# L2: Determinante (5)

Argomenti lezione:

- Definizione
- Proprietà

Studiamo il determinante di una matrice quadrata e le sue proprietà


sama@ing.uniroma3.it

# Definizione determinante

L'equazione lineare in un'incognita

$$ax = b$$

ha un'unica soluzione se e solo se $a \neq 0$

$$AX = B$$

$$A := (a) \quad X := (x)$$

$$B := (b)$$

$$\boxed{\det A := a} \quad \boxed{\neq 0}$$

Il sistema di due equazioni lineari

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ha un'unica soluzione se e solo se $ad - bc \neq 0$.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Il numero reale $ad - bc$ è chiamato ***determinante***

$$\boxed{\det A := ad - bc} \quad \boxed{\neq 0}$$

# Definizione determinante

Obiettivo: Definire e studiare le proprietà del determinante nel caso di **sistemi di *n* equazioni in *n* incognite**, aventi quindi le matrici dei coefficienti quadrate di ordine $n$.

Tali sistemi hanno un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti $A$ è diverso da 0

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Det $A$ è :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$$

# Definizione determinante

Data una matrice quadrata di ordine $n > 1$ e un suo elemento $a_{ij}$, definiamo **matrice aggiunta** di $a_{ij}$ la matrice di ordine $n > 1$ ottenuta da $A$ cancellando la $i$-esima riga e la $j$-esima colonna. Indichiamo questa matrice con il simbolo $\boldsymbol{A_{ij}}$

<u>Esempio</u>: $$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

…

# Definizione determinante

Sia *A* una matrice quadrata di ordine *n*, chiamiamo **determinante** di *A* il numero *det A* calcolato come segue:

Caso $n = 1$.

Data $A := (a_{11})$, poniamo $\det A := a_{11}$

Caso $n = 2$. $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\boxed{\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

Caso $n = 3$.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}}$$

# Definizione determinante

Sia $A$ una matrice quadrata di ordine $n$, è detto **determinante di $A$** il numero *det A* calcolato come segue:

Caso $n = 3$.

$$\boxed{\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}}$$

<u>Esempio</u>:

$$det\,A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (4 \cdot 7 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (0 \cdot 7 - 6 \cdot 3) + 5 \cdot (0 \cdot 8 - 4 \cdot 3) = -44$$

# Definizione determinante

Sia *A* una matrice quadrata di ordine *n*, chiamiamo **determinante** di *A* il numero *det A* calcolato come segue:

Se $n = 1$ e $A = (a_{11})$ definiamo:

$$\det A := a_{11}.$$

Se $n > 1$ e $A = (a_{ij})$ definiamo:

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

**Definizione per <u>induzione</u> o <u>ricorrenza</u>**

# Proprietà determinante

Formula di sviluppo del determinante secondo la *i*-esima riga:

**Teorema** *Sia* $A := (a_{ij})$ *una matrice quadrata di ordine* $n$. *Per ogni intero* $i$ *compreso tra* $1$ *e* $n$ *si ha:*

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

Esempio (1):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: **scegliere le righe con il maggior numero di zeri**

$$\det A = -0 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 4 \cdot (1 \cdot 7 - 5 \cdot 3) - 6 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 3) = -44$$

# Proprietà determinante

Formula di sviluppo del determinante secondo la *i*-esima riga:

**Teorema** *Sia $A := (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine $n$. Per ogni intero $i$ compreso tra 1 e $n$ si ha:*

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}.$$

Esempio (2):

Suggerimento: **scegliere le righe con il maggior numero di zeri**

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{4} \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = 40.$$

# Proprietà determinante

Formula di <u>sviluppo del determinante secondo la *j*-esima colonna</u>:

**Teorema** *Sia $A := (a_{ij})$ una matrice quadrata di ordine $n$. Per ogni intero $j$ compreso tra 1 e $n$ si ha:*

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}.$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -0 \det A_{12} + 4 \det A_{22} - 0 \det A_{32} = 4(9-10) = -4$$

# Proprietà determinante

Formula di <u>sviluppo del determinante secondo la *j*-esima colonna</u>:

**Teorema** *Sia* $A := (a_{ij})$ *una matrice quadrata di ordine* $n$*. Per ogni intero* $j$ *compreso tra* $1$ *e* $n$ *si ha:*

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj} .$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -0 \det A_{12} + 4 \det A_{22} - 0 \det A_{32} = 4(9-10) = -4$$

# Proprietà determinante

Sia $A$ una matrice quadrata.

1. Se una riga o una colonna di $A$ ha tutti i suoi elementi uguali a 0, allora $det\ A = 0$.

2. Se $A$ è una matrice triangolare superiore o inferiore allora $det\ A$ è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale di $A$.

<u>Dimostrazione</u> (punto 2):

Se prendiamo una matrice triangolare superiore, tutti gli elementi della prima colonna di $A$ tranne eventualmente $a_{11}$ sono nulli.

$$det\ A = a_{11}\ det\ A_{11}$$

Il minore $A_{11}$ è anch'esso una matrice triangolare superiore.

Proseguendo in tal modo si ha:

$$det\ A = a_{11}\ a_{22}\ \dots\ a_{nn}$$

# Proprietà determinante

Sia $A$ una matrice quadrata.

1. Se una riga o una colonna di $A$ ha tutti i suoi elementi uguali a 0, allora $det\ A = 0$.

2. Se $A$ è una matrice triangolare superiore o inferiore allora $det\ A$ è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale di $A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 40.$$

# Proprietà determinante

*Data una matrice quadrata $A$, si ha:*

$$\det A = \det {}^tA.$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad B := {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 7 = -27$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = -27$$

# Proprietà determinante

Una matrice quadrata con due righe (o due colonne) uguali ha determinante nullo.

Caso $n = 2$: Dimostrare che una **matrice quadrata $A$ di ordine 2 con le righe uguali** ha determinante nullo.

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$\det A = ab - ba = 0$$

# Proprietà determinante

Una matrice quadrata con due righe (o due colonne) uguali ha determinante nullo.

Caso $n = 3$: Dimostrare che una **matrice quadrata** $\boldsymbol{A}$ **di ordine 3 con 2 righe uguali** ha determinante nullo.

1. La matrice $A$ ha due righe uguali fra loro pertanto le matrici aggiunte degli elementi della riga rimanente sono matrici di ordine 2 aventi 2 righe uguali.
2. Le matrici aggiunte hanno determinante nullo (vedi $n = 2$) .
3. Sviluppando il determinante di $A$ rispetto alla riga rimanente troviamo quindi che il determinante è nullo.

# Proprietà determinante

Una matrice quadrata con due righe (o due colonne) uguali ha determinante nullo.

<u>Caso $n = 2$</u>: Dimostrare che una **matrice quadrata** ***A*** **di ordine 2 con le righe uguali** ha determinante nullo.
<u>Caso $n = 3$</u>: Dimostrare che una **matrice quadrata** ***A*** **di ordine 3 con 2 righe uguali** ha determinante nullo.

… Ripetendo il ragionamento per **matrici quadrate** ***A*** **di ordine maggiore di** ***n*** troviamo quindi che ***det A*** **= 0**.

# Proprietà determinante

Una matrice quadrata con due righe (**o due colonne**) uguali ha determinante nullo.

<ins>Caso $n = 2$</ins>: Dimostrare che una matrice quadrata $A$ di ordine 2 con le righe uguali ha determinante nullo.

<ins>Caso $n = 3$</ins>: Dimostrare che una matrice quadrata $A$ di ordine 3 con 2 righe uguali ha determinante nullo.

… Ripetendo il ragionamento per matrici quadrate $A$ di ordine maggiore di $n$ troviamo quindi che $det\ A = 0$.

Se invece $A$ ha **due colonne uguali** basta osservare che in tal caso la trasposta di $A$ ha due righe uguali e, pertanto, anche il $det\ {}^tA$ è nullo. Inoltre sappiamo che $det\ A = det\ {}^tA$.

# Proprietà determinante

La dimostrazione vista si chiama per **induzione** ovvero:

Passo iniziale: si dimostra direttamente il caso iniziale della proprietà, ovvero il caso $n = 2$

Passo induttivo: si suppone che la proprietà sia vera per gli interi minori di $n$ e si utilizza questa supposizione per dimostrare la proprietà per l'intero $n$.

Per la matrice quadrata con due righe/colonne uguali abbiamo:

• supposto di aver dimostrato che matrici di ordine minore di $n$ con due righe/colonne uguali abbiano determinante nullo;

• usato questa proprietà per provare che matrici di ordine $n$ con due righe/colonne uguali hanno determinante nullo.

# Proprietà determinante

Siano $A$ e $B$ due matrici quadrate di ordine $n$ che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Allora $det\ A = -\ det\ B$ (un'analoga proprietà vale per lo scambio di colonne).

<u>Caso $n = 2$</u>: $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

$$\det A = ad - bc \qquad \det B = cb - da$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\det A = -\det B$$

# Proprietà determinante

Siano $A$ e $B$ due matrici quadrate di ordine $n$ che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe. Allora $det\ A = -\ det\ B$.

**Dim.**: Anche in questo caso la dimostrazione è per induzione.

Passo induttivo: Sia allora $n > 2$ e supponiamo che le righe $i_1$-esima e $i_2$-esima di $A$ e $B$ siano scambiate fra loro.

Sviluppiamo il determinante sia di $A$ che di $B$ rispetto a una qualsiasi riga diversa da $i_1$-esima e $i_2$-esima:

- gli elementi di questa riga sono uguali fra loro nelle due matrici;
- le matrici aggiunte di questi elementi sono matrici quadrate che si ottengono scambiando fra loro due righe;
- per ipotesi di induzione si ha : $det\ A = -\ det\ B$.

# Proprietà determinante

Teorema (di Binet)

*Date due matrici quadrate dello stesso ordine A e B*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \det A \det B = -64$$

–2 32


sama@ing.uniroma3.it

# Proprietà determinante

$A \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$ in generale, si ha:

$B \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R})$

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -3 \qquad \det B = -1$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B) = 0$$

# Proprietà determinante

Data una matrice *A* di ordine 2 e un numero reale *k* si ha:

$$\det(kA) = k^2 \det A$$

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

$$\det(kA) = (ka)(kd) - (kb)(kc) =$$
$$= k^2(ad - bc) = k^2 \det A$$

# Proprietà determinante

Date una matrice $A$ e una matrice $B$ così fatte:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det B = (-1)^{i+1} ka_{i1} \det B_{i1} + (-1)^{i+2} ka_{i2} \det B_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} ka_{in} \det B_{in}$$

Osservando le due matrici, notiamo che le matrici aggiunte degli elementi della $i$-esima riga di $B$ sono uguali alle matrici aggiunte degli elementi della $i$-esima riga di $A$ ($A_{i1} = B_{i1}$, $A_{i2} = B_{i2}$, etc.)

Segue che $det\ B = k\ det\ A$

# Proprietà determinante

*Sia $A$ una matrice quadrata di ordine $n$ e $k$ un numero reale*

$$\det(kA) = k^n \det A.$$

<u>Dimostrazione</u>:

- La matrice $k\,A$ si può ottenere dalla matrice $A$ moltiplicando la prima riga di $A$ per $k$, poi moltiplicando la seconda riga della matrice così ottenuta per $k$ e così via per le $n$ righe di $A$.
- Le matrici che via via otteniamo hanno determinante uguale al determinante della matrice precedente moltiplicato per $k$.
- Dunque applicando $n$ volte il procedimento otteniamo:

$$k^n \det A$$

# Proprietà determinante

Se una matrice quadrata *A* ha una riga che è multipla di un'altra, allora *det A* = 0. Un'analoga proprietà vale per le colonne.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 8 & 4 & 0 \\ 12 & -24 & 13 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & -12 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che la quarta riga di *A* è –3/2 la seconda riga (–3/2 volte la seconda riga equivale alla quarta riga). Dalla proposizione enunciata sopra abbiamo *det A* = 0.

# Proprietà determinante

Esercizio di base:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che **non** esiste alcuna matrice quadrata $X$ di ordine 3 tale che $AX = I$.

$$\det A = 0 \qquad \det I = 1$$

Si dovrebbe avere, per ipotesi, che $det\,(AX) = \det I = 1$.

Ma, applicando il teorema di Binet, otteniamo:

$$\det(AX) = \det A \det X = 0 \det X = 0$$