L12: Sottospazi affini (19)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Introduzione
- Le rette del piano e dello spazio
- I piani dello spazio
- Sottospazi affini
- L'insieme delle soluzioni di un sistema

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

Nello spazio vettoriale dei vettori del piano o dello spazio applicati in un punto *O*:

• Le <u>rette passanti per *O*</u> possono essere viste come sottospazi vettoriali di dimensione 1.

• I <u>piani passanti per *O*</u> possono essere visti come sottospazi vettoriali di dimensione 2.

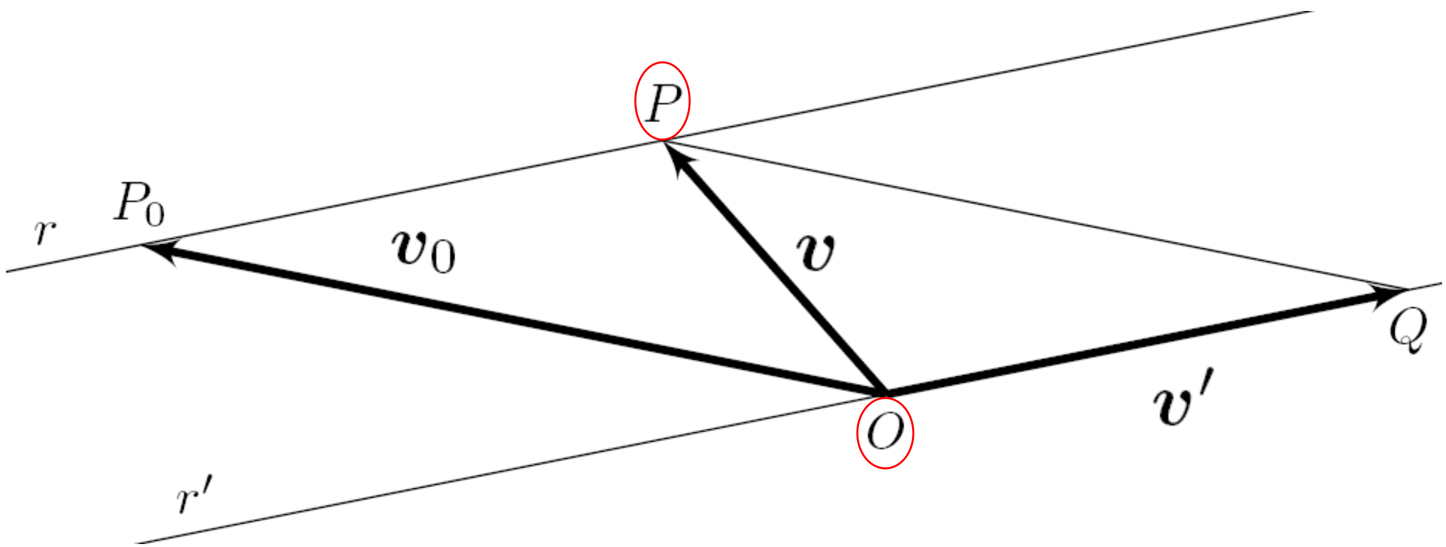
Le rette del piano o dello spazio e i piani dello spazio (<u>non necessariamente passanti per *O*</u>) hanno una struttura algebrica più generale dei sottospazi vettoriali, chiamata **sottospazio affine**.

L'insieme delle soluzioni di un <u>sistema</u> (anche non omogeneo) <u>di equazioni lineari</u>, quando non è vuoto, è un sottospazio affine.

Le rette del piano e dello spazio

<u>Teorema</u>: Sia r una retta e sia P_0 un suo punto.
Sia r' la retta parallela a r passante per il punto O.
Allora $P \in r$ se e solo se esiste $Q \in r'$ tale che: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ}$.

Equivalentemente: Sia E il seguente sottospazio vettoriale di $V^2(O)$ oppure di $V^3(O)$ di dimensione 1: $E := \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in r'\}$.
$P \in r$ se e solo se il vettore $v := \overrightarrow{OP}$ appartiene a $\{v_0 + v' \mid v' \in E\}$.

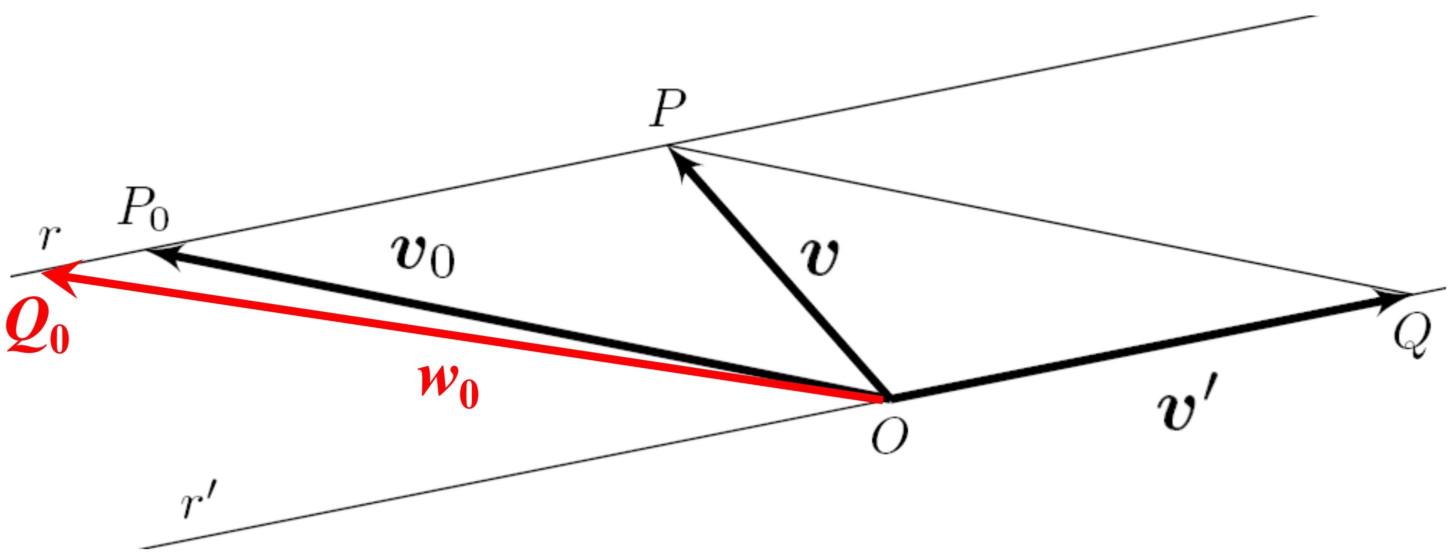


Le rette del piano e dello spazio

Osservazione 1:

Nel teorema precedente abbiamo scelto un punto P_0 sulla retta r : se scegliamo un differente punto Q_0, posto $w_0 := \overrightarrow{OQ_0}$ abbiamo che $P \in r$ se e solo se il vettore $v := \overrightarrow{OP}$ appartiene a $\{w_0 + v' \mid v' \in E\}$.

Segue gli insiemi $\{v_0 + v' \mid v' \in E\}$ e $\{w_0 + v' \mid v' \in E\}$ coincidono.



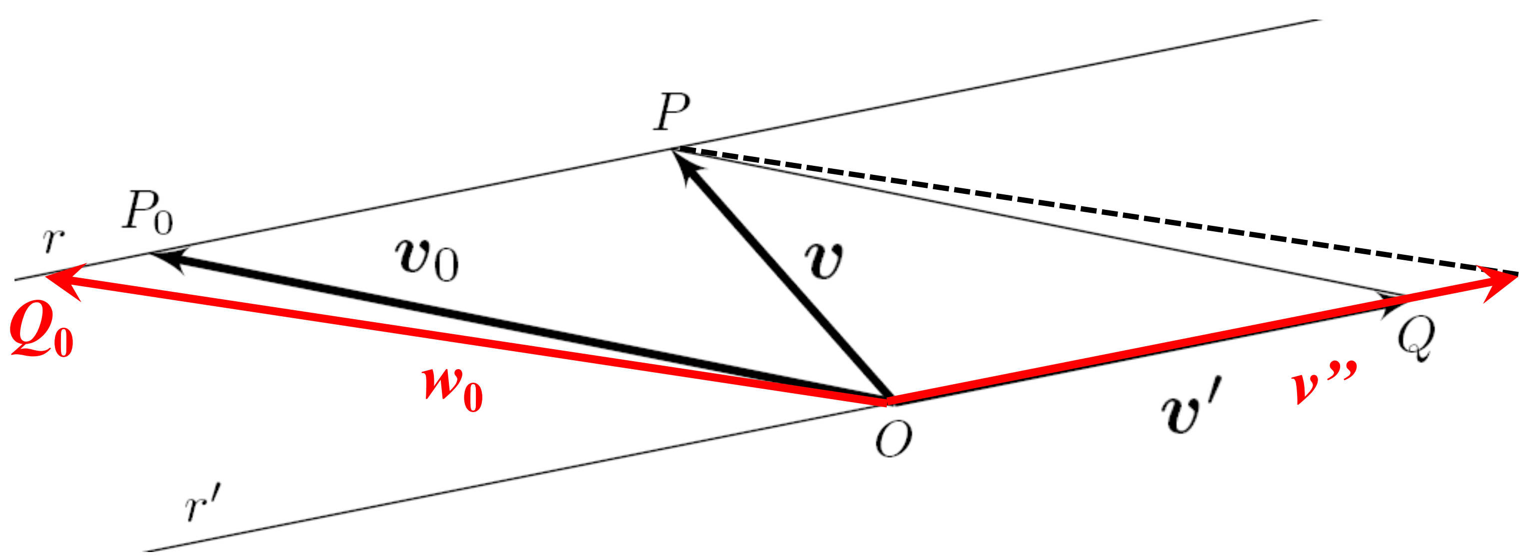
marcella.sama@uniroma3.it

Le rette del piano e dello spazio

Osservazione 2:

L'uguaglianza tra gli insiemi $\{v_0 + v' \mid v' \in E\}$ e $\{w_0 + v' \mid v' \in E\}$ non significa che $v_0 + v' = w_0 + v'$ per $v' \in E$, altrimenti $v_0 = w_0$.

Significa invece che dato un qualunque vettore $v_0 + v'$ con $v' \in E$ esiste un vettore $v'' \in E$ tale che $\boldsymbol{v_0 + v' = w_0 + v''}$.

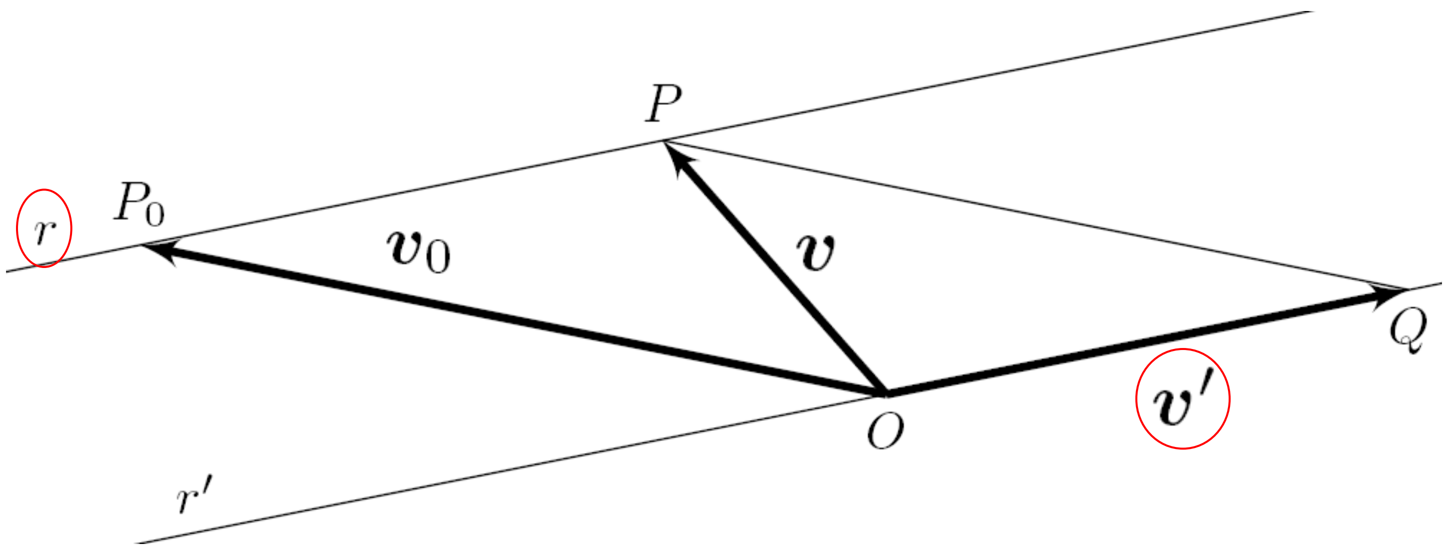


Le rette del piano e dello spazio

Osservazione 2:

L'uguaglianza tra gli insiemi $\{v_0 + v' \mid v' \in E\}$ e $\{w_0 + v' \mid v' \in E\}$ non significa che $v_0 + v' = w_0 + v'$ per $v' \in E$, altrimenti $v_0 = w_0$. Significa invece che dato un qualunque vettore $v_0 + v'$ con $v' \in E$ esiste un vettore $v'' \in E$ tale che $\boldsymbol{v_0 + v' = w_0 + v''}$.

v' e r si dicono **paralleli** se $Q \in r'$ parallela a r e passante per O.



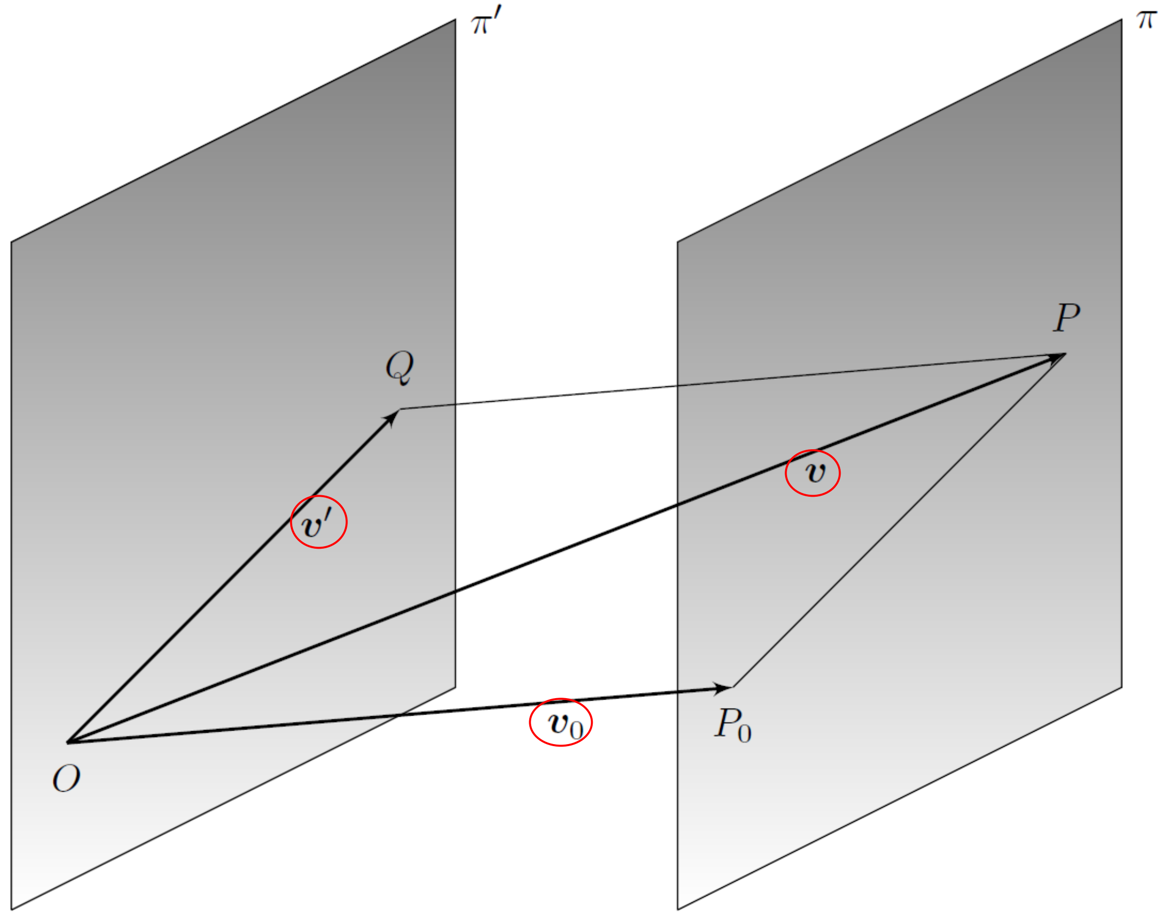
I piani dello spazio

<u>Teorema</u>: Sia π un piano e sia P_0 un suo punto.

Sia π' il piano parallelo a π passante per O.

Allora $P \in \pi$ se e solo se esiste $Q \in \pi$' tale che: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_0 + \overrightarrow{OQ}$.

Equivalentemente:
Sia E il sottospazio vettoriale di $V^3(O)$ di dimensione 2:
$E := \{\overrightarrow{OQ} \mid Q \in \pi'\}$.
$P \in \pi$ se e solo se $v := \overrightarrow{OP}$ appartiene a $\{v_0 + v' \mid v' \in E\}$.



Sottospazi Affini

Sottospazi affini

<u>Definizione</u>: In uno spazio vettoriale V siano dati un vettore v_0 e un sottospazio vettoriale E. L'insieme $v_0 + E := \{v_0 + v' \mid v' \in E\}$ viene chiamato **sottospazio affine** passante per v_0 e parallelo a E. Per definizione: $dim\ (v_0 + E\ ) = dim\ (E\ )$.

<u>Esempio</u>: Dato lo spazio vettoriale $M(2, 2, R)$, si ha: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Mostrare i vettori appartenenti al sottospazio affine $A + S\,(2, R)$.
2. Verificare che $A + S\,(2, R)$ <u>non è un sottospazio vettoriale</u>.

$$\mathrm{S}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{O \notin A + \mathrm{S}(2, \mathbb{R})}$$

$$A + \mathrm{S}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + t_1 & 2 + t_2 \\ 3 + t_2 & 4 + t_3 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$A + S\,(2, R)$ <u>non</u> è quindi un sottospazio vettoriale!

Sottospazi affini

Teorema: Sia $v + E$ un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V.

Sia w un vettore di V . Possono sussistere due casi:

1. se $w \in v + E$ allora $v + E = w + E$;
2. se $w \notin v + E$ allora l'intersezione di $v + E$ e $w + E$ è vuota.

Dimostrazione: 1. Supponiamo che $w \in v + E$.

Allora $w = v + v'$ per qualche $v' \in E$.

Mostriamo ora che $v + E \supseteq w + E$.

Un vettore di $w + E$ si può scrivere come $w + u$ con $u \in E$.

Ma allora $w + u = (v + v') + u = v + (v' + u) \in v + E$.

Abbiamo così mostrato che $v + E \supseteq w + E$.

Per mostrare $v + E \subseteq w + E$ si procede in maniera analoga.

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi affini

<u>Teorema</u>: Sia $v + E$ un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V.

Sia w un vettore di V . Possono sussistere due casi:

1. se $w \in v + E$ allora $v + E = w + E$;
2. se $w \notin v + E$ allora l'intersezione di $v + E$ e $w + E$ è vuota.

<u>Dimostrazione</u>: 2. Supponiamo ora che $w \notin v + E$.

Procediamo per assurdo:

Se esistesse un u appartenente all'intersezione di $v + E$ e $w + E$,

avremmo che $v + E = u + E$ e $w + E = u + E$.

Ma allora $w + E = v + E$.

Poiché $w + 0 \in w + E$ (in quanto 0 è un vettore di E)

avremmo che $w \in v + E$. Segue l'assurdo.

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi affini

Teorema: Sia $v + E$ un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V.

Sia w un vettore di V. Possono sussistere due casi:

1. se $w \in v + E$ allora $v + E = w + E$;
2. se $w \notin v + E$ allora l'intersezione di $v + E$ e $w + E$ è vuota.

Esempio 1: Dato $M(2, 2, R)$, si ha: $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Verificare che il sottospazio affine $C + S(2, R)$ coincide con $S(2, R)$.

$$C + \mathrm{S}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + t_1 & 2 + t_2 \\ 2 + t_2 & 4 + t_3 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Ponendo $t_1' := 1 + t_1$, $t_2' := 2 + t_2$, $t_3' := 4 + t_3$, otteniamo:

$$C + \mathrm{S}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t_1' & t_2' \\ t_2' & t_3' \end{pmatrix} \mid t_i' \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{S}(2, \mathbb{R})$$

Sottospazi affini

<u>Teorema</u>: Sia $v + E$ un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V.
Sia w un vettore di V . Possono sussistere due casi:

1. se $w \in v + E$ allora $v + E = w + E$;
2. se $w \notin v + E$ allora l'intersezione di $v + E$ e $w + E$ è vuota.

<u>Esempio 2</u>:

Dato un sottospazio affine $v_0 + E$ di uno spazio V dimostrare che:

A. se $v_0 \in E$ allora $v_0 + E = E$ è un sottospazio vettoriale;
B. se $v_0 \notin$ E allora $v_0 + E$ <u>non</u> è un sottospazio vettoriale.

A. Se $v_0 \in E$ allora $v_0 + E = 0 + E = E$.
   Quindi il sottospazio affine $0 + E$ è un sottospazio vettoriale.
B. Se $v_0 \notin E$ allora $v_0 + E$ e $0 + E = E$ hanno intersezione vuota.
   Pertanto, $v_0 + E$ <u>non</u> è un sottospazio vettoriale.

Soluzioni di un sistema come spazi

L'insieme delle soluzioni di un sistema

<u>Esempio</u>: Prendiamo il seguente sistema risolubile:

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 2h - k \\ x_2 = 2 - h \\ x_3 = h \\ x_4 = k \end{cases}$$

al variare di *h* e *k* in *R*

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 + 2h - k \\ 2 - h \\ h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{h \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E} \mid h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

E è un sottospazio vettoriale di *M*(4, 1, *R*) di dimensione 2.

Segue Sol(*S*) è un sottospazio affine.

In particolare, se $h = k = 0$ abbiamo la soluzione (–1, 2, 0, 0).

L'insieme delle soluzioni di un sistema

<u>Procedimento generale</u>: Dato un sistema lineare qualsiasi $S : AX = B$ di p equazioni nelle q incognite $x_1, x_2, \ldots, x_q$.

Se $rk\ A = r$, sappiamo che $q - r$ incognite fungeranno da parametri.

$$\begin{pmatrix} d_1 + c_{11}h_1 + c_{12}h_2 + c_{1,q-r}h_{q-r} \\ d_2 + c_{21}h_1 + c_{22}h_2 + c_{2,q-r}h_{q-r} \\ \vdots \\ d_r + c_{r1}h_1 + c_{r2}h_2 + c_{r,q-r}h_{q-r} \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{q-r} \end{pmatrix}$$

al variare dei parametri reali $h_1, h_2, \ldots, h_{q-r}$.

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{+ h_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + h_{q-r} \begin{pmatrix} c_{1,q-r} \\ c_{2,q-r} \\ \vdots \\ c_{r,q-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sottospazio vettoriale } E}$$

L'insieme delle soluzioni di un sistema

Definizione: Dato un sistema lineare qualsiasi $S : AX = B$, chiamiamo **sistema omogeneo associato** a S il sistema SO: $AX = 0$.

In altri termini, il sistema SO si ottiene da S semplicemente ponendo $= 0$ tutti i termini noti delle equazioni che formano S.

Esempio:

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases} \qquad SO: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

L’insieme delle soluzioni di un sistema

<u>Teorema</u>: Sia $S : AX = B$ un sistema lineare risolubile.

Sia X_0 una soluzione particolare di S.

Sia SO: $AX = 0$ il sistema omogeneo associato a S.

$\mathrm{Sol}(S) = X_0 + \mathrm{Sol}(SO)$ è un <u>sottospazio affine</u> parallelo a $\mathrm{Sol}(SO)$.

<u>Dimostrazione</u>: Mostriamo che $X_0 + \mathrm{Sol}(SO) \subseteq \mathrm{Sol}(S)$.

Un $X_0 + \mathrm{Sol}(SO)$ si può scrivere $X_0 + X'$ con X' soluzione di SO.

$X_0 + X'$ è soluzione di S se e solo se $A(X_0 + X') = B$.

Poiché X_0 è una soluzione di S abbiamo che $AX_0 = B$.

Poiché X' è una soluzione di SO abbiamo che $AX' = 0$.

Segue: $A(X_0 + X') = AX_0 + AX' = B + 0 = B$.

Abbiamo quindi dimostrato che $X_0 + X'$ appartiene a $\mathrm{Sol}(S)$.

L'insieme delle soluzioni di un sistema

Teorema: Sia $S : AX = B$ un sistema lineare risolubile.

Sia X_0 una soluzione particolare di S.

Sia SO: $AX = 0$ il sistema omogeneo associato a S.

$\mathrm{Sol}(S) = X_0 + \mathrm{Sol}(SO)$ è un sottospazio affine parallelo a $\mathrm{Sol}(SO)$.

Dimostrazione: Mostriamo che $\mathrm{Sol}(S) \subseteq X_0 + \mathrm{Sol}(SO)$.

Sia allora X_1 un elemento di $\mathrm{Sol}(S)$,

dobbiamo mostrare che $X_1 = X_0 + X'$ per qualche X' di $\mathrm{Sol}(SO)$.

Se $X_1 = X_0 + X'$ allora si ha $X' = X_1 - X_0$.

Quindi dobbiamo mostrare che $AX' = A(X_1 - X_0) = 0$.

Poiché X_1 e X_0 sono soluzioni di S abbiamo che $AX_1 = B$ e $AX_0 = B$.

Segue: $AX' = A(X_1 - X_0) = AX_1 - AX_0 = B - B = 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che X' appartiene a $\mathrm{Sol}(SO)$.

L'insieme delle soluzioni di un sistema

Proposizione: Sia S un sistema lineare risolubile di p equazioni nelle q incognite $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Se la matrice del sistema ha rango r allora il sottospazio affine Sol(S) ha dimensione $q - r$.

Esempio 1: L'insieme sol(S) è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$?

$$S: \begin{cases} 2x + \ \ y + z - w \qquad = 2 \\ \qquad\quad y \qquad + w + t = 3 \\ 2x + 2y + z \qquad\quad + t = 5 \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo verificare che $S \neq \varnothing$ ovvero S è risolubile.

$rk\, A = 2$. Anche la matrice completa del sistema ha rango 2.

Segue il sistema S è risolubile, quindi è un sottospazio affine.

Il sistema S ha $q = 5$ e $r = 2$ segue dim Sol(S) $= 5 - 2 = 3$.

L'insieme delle soluzioni di un sistema

Proposizione: Sia S un sistema lineare risolubile di p equazioni nelle q incognite $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Se la matrice del sistema ha rango r allora il sottospazio affine Sol(S) ha dimensione $q - r$.

Esempio 2: L'insieme sol(S) è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^5$?

$$S: \begin{cases} 2x + y + z - w = 2 \\ y + w + t = 3 \\ 2x + 2y + z + t = \boxed{4} \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo verificare che $S \neq \emptyset$ ovvero S è risolubile.

$rk\, A = 2$. Stavolta la matrice completa del sistema ha rango 3.

Segue il sistema S non è risolubile, e non è un sottospazio affine.

L'insieme delle soluzioni di un sistema

<u>Esercizio</u>: Scrivere le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 4y + z + w = 3 \\ 5x + 6y + 3z + 2w = 5 \end{cases}$$

come sottospazio affine $v_0 + E$ di R^4, determinando esplicitamente un vettore v_0 e una base per E.

Risolvendo il sistema si ha:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t - u \\ y = 2t + \dfrac{1}{2}u \\ z = t \\ w = u \end{cases}$$

al variare di t e u in R

La generica soluzione del sistema può allora essere scritta così:

$$\underbrace{(1,0,0,0)}_{v_0} + \underbrace{t(-3,2,1,0) + u\left(-1, \frac{1}{2}, 0, 1\right)}_{E}$$