L6: I vettori geometrici (11)

Argomenti lezione:

- Introduzione
- Vettori del piano
- Addizione di vettori
- Moltiplicare un vettore per uno scalare
- Vettori dello spazio
- Rette e piani per l’origine
- Punto medio

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

Introduciamo il concetto di vettore di un piano.

Definiamo le operazioni di addizione di due vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero reale.

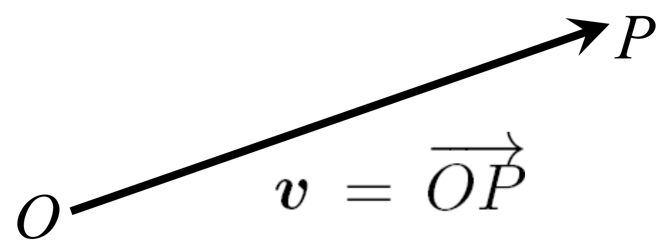
Notiamo che hanno le stesse proprietà delle operazioni di addizione tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per un numero reale.

Estendiamo poi allo spazio le definizioni di vettore e delle loro operazioni e verifichiamo che queste ultime hanno proprietà simili alle proprietà dei vettori del piano.

Vettori del piano

Consideriamo un piano e fissiamo su esso una distanza con unità di misura U_1U_2. Fissiamo poi una volta per tutte un punto O del piano, che chiamiamo **origine**.

Definizioni: Dato comunque un punto P, chiamiamo **vettore applicato** in O di **vertice** P la coppia di punti O e P.
Indichiamo questo vettore con il simbolo $\overrightarrow{OP}$.
Diremo anche che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha come origine il punto O.



Vettori del piano

Consideriamo un piano e fissiamo su esso una distanza con unità di misura U_1U_2. Fissiamo poi una volta per tutte un punto O del piano, che chiamiamo **origine**.

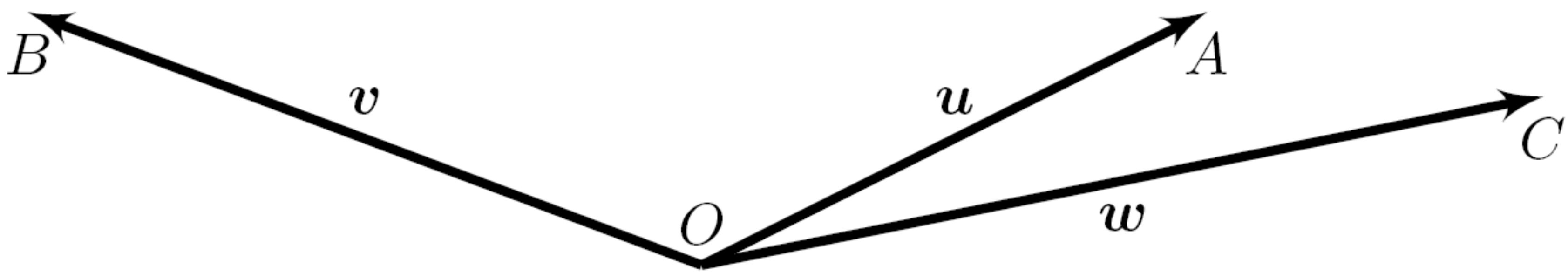
Definizioni: Dato comunque un punto P, chiamiamo **vettore applicato** in O di **vertice** P la coppia di punti O e P.
Indichiamo questo vettore con il simbolo $\overrightarrow{OP}$.
Diremo anche che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha come origine il punto O.

Il simbolo $V^2(O)$ indica l'insieme dei vettori applicati in O.
Il vettore $\overrightarrow{OO}$ viene chiamato vettore nullo e indicato con il simbolo 0. Abbiamo quindi $0 = \overrightarrow{OO}$.

Vettori del piano

<u>Esempio</u>:

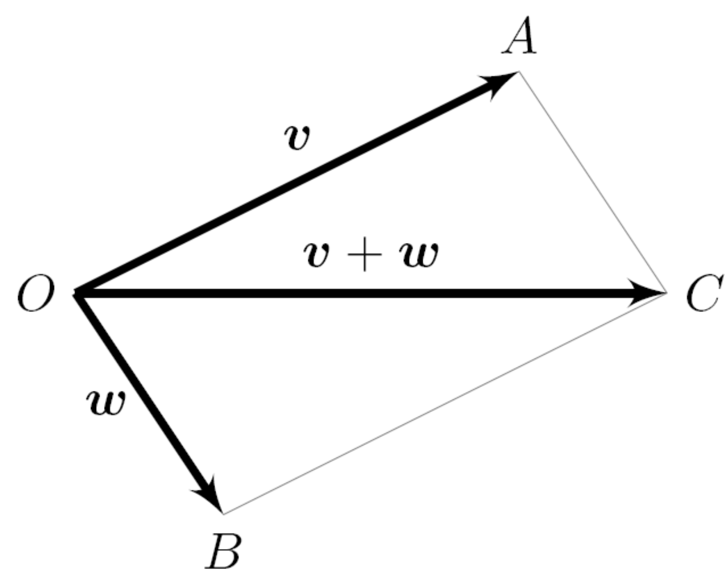
$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{v} = \overrightarrow{OB} \text{ e } \boldsymbol{w} = \overrightarrow{OC}$$



Addizione di vettori

Introduciamo in $V^2(O)$ un'operazione di addizione di vettori: dati due vettori v e w, il **vettore somma** è definito come $v + w$.

Regola del parallelogramma: Dati i vettori $v := \overrightarrow{OA}$ e $w := \overrightarrow{OB}$, poniamo per definizione $v + w := \overrightarrow{OC}$, dove C è l'unico punto del piano tale che $OACB$ sia un parallelogramma.

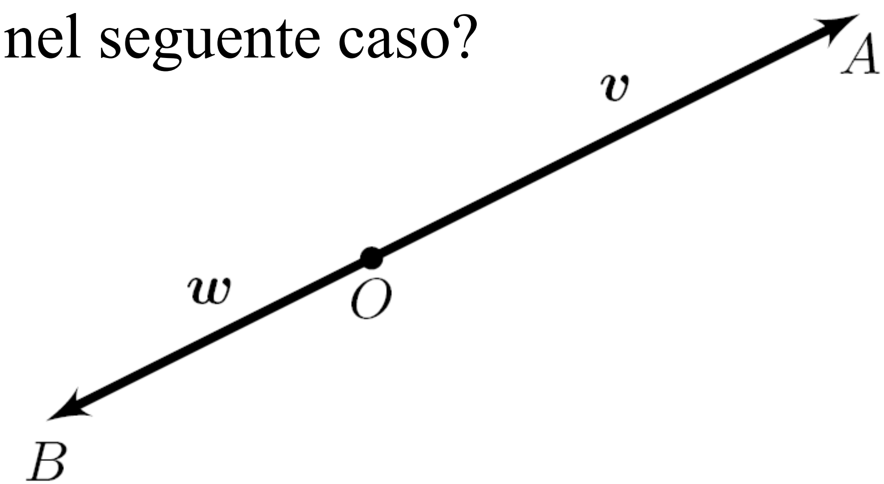


Addizione di vettori

Introduciamo in $V^2(O)$ un'operazione di addizione di vettori: dati due vettori v e w, il **vettore somma** è definito come $v + w$.

Regola del parallelogramma: Dati i vettori $v := \overrightarrow{OA}$ e $w := \overrightarrow{OB}$, poniamo per definizione $v + w := \overrightarrow{OC}$, dove C è l'unico punto del piano tale che $OACB$ sia un parallelogramma.

Come si procede nel seguente caso?



marcella.sama@uniroma3.it

Addizione di vettori

Torniamo sulla definizione di parallelogramma.

A partire da tre punti O, A e B, cerchiamo il punto C

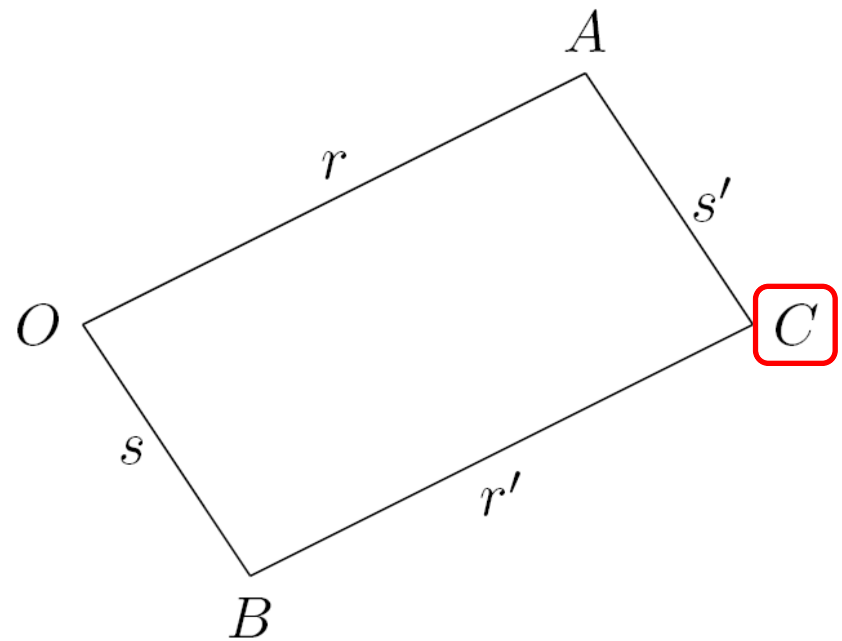
Sia r la retta passante per O e A.

Sia s la retta passante per O e B.

Determiniamo la retta r' passante per B e parallela alla retta r.

Determiniamo la retta s' passante per A e parallela alla retta s.

Determiniamo il punto C come <u>intersezione</u> delle rette r' e s'.



Addizione di vettori

Torniamo sulla definizione di parallelogramma.

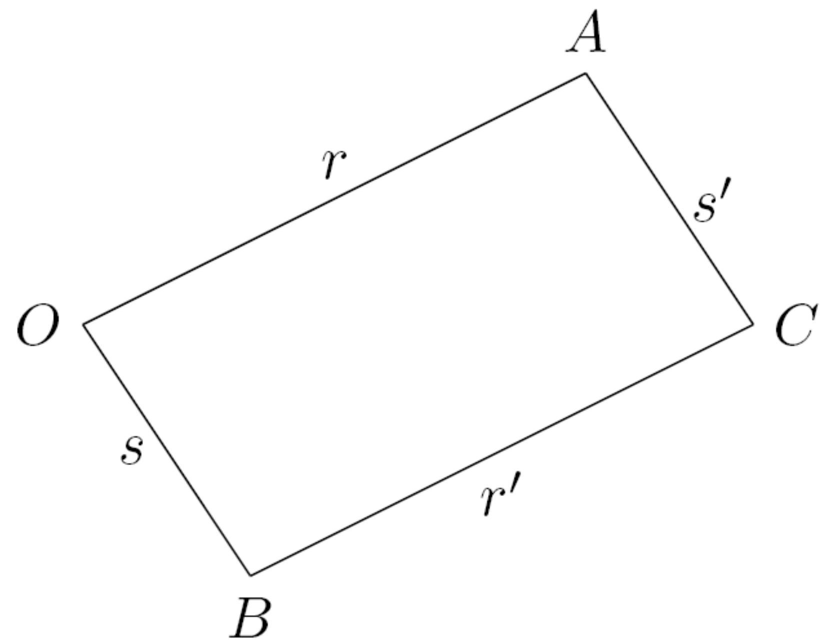
A partire da tre punti *O*, *A* e *B*, cerchiamo il punto *C*

Osservazioni:

Se $O = A$ la retta *r* è indeterminata

Se $O = B$ la retta *s* è indeterminata

Se le rette *r* e *s* sono determinate ($O \neq A$ e $O \neq B$) ma coincidono, allora non possiamo determinare l' intersezione tra le rette *r'* ed *s'*, e quindi il punto *C*.



Addizione di vettori

Torniamo sulla definizione di parallelogramma.

A partire da tre punti O, A e B, cerchiamo il punto C

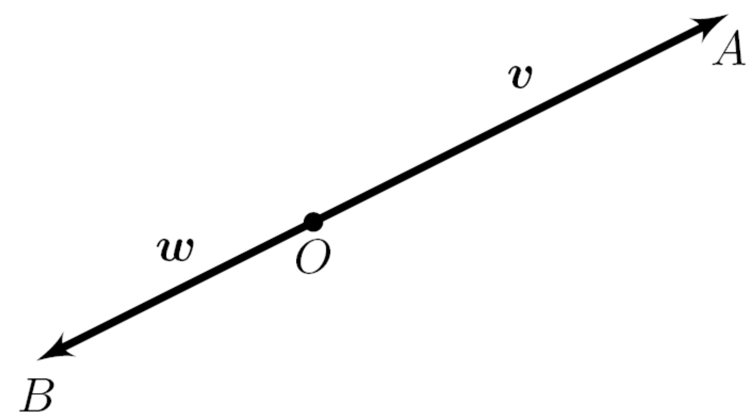
Osservazioni:

Se $O = A$ la retta r è indeterminata

Se $O = B$ la retta s è indeterminata

Se le rette r e s sono determinate ($O \neq A$ e $O \neq B$) ma coincidono, allora non possiamo determinare l' intersezione tra le rette r' ed s', e quindi il punto C.

Ci si trova in questa situazione, quando i punti O, A, e B sono allineati.

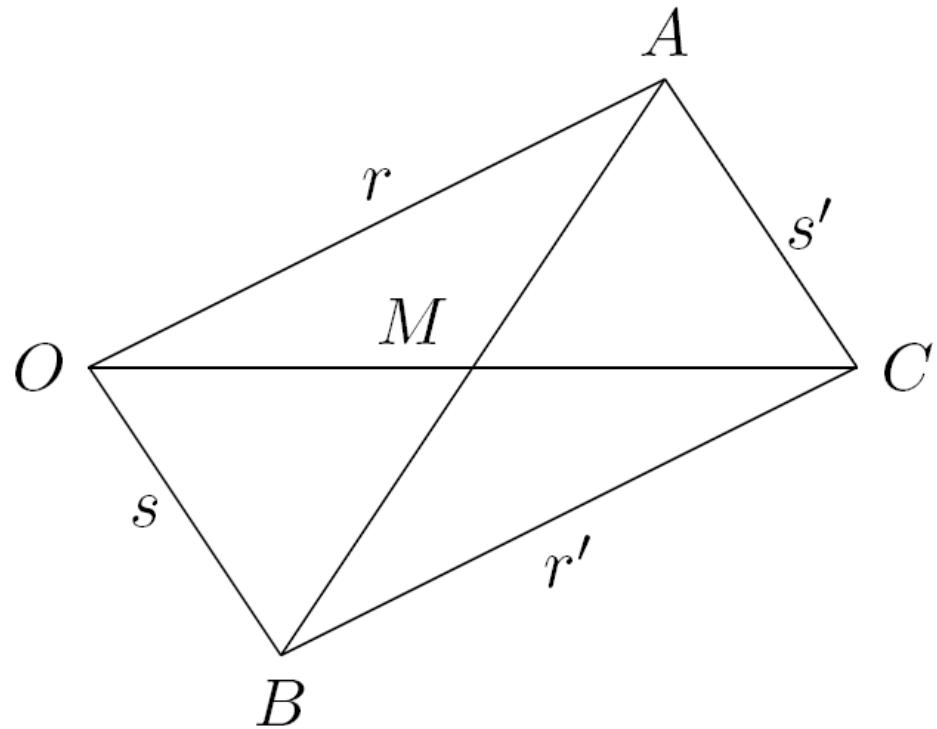


Addizione di vettori

Proprietà del parallelogramma:

1. In un parallelogramma i lati opposti hanno la stessa lunghezza

2. Le diagonali di un parallelogramma si intersecano in un punto *M* che è detto il **punto medio** dei vertici opposti.



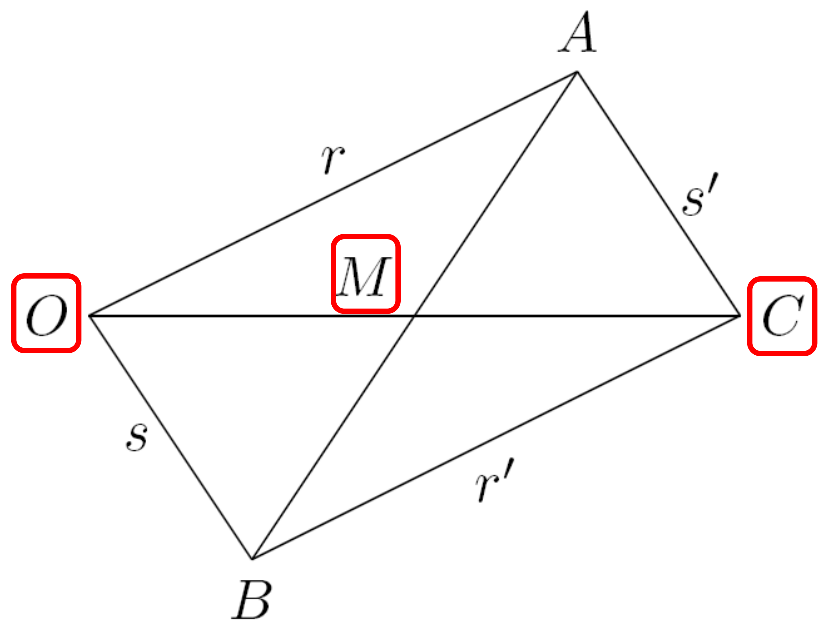
Addizione di vettori

Torniamo ancora sulla definizione di parallelogramma.

A partire da tre punti O, A e B, cerchiamo il punto C

Determiniamo il punto medio M dei punti A e B.

Determiniamo il punto C simmetrico del punto O rispetto al punto medio M.



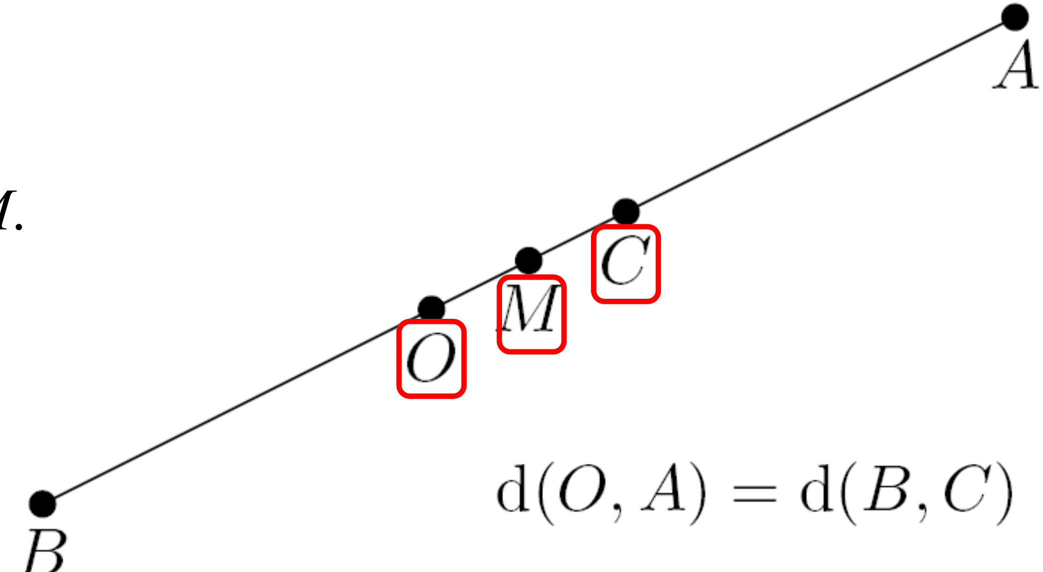
Addizione di vettori

Torniamo ancora sulla definizione di parallelogramma.

A partire da tre punti O, A e B, cerchiamo il punto C

Determiniamo il punto medio M dei punti A e B.
Determiniamo il punto C simmetrico del punto O rispetto al punto medio M.

Il punto C è allineato ai punti O, A e B.



$$\mathrm{d}(O, A) = \mathrm{d}(B, C)$$

$$\mathrm{d}(O, B) = \mathrm{d}(A, C)$$

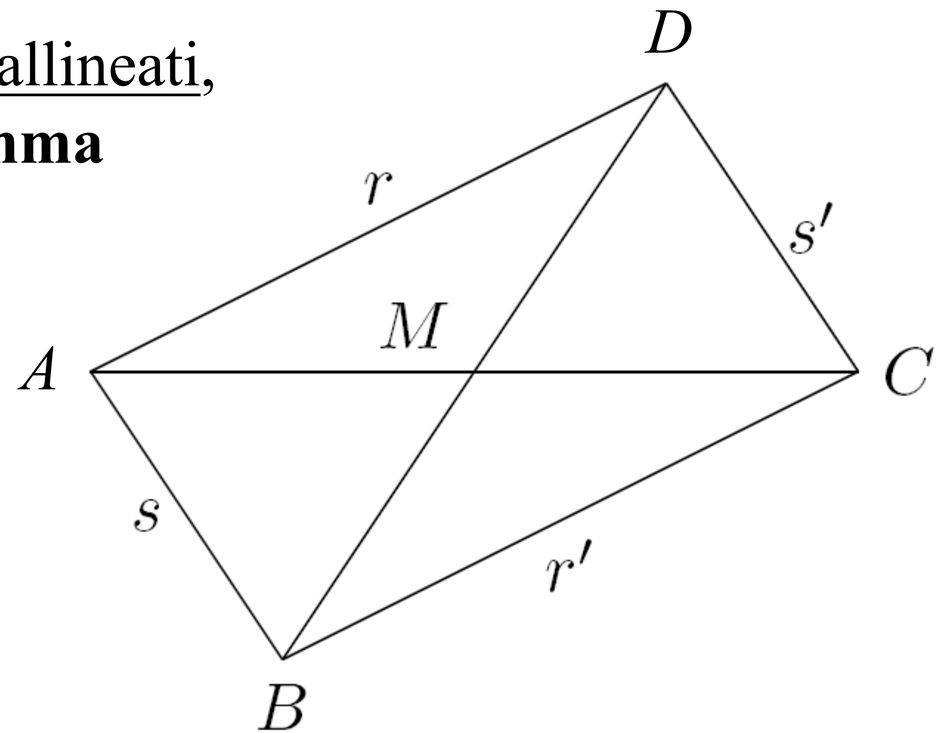
Addizione di vettori

<u>Definizione</u>: Dati quattro punti qualsiasi A, B, C, D, diciamo che essi formano un **parallelogramma** se il punto C è il simmetrico del punto A rispetto al punto M medio di B e D.

Se i punti A, B, D <u>non sono allineati</u>, otteniamo un **parallelogramma** **<u>non</u> degenere**

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(C, D)$$

$$\mathrm{d}(B, C) = \mathrm{d}(D, A)$$



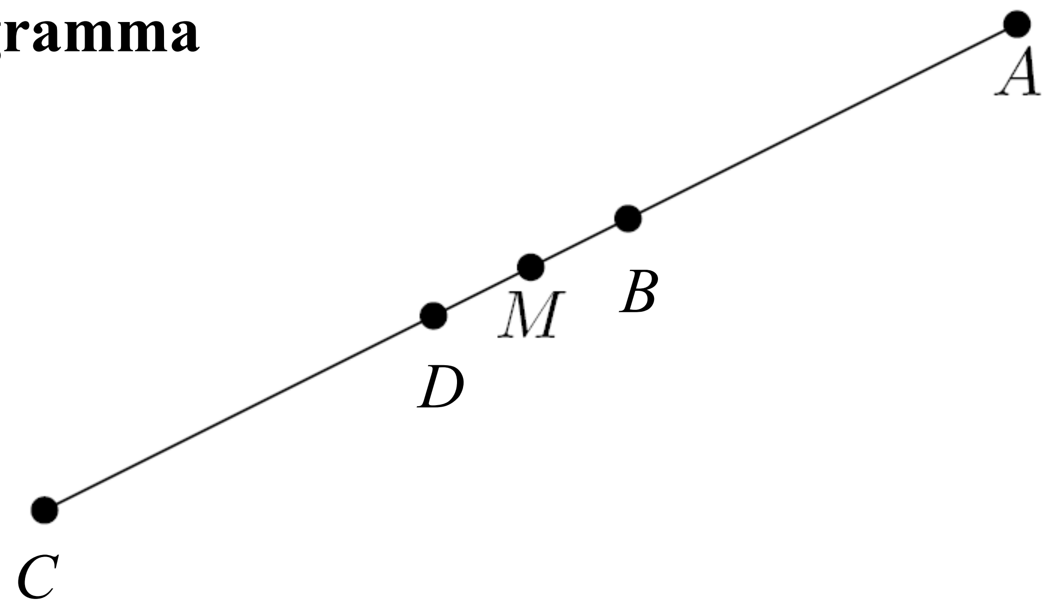
Addizione di vettori

<u>Definizione</u>: Dati quattro punti qualsiasi *A*, *B*, *C*, *D*, diciamo che essi formano un **parallelogramma** se il punto *C* è il simmetrico del punto *A* rispetto al punto *M* medio di *B* e *D*.

Se i punti *A*, *B*, *D* <u>sono allineati</u>, otteniamo un **parallelogramma degenere**

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(C, D)$$

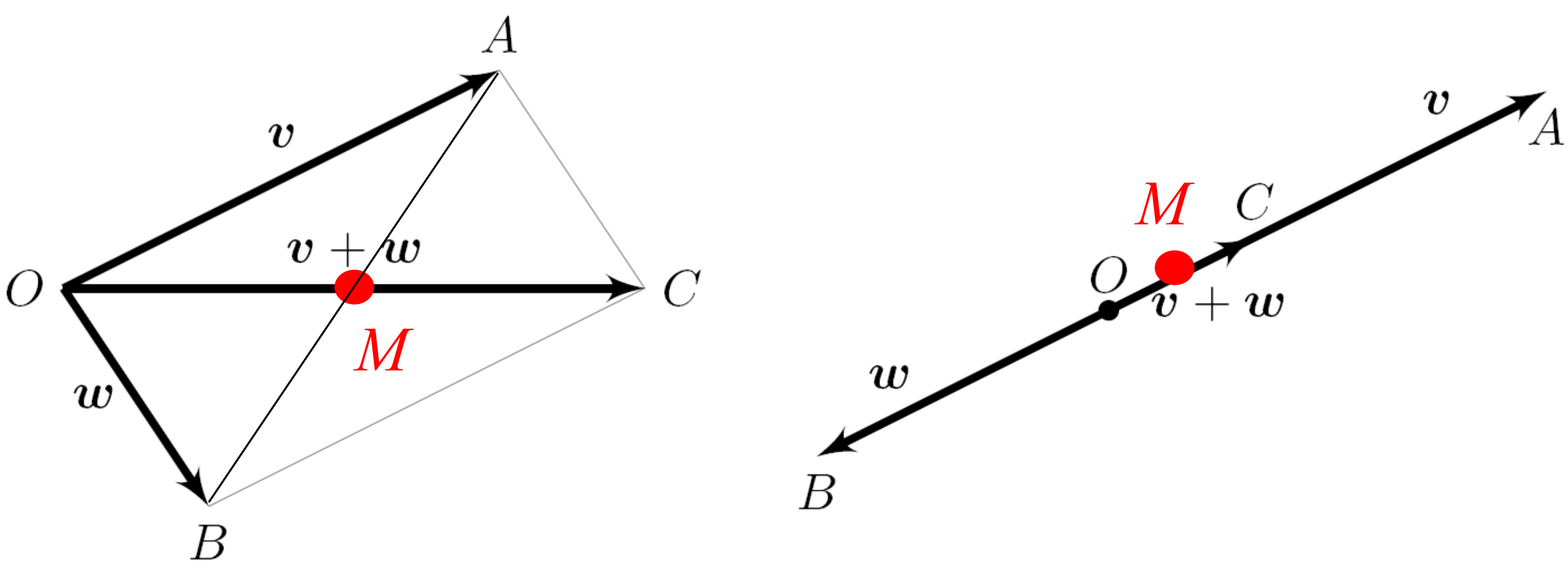
$$\mathrm{d}(B, C) = \mathrm{d}(D, A)$$



Addizione di vettori

Regola del parallelogramma: Dati i vettori $v := \overrightarrow{OA}$ e $w := \overrightarrow{OB}$, poniamo per definizione $v + w := \overrightarrow{OC}$, dove C è l'unico punto del piano tale che $OACB$ sia un parallelogramma.

C è il simmetrico di O rispetto al punto medio M di A e B.



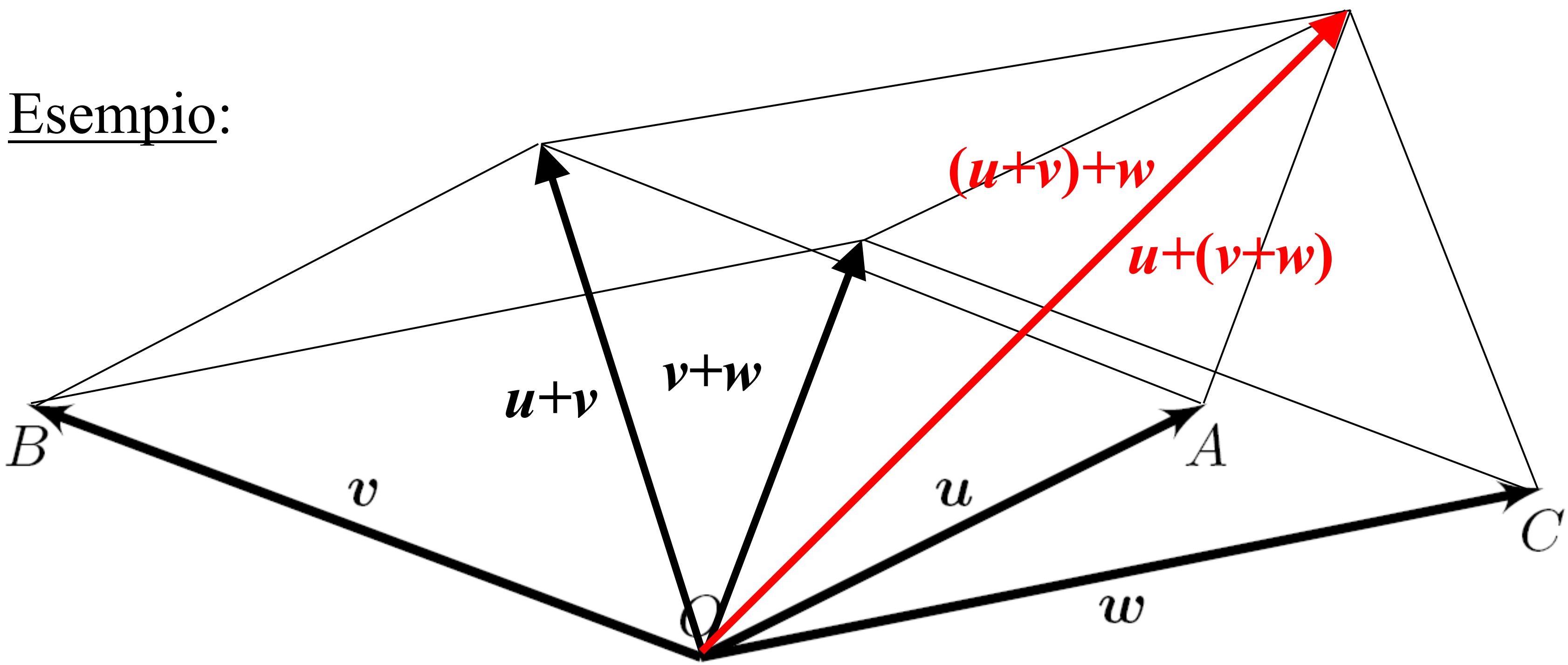
Addizione di vettori

Teorema: L'operazione di addizione tra vettori soddisfa:

1. **Proprietà associativa**:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \ \ per\ ogni\ \boldsymbol{u}\in V^2(O),\ \boldsymbol{v}\in V^2(O),\ \boldsymbol{w}\in V^2(O)$$

Esempio:



Addizione di vettori

Teorema: L'operazione di addizione tra vettori soddisfa:

1. **Proprietà associativa**:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \ \ per\ ogni\ \boldsymbol{u}\in V^2(O),\ \boldsymbol{v}\in V^2(O),\ \boldsymbol{w}\in V^2(O)$$

2. **Proprietà commutativa**:

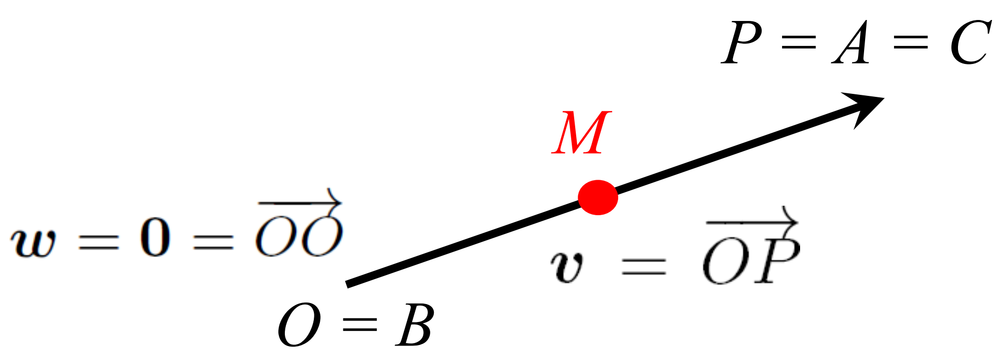
$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v} \ \ per\ ogni\ \boldsymbol{v}\in V^2(O),\ \boldsymbol{w}\in V^2(O)$$

3. **Esistenza dello zero**:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v} \ \ per\ ogni\ \boldsymbol{v}\in V^2(O)$$

Il simmetrico (C) di O rispetto a M è il punto A stesso.

Segue: $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{v}$



Addizione di vettori

<u>Teorema</u>: L'operazione di addizione tra vettori soddisfa:

1. **Proprietà associativa**:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \ \textit{per ogni}\ \boldsymbol{u}\in V^2(O),\ \boldsymbol{v}\in V^2(O),\ \boldsymbol{w}\in V^2(O)$$

2. **Proprietà commutativa**:

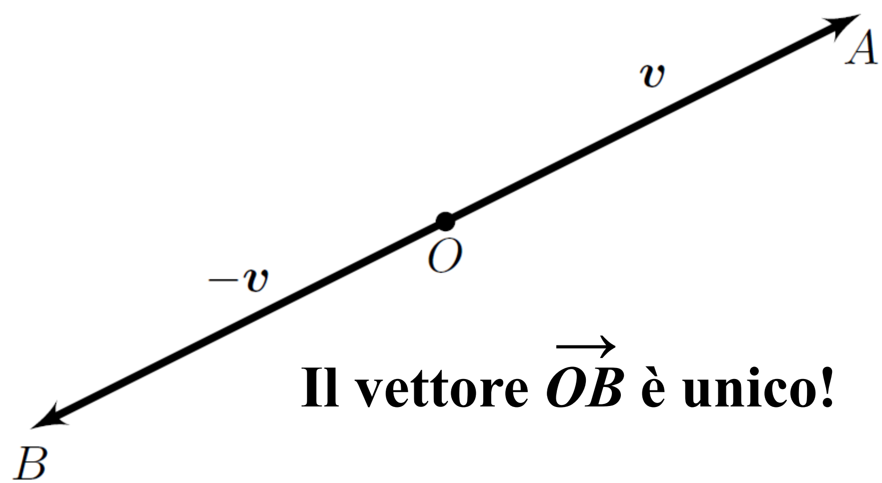
$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v} \ \textit{per ogni}\ \boldsymbol{v}\in V^2(O),\ \boldsymbol{w}\in V^2(O)$$

3. **Esistenza dello zero**:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v} \ \textit{per ogni}\ \boldsymbol{v}\in V^2(O)$$

4. **Esistenza dell'opposto**:

$$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$$



Il vettore $\overrightarrow{OB}$ è unico!

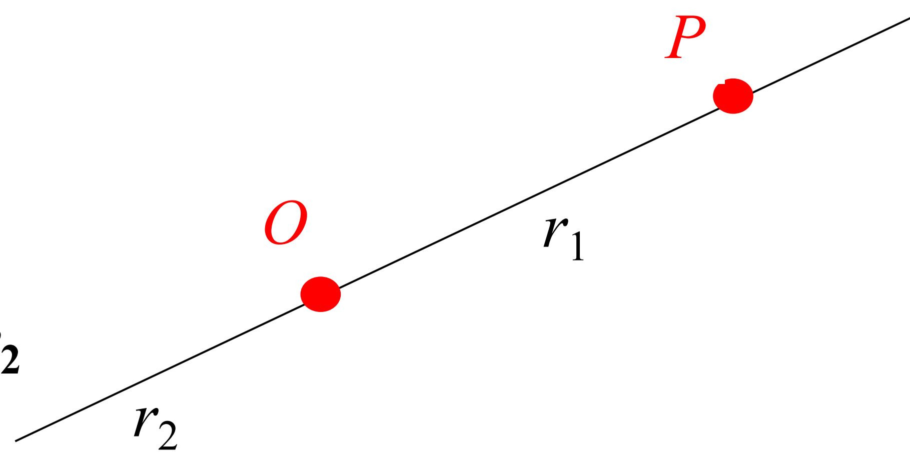
Moltiplicare un vettore per uno scalare

Dato un vettore $v := \overrightarrow{OP}$ e uno scalare h in R,
definiamo il vettore hv in $V^2(O)$.

Se $v = 0$ poniamo: $h0 := 0$ qualsiasi sia h in R.

Se $v \neq 0$ i punti O e P, sono distinti.
Il punto O delimita le due semirette r_1 (passante per P) e r_2.
Poniamo: $h\overrightarrow{OP} := \overrightarrow{OQ}$

- se $h = 0$ allora $Q = O$;
- se $h > 0$ allora Q è il punto di r_1 tale che $d(O, Q) = h\, d(O, P)$;
- **se h < 0 allora *Q* è il punto di *r*₂ tale che d(*O*, *Q*) = – *h* d(*O*, *P*).**



Moltiplicare un vettore per uno scalare

Teorema: L'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verifica le proprietà:

$1\ v = v$ per ogni v in $V^2(O)$

Dimostrazione: Dato $v := \overrightarrow{OA}$, vogliamo determinare $1v$.

Per definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare:

se $v = 0$, si ha $1v = 0$ e quindi $1v = v$;

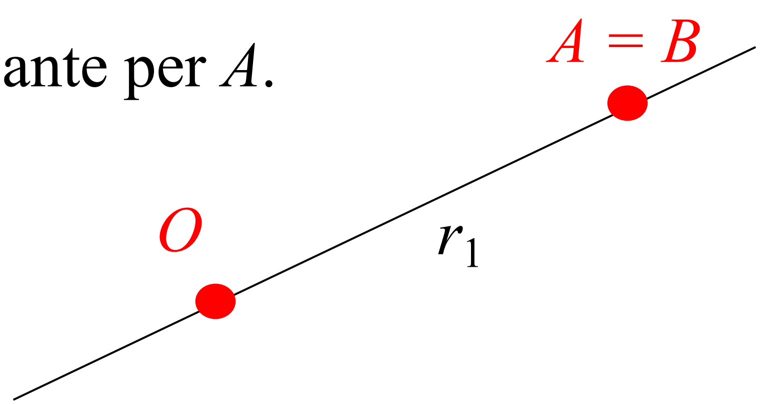
se $v = \overrightarrow{OA} \neq 0$, si ha $O \neq A$.

r_1 è la semiretta delimitata da O e passante per A.

Il vettore $1v$ è uguale al vettore $\overrightarrow{OB}$,

dove B ($= A$) è il punto di r_1 tale che

$d(O, B) = 1\ d(O, A)$. Quindi $1v = v$.



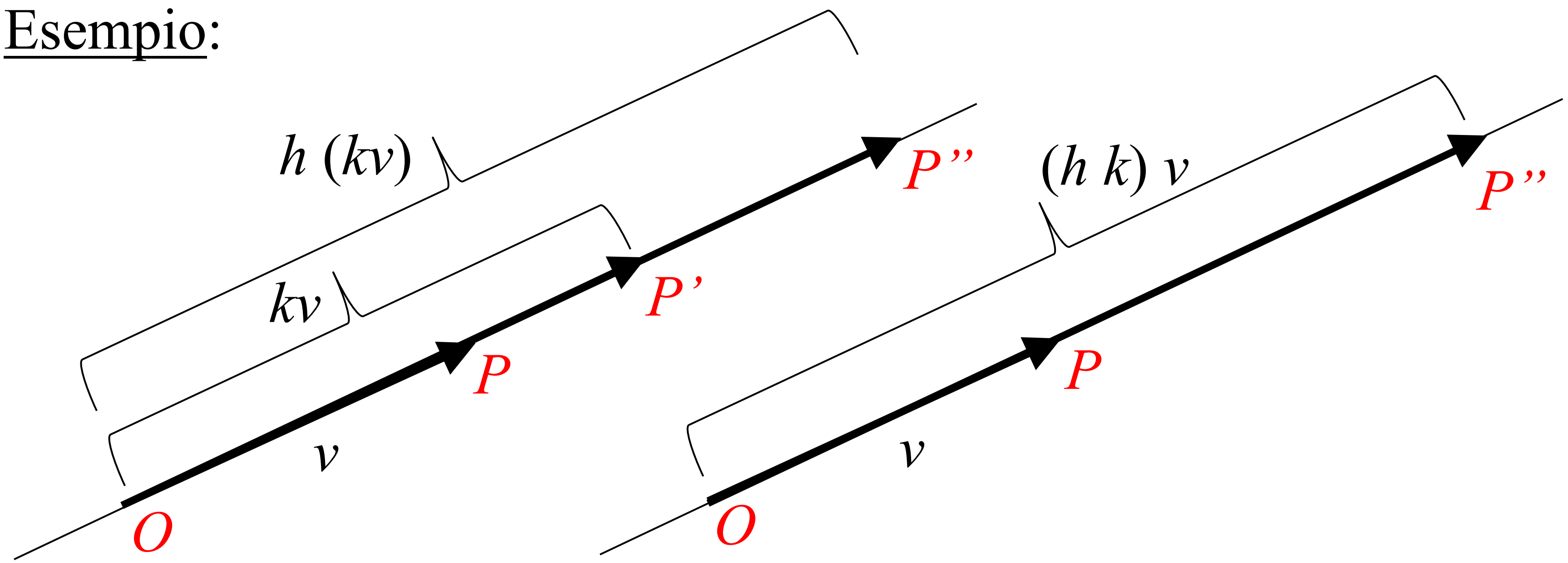
Moltiplicare un vettore per uno scalare

Teorema: L'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verifica le proprietà:

$1\ v = v$ per ogni v in $V^2(O)$

$h\ (k\ v) = (h\ k)\ v$ per ogni v in $V^2(O)$, h in R, k in R

Esempio:



Moltiplicare un vettore per uno scalare

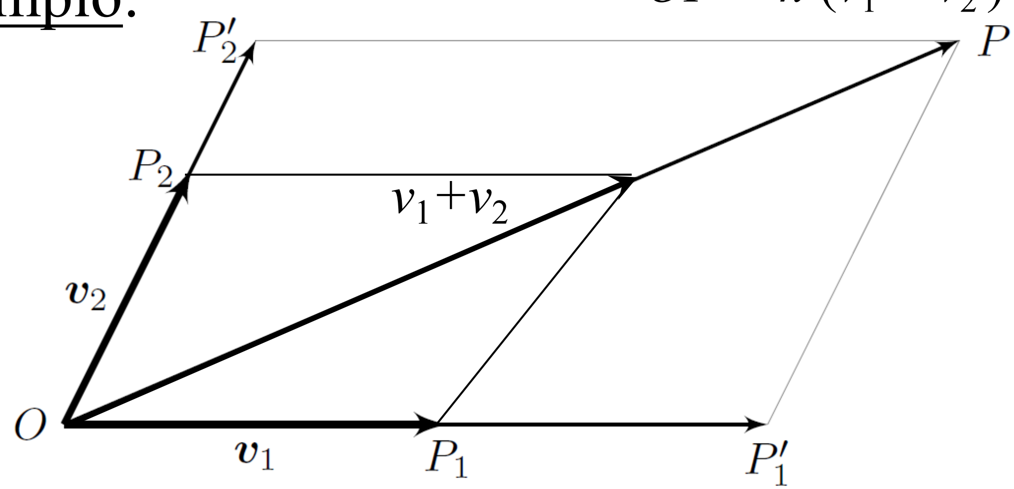
Teorema: Le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare verificano le seguenti proprietà, dette **proprietà distributive**:

$$(h+k)\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{v} \ \textit{per ogni} \ \boldsymbol{v} \in V^2(O),\ h \in \mathbb{R} \ e \ k \in \mathbb{R};$$

$$h(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = h\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{w} \ \textit{per ogni} \ \boldsymbol{v} \in V^2(O),\ \boldsymbol{w} \in V^2(O),\ h \in \mathbb{R}.$$

Esempio:

$\overrightarrow{OP} = h\,(v_1 + v_2)$



$\overrightarrow{OP}'_1 = h\,v_1$

$\overrightarrow{OP}'_2 = h\,v_2$

$\overrightarrow{OP} = h\,v_1 + h\,v_2$

Moltiplicare un vettore per uno scalare

Esercizio: Verificare che $(-1)\,v = -v$ per ogni v in $V^2(O)$

Dimostrazione: Dato $v := \overrightarrow{OA}$ e dato $-v := \overrightarrow{OB}$.

Per definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare:

se $v = 0$, si ha $-1v = 0$. Inoltre $-v = 0$. Segue $-1v = 0 = -v$;

se $v = OA \neq 0$, si ha $O \neq A$.

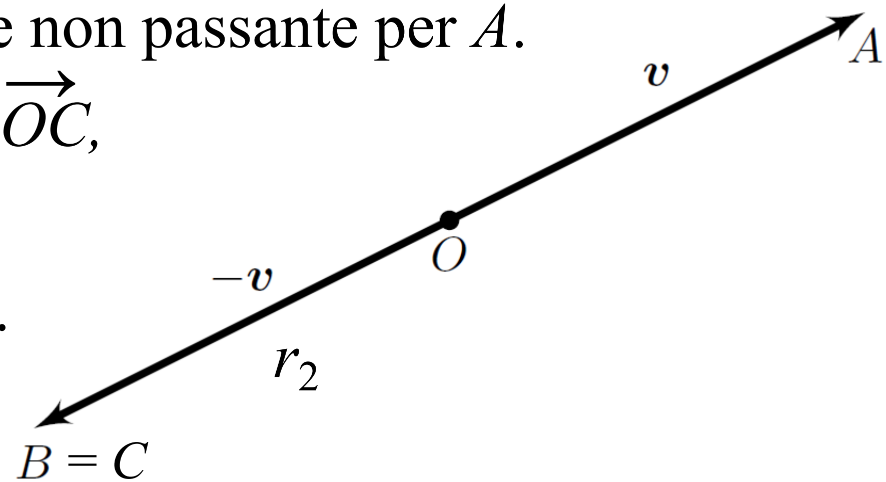
r_2 è la semiretta delimitata da O e non passante per A.

Il vettore $-1v$ è uguale al vettore $\overrightarrow{OC}$,

dove C è il punto di r_2 tale che

$d(O, C) = |-1|\, d(O, A) = d(O, A)$.

Quindi $C = B$. Segue $-1v = -v$.



marcella.sama@uniroma3.it

Vettori dello spazio

L'insieme $V^3(O)$ dei vettori dello spazio con origine in O verifica le seguenti proprietà di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare [in modo analogo a $V^2(O)$]:

1. Proprietà associativa:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \ \textit{per ogni} \ \boldsymbol{u}\in V^3(O),\ \boldsymbol{v}\in V^3(O),\ \boldsymbol{w}\in V^3(O)$$

2. Proprietà commutativa:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v} \ \textit{per ogni} \ \boldsymbol{v}\in V^3(O),\ \boldsymbol{w}\in V^3(O)$$

3. Esistenza dello zero:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v} \ \textit{per ogni} \ \boldsymbol{v}\in V^3(O)$$

4. Esistenza dell'opposto:

$$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$$

Vettori dello spazio

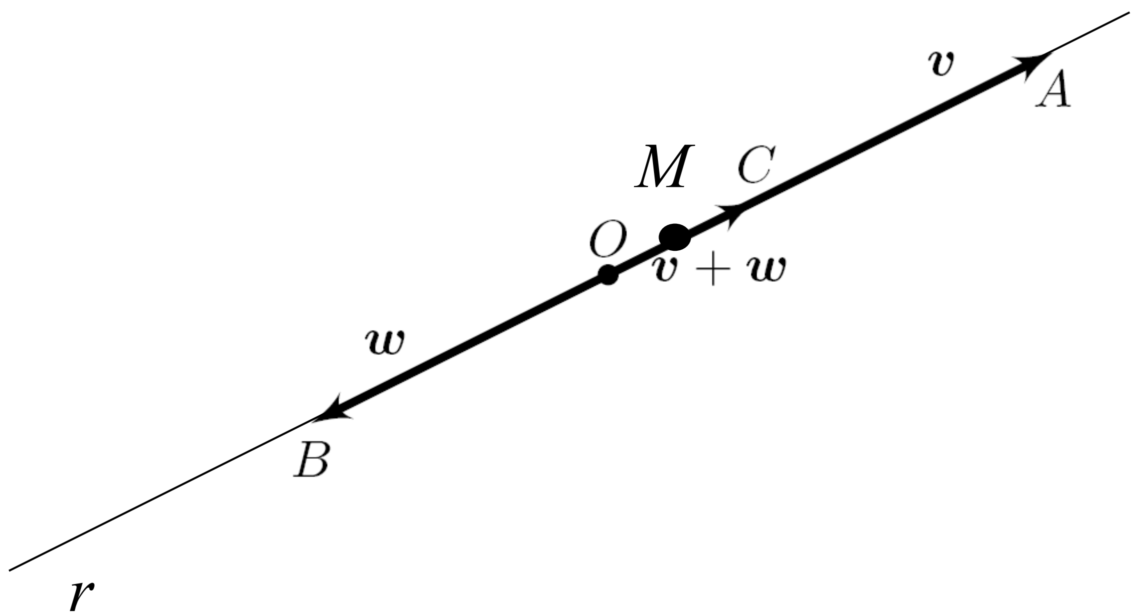
L'insieme $V^3(O)$ dei vettori dello spazio con origine in O verifica le seguenti proprietà di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare [in modo analogo a $V^2(O)$]:

5. $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$;
6. $h(k\boldsymbol{v}) = (hk)\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$;
7. $(h+k)\boldsymbol{v} = h\boldsymbol{v} + k\boldsymbol{v}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $h \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R}$;
8. $h(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = h\boldsymbol{v} + h\boldsymbol{w}$ *per ogni* $\boldsymbol{v} \in V^3(O)$, $\boldsymbol{w} \in V^3(O)$, $h \in \mathbb{R}$.

Rette e piani per l'origine

<u>Osservazioni</u>:

Se r è una retta passante per l'origine, A e B sono due punti di r allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di r.



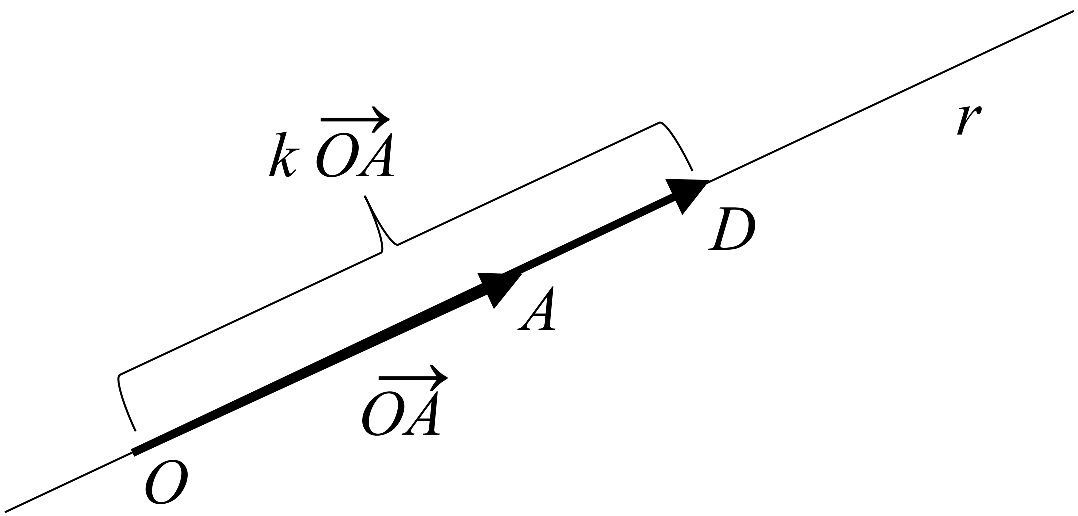
Rette e piani per l'origine

Osservazioni:

Se r è una retta passante per l'origine, A e B sono due punti di r allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di r.

Se r è una retta passante per l'origine, A è un punto di r allora il termine D del vettore $k\,\overrightarrow{OA}$ è un punto di r.

Esempio:



Rette e piani per l'origine

Osservazioni:

Se r è una retta passante per l'origine, A e B sono due punti di r allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di r.

Se r è una retta passante per l'origine, A è un punto di r allora il termine D del vettore $k\,\overrightarrow{OA}$ è un punto di r.

Analogamente:

Se π è un piano passante per l'origine, A e B sono due punti di π allora il termine C del vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ è un punto di π.

Se π è un piano passante per l'origine, A è un punto di π allora il termine D del vettore $k\,\overrightarrow{OA}$ è un punto di π.

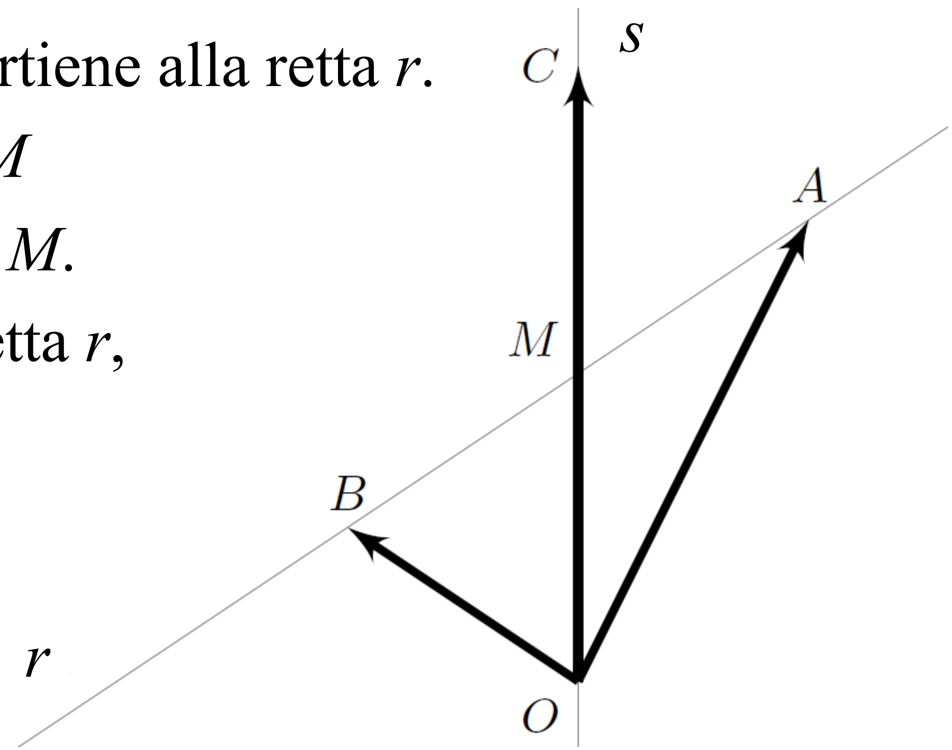
Rette e piani per l'origine

Esercizio:

Sia r una retta non passante per l'origine. Siano A e B due punti di r.

Domanda 1: Il vettore $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ha termine sulla retta r ?

Il punto medio M tra A e B appartiene alla retta r.
Il simmetrico C di O rispetto a M
sta sulla retta s passante per O e M.
Dunque C non appartiene alla retta r,
perché l'unico punto in comune
tra le rette r e s è il punto M.



Rette e piani per l'origine

<u>Esercizio</u>:

Sia r una retta non passante per l'origine. Siano A e B due punti di r.

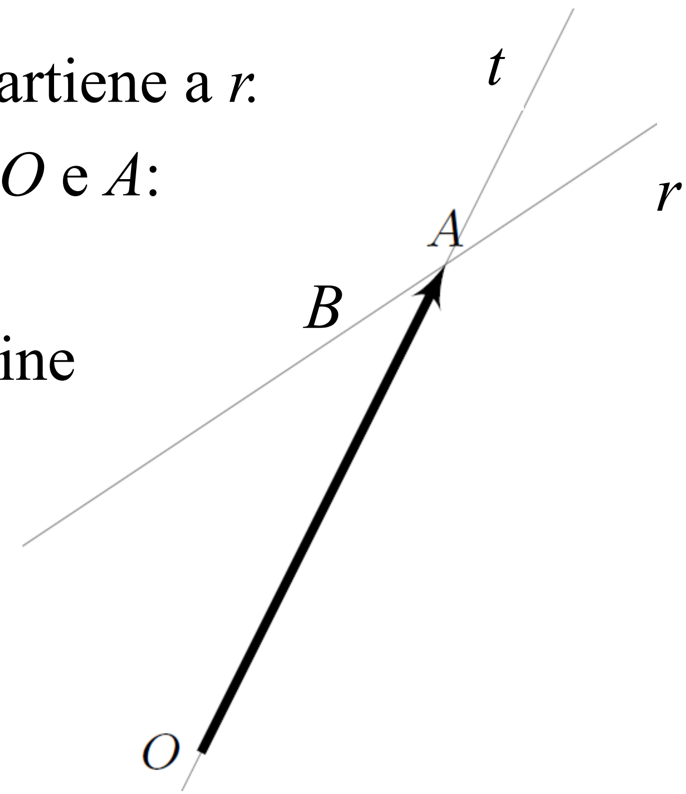
<u>Domanda 2</u>: Se k è uno scalare, il vettore $k\,\overrightarrow{OA}$ ha termine su r ?

$O \neq A$ perché O non appartiene a r, A appartiene a r.

$k\,\overrightarrow{OA}$ è un punto della retta t passante per O e A:

- per $k = 1$ si ottiene il vettore $\overrightarrow{OA}$ stesso;
- per $k \neq 1$ si ottiene un vettore il cui termine è un punto di t diverso da A e, quindi, non appartenente a r.

L'unico punto in comune tra r e t è A.



Punto medio

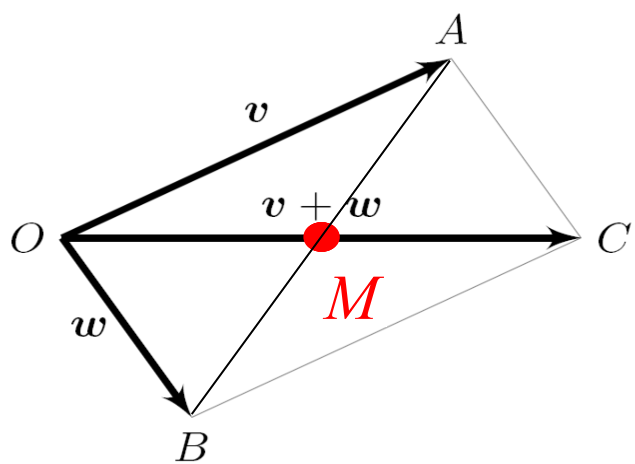
Teorema: Dati due punti A e B del piano o dello spazio, il loro punto medio M è dato dalla formula:

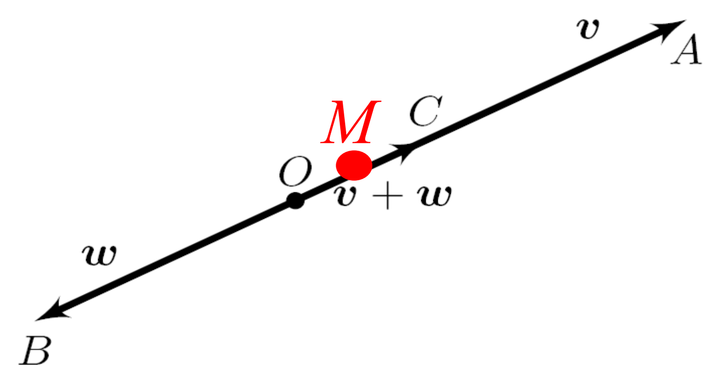
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Dimostrazione: Sia C il punto tale che $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Dobbiamo mostrare che $\overrightarrow{OM} = 1/2\ \overrightarrow{OC}$.

Sappiamo che il punto C è il simmetrico di O rispetto al punto M.





Punto medio

<u>Teorema</u>: Dati due punti A e B del piano o dello spazio, il loro punto medio M è dato dalla formula:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

<u>Dimostrazione</u>: Sia C il punto tale che $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Dobbiamo mostrare che $\overrightarrow{OM} = 1/2\ \overrightarrow{OC}$.

Sappiamo che il punto C è il simmetrico di O rispetto al punto M. Distinguiamo due casi:

- Se M coincide con O, allora C coincide con O, e $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \overrightarrow{OC} = 0$.
- Se M <u>non</u> coincide con O, detta r la retta passante per O e M, per la definizione di prodotto scalare vettore, il termine del vettore $2\overrightarrow{OM}$ è esattamente il simmetrico di M rispetto ad O: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}$.