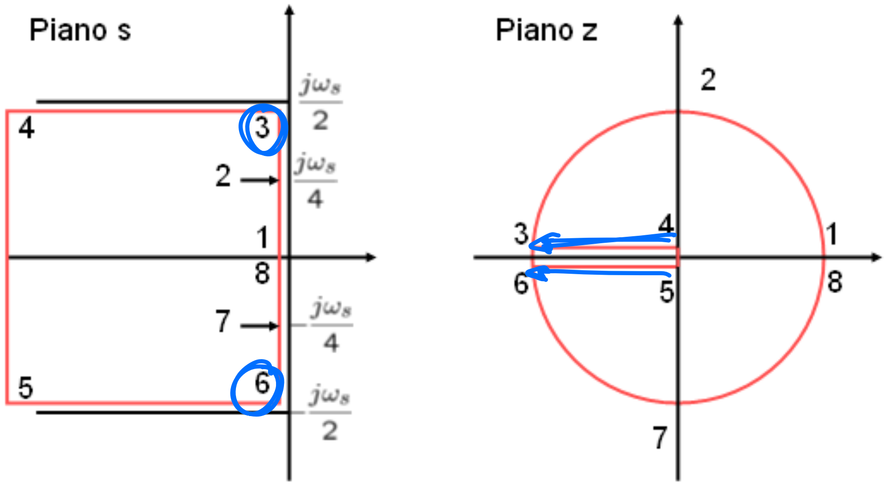
Fase

$$\angle z = \angle e^{\pm\frac{j\omega_s T}{4}} = \angle e^{\pm\frac{j2\pi T}{4T}} = \pm\frac{\pi}{2}$$

$z_2 = 0 + 1j$

$z_7 = 0 - 1j$

Poli al confine della striscia primaria (3-6)



$$s = 0 \pm j\frac{\omega_s}{2} = 0 \pm j\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}T} = 0 \pm j\frac{\pi}{T}$$

Modulo

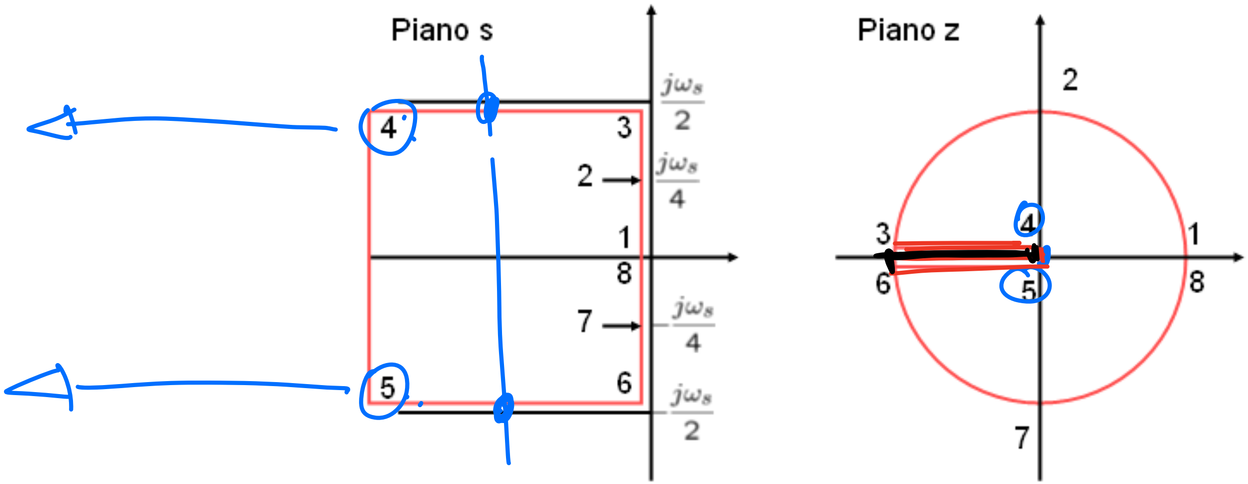
$$|z| = e^{0T} = 1$$

$$z = -1 + 0j$$

Fase

$$\angle z = \angle e^{\pm \frac{j\omega_s T}{2}} = \angle e^{\pm \frac{j2\pi T}{2T}} = \pm\pi$$

Poli al confine della striscia primaria (4-5)



$$s = -\infty \pm j\frac{\omega_s}{2}$$

$$= -\infty \pm \frac{\pi}{T}$$

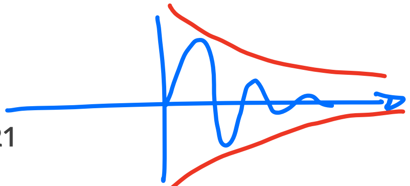
Modulo

$$|z| = e^{-\infty T} = 0$$

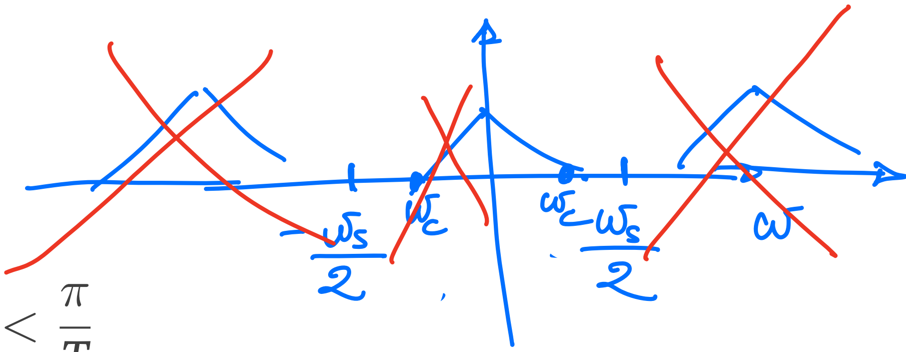
$$z = 0 + 0j$$

Fase

$$\angle z = \angle e^{\pm\frac{j\omega_s T}{2}} = \angle e^{\pm\frac{j2\pi T}{2T}} = \pm\pi$$



Indice



La *risposta armonica* di $G(z)$ è definita come

$$G(z) = G(e^{sT}) = G(e^{(\sigma+j\omega)T}) = G(e^{j\omega T})\Big|_{s=j\omega} \qquad 0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$$

1. La funzione è definita solo i $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$ in quanto è periodica in ω_s

$\omega T + 2\pi$

$$G(e^{j(\omega+\omega_s)T}) = G(e^{j(\omega T + \frac{2\pi}{T}T)}) = G(e^{j\omega T})$$

2. per $\omega \geq 0$ assume valori complessi coniugati rispetto al caso $\omega \leq 0$

$$\boxed{G(e^{j(-\omega)T}) = G^*(e^{j\omega T})}$$

$$\frac{z+5}{z+6} \rightarrow \frac{e^{j\omega T}+5}{e^{j\omega T}+6}$$

$$G(s) \rightarrow G(j\omega)$$

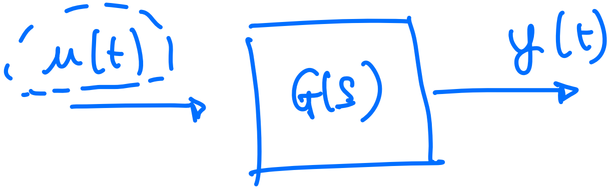
$$\frac{s+1}{s+2} \rightarrow \boxed{\frac{j\omega+1}{j\omega+2}}$$

- Ha senso considerare solo il range di frequenze $\omega \in \left[0, \frac{\pi}{T}\right]$

- La funzione $G(e^{j\omega T})$ è trascendente e non valgono le regole per il tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici

- I diagrammi di Bode vanno tracciati per punti (cioè con l'ausilio del calcolatore) o passando nel dominio w

Definizione di stabilità

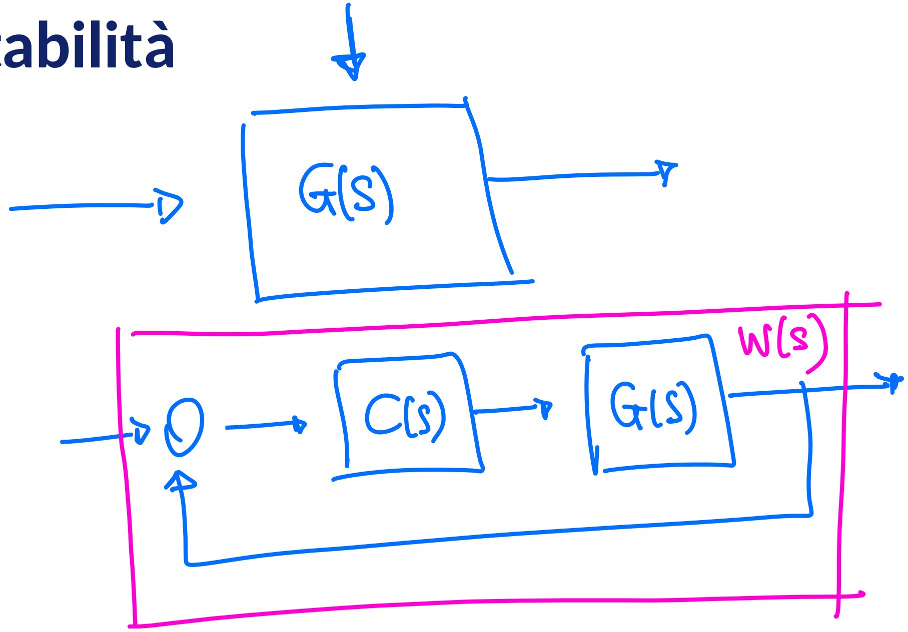


$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Il sistema è *asintoticamente stabile* se e solo se tutte le radici del polinomio D(z), cioè i poli del sistema, si trovano all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano Z
- Il sistema è *stabile semplicemente* se i poli del sistema si trovano all'interno della circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano Z tranne al più uno con modulo pari ad 1

NB Dal momento che si tratta di sistemi lineari, tempo invarianti stabilità asintotica e stabilità BIBO coincidono.

Criteri per determinare la stabilità

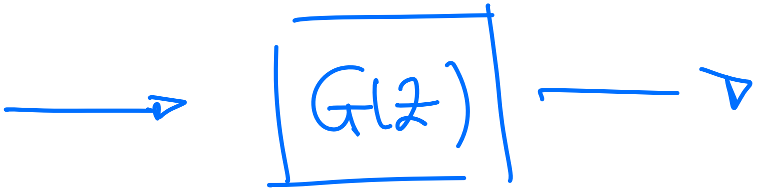


- Calcolo delle radici di $D(z)$

- Analisi dei coefficienti

  - Passare nel dominio w
    Criterio di Routh-Hurwitz

  - Analizzare i coefficienti di $D(z)$
    Criterio di Jury



Criterio di Routh-Hurwitz

$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

$D(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{P(w)}{F(w)}$

1. Si trasforma $D(z)$ sostituendo

$$\boxed{z = \frac{1+w}{1-w}}$$

con $w = \sigma + j\omega$

2. Si analizza $D(w)$ costruendo la tabella di Routh

$D(z) = z^2 + z + 1$

$D(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1 =$

$= \frac{\alpha w^2 + \beta w + \gamma}{(1-w)^2}$ $P(w)$ $= F(w)$

Per la stabilità si ha

$$|z| < 1$$

$$W = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned}
|z| &= \left|\frac{1+w}{1-w}\right| \\
&= \left|\frac{1+\sigma+j\omega}{1-\sigma-j\omega}\right| \\
&= \frac{(1+\sigma)^2+\omega^2}{(1-\sigma)^2+\omega^2} < 1
\end{aligned}$$

$$(\cancel{1}+\sigma)^2 + \cancel{\omega^2} < (\cancel{1}-\sigma)^2 + \cancel{\omega^2}$$

$\sigma < 0$ cioè $\mathrm{Re}(w) < 0$

Criterio di Jury

- Si considera

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

con $a_0 > 0$

- Si verificano le seguenti condizioni:

1. $|a_n| < a_0$
2. $D(z)|_{z=1} > 0$
3. $D(z)|_{z=-1} \begin{cases} > & 0 & n \text{ pari} \\ < & 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$

Condizioni necessarie

4. $\boxed{\begin{array}{ccc} |b_{n-1}| & > & |b_0| \\ |c_{n-2}| & > & |c_0| \\ & \vdots & \\ |q_2| & > & |q_0| \end{array}}$

Tabella

Tabella di Jury

	z^0	z^1	z^2		$\dots$	z^{n-1}	z^n
—	—	—	—	—	—	—	—
1	a_n	a_{n-1}	$\dots$		a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	$\dots$		a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	$\dots$		b_2	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2		$\dots$	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	$\dots$	c_1	c_0			
6	c_0	c_1	$\dots$	c_{n-2}			
$\vdots$							
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	p_0			
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3			
$2n-3$	q_2	q_1	q_0				

Coefficienti di Jury

$K = n - 1$ $\begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix}$

$K = n - 2$ $\begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix}$

$n - \cancel{n} + 2 - 1$

$n - 2 + 1$

$$\boxed{b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-k-1} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

$K = 0$ $\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-k-2} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-2$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \qquad k = 0, 1, 2$$

Mapping $s \to z$ e risposta armonica

LT Cap.3 – Cap.4

Stabilità dei sistemi a tempo discreto

LT Cap.5

Thanks for sharing your thoughts

To The TOP