L9: Generatori (12,15)

Argomenti lezione:

- Introduzione
- Combinazione lineare di vettori
- Vettori generatori di un sottospazio

Sottospazio vettoriale

Introduzione

<u>Esempio</u>: Consideriamo le seguenti tre matrici di $M(2, 2, R)$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste tre matrici appartengono al sottospazio vettoriale $S(2, R)$ di $M(2, 2, R)$ formato dalle matrici simmetriche.

Queste tre matrici appartengono anche al sottospazio E di $M(2, 2, R)$ formato dalle matrici del tipo: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$

Esistono altri sottospazi contenenti le tre matrici …

<u>Domanda</u>: C'è un sottospazio più "piccolo" di tutti gli altri ?

Introduzione

Esempio: Consideriamo le seguenti tre matrici di $M(2, 2, R)$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Domanda: C'è un sottospazio più "piccolo" di tutti gli altri ?

Un F di $M(2, 2, R)$ che contiene le tre matrici deve contenere:

- le matrici del tipo k_1A_1, k_2A_2, k_3A_3 con k_1, k_2 e k_3 numeri reali;
- le somme di questi multipli: $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$;
- i multipli delle matrici create, poi le loro somme, e così via.

Segue l'insieme F delle matrici del tipo: $\boldsymbol{k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3}$

Si dimostra che F è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, R)$.

Ad esempio: A_1 si ottiene per $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$.

Introduzione

Esempio: Consideriamo le seguenti tre matrici di $M\,(2, 2, R)$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Domanda: C'è un sottospazio più "piccolo" di tutti gli altri ?

Segue l'insieme F delle matrici del tipo: $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$

Dimostriamo che F è un sottospazio vettoriale di $M\,(2, 2, R)$.

Prese le matrici $A := k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3$ e $B := h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3$

Verifichiamo che:

$$k\,A = k\,(k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3) = (k\,k_1)\,A_1+ (k\,k_2)\,A_2 + (k\,k_3)\,A_3$$

$$\begin{aligned} A + B &= k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 \\ &= (k_1 + h_1)\,A_1 + (k_2 + h_2)\,A_2 + (k_3 + h_3)\,A_3 \end{aligned}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Combinazione lineare di vettori

Sia nel piano che nello spazio, si ha la seguente definizione.
Dati n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $a_1, a_2, \dots, a_n$ <u>coefficienti non tutti nulli</u> tali che $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$

Dati n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, essi si dicono **linearmente <u>in</u>dipendenti** se l'uguaglianza $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$ è verificata <u>solamente</u> nel caso in cui $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

L'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo è la combinazione lineare con <u>tutti i coefficienti nulli</u>.

Combinazione lineare di vettori

Sia nel piano che nello spazio, si ha la seguente definizione.

Dati n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, e dati n numeri reali $a_1, a_2, \dots, a_n$,

il vettore $v := \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

viene chiamato **combinazione lineare** dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$

con **coefficienti** $a_1, a_2, \dots, a_n$.

<u>Esempio</u>:

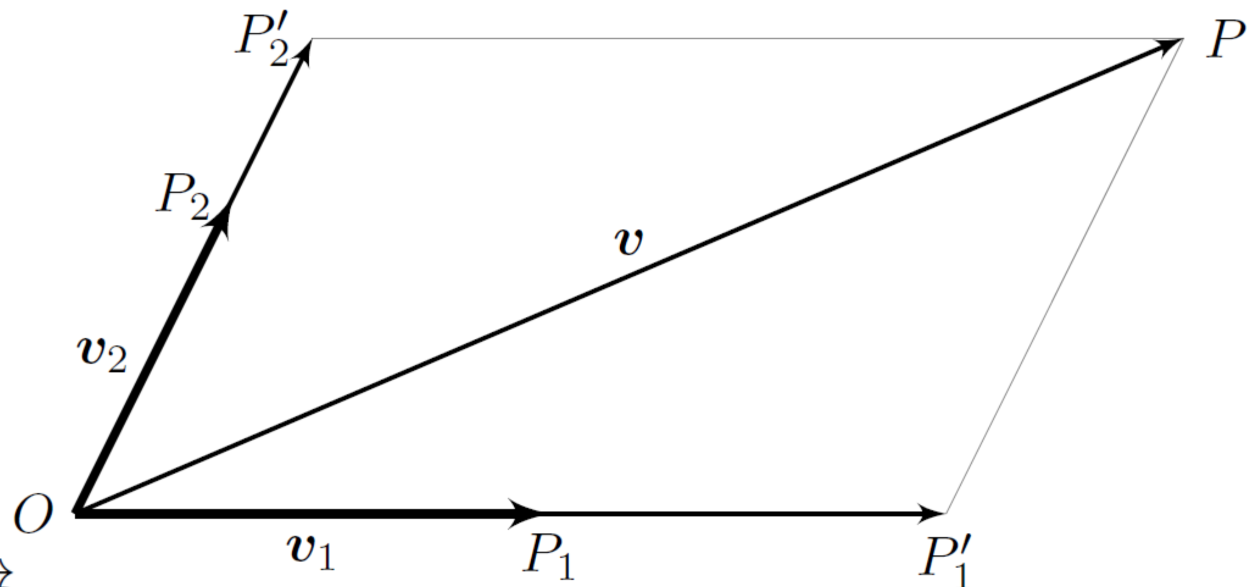
$$\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$$

$$\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$$

$$a_1\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{OP_1'}$$

$$a_2\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP_2'}$$

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP}$$



Combinazione lineare di vettori

Definizione: Dati dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale V e degli scalari $k_1, k_2, \ldots, k_r$, una **combinazione lineare dei vettori** $v_1, v_2, \ldots, v_r$ a coefficienti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ è $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i$

Combinazione lineare di vettori

Definizione: Dati dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale V e degli scalari $k_1, k_2, \ldots, k_r$, una **combinazione lineare dei vettori** $v_1, v_2, \ldots, v_r$ a coefficienti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ è $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i$.

Esempio: Scrivere le combinazioni lineari delle matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le matrici del tipo:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Combinazione lineare di vettori

Definizione: Dati dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale V e degli scalari $k_1, k_2, \ldots, k_r$, una **combinazione lineare dei vettori** $v_1, v_2, \ldots, v_r$ a coefficienti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ è $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i$.

Esempio: Scrivere le combinazioni lineari delle matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le matrici del tipo:

$$\boxed{k_1}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \boxed{k_2}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \boxed{k_3}\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \boxed{k_4}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{k_1 - k_2 + 3k_3 - k_4} & -k_1 + k_4 & 2k_4 \\ k_1 & 2k_1 + k_2 & k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \end{pmatrix}$$

al variare di k_1, k_2, k_3 e k_4 in R.

Combinazione lineare di vettori

<u>Definizione</u>: Dati dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale V e degli scalari $k_1, k_2, \ldots, k_r$, una **combinazione lineare dei vettori** $v_1, v_2, \ldots, v_r$ a coefficienti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ è $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i$.

<u>Esempio</u>: Scrivere le combinazioni lineari delle matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le matrici del tipo:

$$\boxed{k_1}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \boxed{k_2}\begin{pmatrix} -1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \boxed{k_3}\begin{pmatrix} 3 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \boxed{k_4}\begin{pmatrix} -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 - k_2 + 3k_3 - k_4 & \boxed{-k_1 + k_4} & 2k_4 \\ k_1 & 2k_1 + k_2 & k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \end{pmatrix}$$

al variare di k_1, k_2, k_3 e k_4 in R.

Combinazione lineare di vettori

<u>Definizione</u>: Dati dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale V e degli scalari $k_1, k_2, \ldots, k_r$, una **combinazione lineare dei vettori** $v_1, v_2, \ldots, v_r$ a coefficienti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ è $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i$.

<u>Esempio</u>: Scrivere le combinazioni lineari delle matrici:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le loro combinazioni lineari sono tutte e sole le matrici del tipo:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 - k_2 + 3k_3 - k_4 & -k_1 + k_4 & 2k_4 \\ k_1 & 2k_1 + k_2 & k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \end{pmatrix}$$ al variare di k_1, k_2, k_3 e k_4 in R.

Generatori

Vettori generatori di un sottospazio

Teorema: L'insieme delle combinazioni lineari dei $v_1, v_2, \dots, v_r$ al variare dei coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_r$ è un sottospazio vettor. di V chiamato sottospazio vettoriale **generato** dai vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$:

$$\boldsymbol{L(v_1, v_2, \dots, v_r)} := \{\sum_{i=1}^{r} k_i v_i \mid k_i \in \mathbb{R}\}.$$

N.B. Tale sottospazio vettoriale contiene i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ ed è contenuto in **tutti** i sottospazi vett. di V contenenti $v_1, v_2, \dots, v_r$.

marcella.sama@uniroma3.it

Vettori generatori di un sottospazio

Teorema: L'insieme delle combinazioni lineari dei $v_1, v_2, \dots, v_r$ al variare dei coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_r$ è un sottospazio vettor. di V chiamato sottospazio vettoriale **generato** dai vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$:

$$\boldsymbol{L(v_1, v_2, \dots, v_r)} := \{\sum_{i=1}^{r} k_i v_i \mid k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrazione:

1. Notiamo che $L(v_1, v_2, \dots, v_r)$ contiene tutti i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$
   Per esempio si ha: $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_r$
2. Sia E un sottospazio vettoriale di V contenente $v_1, v_2, \dots, v_r$.
   Allora: E contiene tutti i vettori del tipo $k_1v_1, k_2v_2, \dots, k_rv_r$.
   E contiene tutte le loro combinazioni lineari: $k_1v_1+k_2v_2+ \dots +k_rv_r$.
   Quindi *E è generato da* $L(v_1, v_2, \dots, v_r)$.

Vettori generatori di un sottospazio

Teorema: L'insieme delle combinazioni lineari dei $v_1, v_2, \ldots, v_r$ al variare dei coefficienti $k_1, k_2, \ldots, k_r$ è un sottospazio vettor. di V chiamato sottospazio vettoriale **generato** dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$:

$$\boldsymbol{L(v_1, v_2, \ldots, v_r)} := \{\sum_{i=1}^{r} k_i v_i \mid k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrazione:

3. Dimostriamo che $L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ è un sottospazio vettor. di V

$L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ è non vuoto (e.g. contiene i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$)

Dati $u = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r$ e $v = h_1v_1 + h_2v_2 + \ldots + h_rv_r$.

Sia $(u + v)$ che $(k\,u)$ appartengono a $L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$.

Infatti: $u + v = (k_1 + h_1)\, v_1 + (k_2 + h_2)\, v_2 + \ldots + (k_r + h_r)\, v_r$

$k\,u = (k\,k_1)\, v_1 + (k\,k_2)\, v_2 + \ldots + (k\,k_r)\, v_r$

Vettori generatori di un sottospazio

Definizione:

Se $V = L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ allora V è **generato** dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$.
In altre parole, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono **generatori** di (o generano) V se e solo se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Esempi:

Data una retta r passante per l'origine O del piano o dello spazio, e dato un punto A della retta r distinto da O, l'insieme dei vettori $\overrightarrow{OP}$ con P in r è un sottospazio vettoriale generato dal vettore $\overrightarrow{OA}$.

Dati in $V^2(O)$ due vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ con O, P_1 e P_2 non allineati, i vettori $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ generano $V^2(O)$.

Vettori generatori di un sottospazio

Definizione:

Se $V = L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ allora V è **generato** dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$.
In altre parole, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono **generatori** di (o generano) V se e solo se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Esempi:

Dati in $V^3(O)$ due vettori $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$ con O, P_1 e P_2 non allineati, i vettori $\overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OP}_2$ generano il sottospazio di $V^3(O)$ formato dai vettori $\overrightarrow{OP}$ con P appartenente al piano passante per O, P_1 e P_2.

$V^3(O)$ è generato dai vettori $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2$ e $\overrightarrow{OP}_3$ con O, P_1, P_2 e P_3 non complanari.

Vettori generatori di un sottospazio

Definizione:

Se $V = L(v_1, v_2, \dots, v_r)$ allora V è **generato** dai vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$. In altre parole, $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono **generatori** di (o generano) V se e solo se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_r$.

Esempi: Consideriamo le seguenti tre matrici di $M(2, 2, R)$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sottospazio vettoriale che esse generano è quello formato dalle matrici del tipo $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$. Facendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} k_1 + 3k_2 & 2k_1 + k_2 + 2k_3 \\ 2k_1 + k_2 + 2k_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vettori generatori di un sottospazio

Definizione:

Se $V = L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ allora V è **generato** dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$.
In altre parole, $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono **generatori** di (o generano) V se e solo se ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Esempi:

Consideriamo i tre polinomi $1, x, x^2$. Vediamo che le loro combinazioni lineari sono i polinomi del tipo: $k_1 + k_2 x + k_3 x^2$.
Dunque $1, x, x^2$ generano $R^3[x]$, ovvero il sottospazio vettoriale di $R[x]$ formato dai polinomi di grado minore di 3.
In maniera analoga si potrebbe verificare che $1, x, x^2, \ldots, x^n$ generano $\mathrm{R}^{n+1}[x]$.

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio: Sia E il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $v_1 := (3, 2, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $v_3 := (0, 1, 1, 2)$.

Domanda: Il vettore $v := (0, 1, 0, 2)$ appartiene al sottospazio E ?

Dobbiamo stabilire se v è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 .

Vale a dire se esistono tre scalari k_1, k_2 e k_3 tali che:

$(0, 1, 0, 2) = k_1 (3, 2, 2, 1) + k_2 (1, 0, 1, -1) + k_3 (0, 1, 1, 2)$

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio: Sia E il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $v_1 := (3, 2, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $v_3 := (0, 1, 1, 2)$.

Domanda: Il vettore $v := (0, 1, 0, 2)$ appartiene al sottospazio E ?

Dobbiamo stabilire se v è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3 .

Vale a dire se esistono tre scalari k_1, k_2 e k_3 tali che:

$(0, 1, 0, 2) = k_1\,(3, 2, 2, 1) + k_2\,(1, 0, 1, -1) + k_3\,(0, 1, 1, 2)$

$(0, 1, 0, \boxed{2)} = (3k_1 + k_2,\ 2\,k_1 + k_3,\ 2k_1 + k_2 + k_3,\ \boxed{k_1 - k_2 + 2k_3)}$

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ \boxed{k_1 - k_2 + 2k_3 = 2} \end{cases}$$

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio: Sia E il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $v_1 := (3, 2, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $v_3 := (0, 1, 1, 2)$.

Domanda: Il vettore $v := (0, 1, 0, 2)$ appartiene al sottospazio E ?

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{rk}A = 3$$

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{rk}A' = 3$$

v appartiene a E se e solo se il sistema è risolubile

calcolare il rango di A e A' e applicare Rouché-Capelli

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $v_1 := (3, 2, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $v_3 := (0, 1, 1, 2)$.

<u>Domanda</u>: Il vettore $v := (0, 1, 0, 2)$ appartiene al sottospazio E ?

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}A = 3$$

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}A' = 3$$

Abbiamo che rk*A* = rk*A’*.

il sistema è risolubile!

Quindi *v* appartiene a *E*

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $v_1 := (3, 2, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $v_3 := (0, 1, 1, 2)$.

<u>Domanda</u>: Il vettore $v := (0, 1, 0, 2)$ appartiene al sottospazio E ?

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}A = 3$$

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rk}A' = 3$$

Le soluzioni del sistema:

$k_1 = 1/3$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1/3$

(non ho parametri dato che $rk\ A = q$ incognite)

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $v_1 := (3, 2, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, -1)$ e $v_3 := (0, 1, 1, 2)$.

<u>Domanda</u>: Il vettore $v := (0, 1, 0, 2)$ appartiene al sottospazio E ?

$$\begin{cases} 3k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 + 2k_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rk}A = 3$$

$$\Rightarrow A' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{rk}A' = 3$$

Le soluzioni del sistema:

$k_1 = 1/3$, $k_2 = -1$, $k_3 = 1/3$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v} = \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_3}$$

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottospazio vettoriale di $M(2, 3, R)$ generato da:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Domanda</u>: Le seguenti matrici appartengono a E ?

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottospazio vettoriale di $M(2, 3, R)$ generato da:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una combinazione lineare delle quattro matrici:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -k_2 + k_4 & 0 & k_1 + k_4 \\ k_2 - k_4 & k_1 + k_3 + 3k_4 & k_3 + 2k_4 \end{pmatrix}$$

A appartiene a E se e solo se il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} \boxed{-k_2 + k_4 = 1} \\ 0 = 0 \\ k_1 + k_4 = 0 \\ \boxed{k_2 - k_4 = 1} \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = 0 \\ k_3 + 2k_4 = 0 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema <u>non</u> è risolubile, *A* <u>non</u> appartiene a *E*

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio</u>: Sia *E* il sottospazio vettoriale di *M* (2, 3, *R*) generato da:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_2 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una combinazione lineare delle quattro matrici:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -k_2 + k_4 & 0 & k_1 + k_4 \\ k_2 - k_4 & k_1 + k_3 + 3k_4 & k_3 + 2k_4 \end{pmatrix}$$

B appartiene a *E* se e solo se

il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} -k_2 + k_4 = -2 \\ 0 = 0 \\ k_1 + k_4 = 0 \\ k_2 - k_4 = 2 \\ k_1 + k_3 + 3k_4 = -3 \\ k_3 + 2k_4 = -3 \end{cases}$$

$$B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Facendo i calcoli si ha:

Il sistema è risolubile,

B* appartiene a *E

Vettori generatori di un sottospazio

Osservazione: In generale non c'e alcun motivo perché dato un qualsiasi spazio vettoriale V esistano $v_1, v_2, \dots, v_r$ che generano V.

Esempio:

Si consideri lo spazio vettoriale dei polinomi $R[x]$.

Consideriamo un numero finito di n polinomi $f_1[x], \dots, f_n[x]$.

Essi non possono essere generatori di $R[x]$, perchè tutte le combinazioni lineari di $f_1[x], \dots, f_n[x]$ sono polinomi di grado minore o uguale a g (ovvero il massimo dei gradi di tali polinomi).

Ma allora il polinomio x^{g+1}, appartenente a $R[x]$, non è ottenibile come combinazione lineare di $f_1[x], \dots, f_n[x]$.

Questi ultimi non sono quindi generatori di $R[x]$.

Vettori generatori di un sottospazio

Definizione: Diciamo che uno spazio vettoriale V è **finitamente generato** se esistono $v_1, v_2, \ldots, v_r$ tali che $V = L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$.

Esempi:

- $V^2(O)$ è finitamente generato;
- $V^3(O)$ è finitamente generato;
- $R[x]$ non è finitamente generato.

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio (1): Dati $r+1$ vettori $v_1, v_2, ..., v_r, v_{r+1}$ di uno spazio vett. V mostrare che $L(v_1, v_2, ..., v_r) \subseteq L(v_1, v_2, ..., v_r, \boldsymbol{v_{r+1}})$.

Dobbiamo mostrare che ogni combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_r$ è anche combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_r, \boldsymbol{v_{r+1}}$.

Infatti se v è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, ..., v_r$, esistono numeri reali $k_1, k_2, \ldots, k_r$ tali che:

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r$$

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r + \mathbf{0}\boldsymbol{v_{r+1}}$$

Segue che v è combinazione lineare di $v_1, v_2, ..., v_r, \boldsymbol{v_{r+1}}$.

Vettori generatori di un sottospazio

<u>Esercizio (2)</u>: Stabilire se le matrici S_1 e S_2 generano $S(2, R)$.

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo verificare se una qualsiasi matrice simmetrica S può essere espressa come combinazione lineare di S_1 e S_2.

Dobbiamo stabilire se esistono k_1 e k_2 tali che $S = k_1S_1 + k_2S_2$, cioè:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_2 & k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$ Determiniamo k_1 e k_2 se e solo se $a = c$.

Dunque **non** tutte le matrici simmetriche sono combinazioni lineari di S_1 e S_2. Perciò, S_1 e S_2 **non** generano $S(2, R)$.

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio (3): Stabilire se le matrici S_1 , S_2 e S_3 generano $S(2, R)$.

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo verificare se una qualsiasi matrice simmetrica S può essere espressa come combinazione lineare di S_1 , S_2 e S_3.

Dobbiamo stabilire se esistono k_1, k_2 e k_3 t.c. $S = k_1S_1 + k_2S_2 + k_3S_3$:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_2 & k_1 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$ Basta porre: $k_1 = b$, $k_2 = a$, $k_3 = c$.

Dunque tutte le matrici simmetriche sono combinazioni lineari di S_1 , S_2 e S_3. Perciò, S_1 , S_2 e S_3 generano $S(2, R)$.

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio (4): Si consideri il sottospazio vettoriale di $R[x]$ generato dai polinomi $p_1(x) := 3+2x$, $p_2(x) := x+x^3$, $p_3(x) := 1+x+x^2-x^3$.
Stabilire se i polinomi $p(x) := 1 + 2x + x^3$ e $q(x) := -7 + 2x^2 + 2x^3$ appartengono al sottospazio E.

Stabiliamo se $\boldsymbol{p(x)}$ è combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$, cioè:
$p(x) = k_1\, p_1(x) + k_2\, p_2(x) + k_3\, p_3(x)$

$$1 + 2x + x^3 = k_1(3 + 2x) + k_2(x + x^3) + k_3(1 + x + x^2 - x^3)$$

$$1 + 2x + x^3 = 3k_1 + k_3 + (2k_1 + k_2 + k_3)x + k_3x^2 + (k_2 - k_3)x^3$$

$$\begin{cases} 3k_1 \qquad\qquad + k_3 = 1 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad k_3 = 0 \\ \qquad\quad k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si vede che questo sistema non è risolubile.
Perciò, $p(x)$ non appartiene al sottospazio E.

Vettori generatori di un sottospazio

Esercizio (4): Si consideri il sottospazio vettoriale di $R[x]$ generato dai polinomi $p_1(x) := 3+2x$, $p_2(x) := x+x^3$, $p_3(x) := 1+x+x^2-x^3$.
Stabilire se i polinomi $p(x) := 1 + 2x + x^3$ e $q(x) := -7 + 2x^2 + 2x^3$ appartengono al sottospazio E.

Stabiliamo se $\boldsymbol{q(x)}$ è combinazione lineare di $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$, cioè:

$$q(x) = k_1\, p_1(x) + k_2\, p_2(x) + k_3\, p_3(x)$$

$$-7 + 2x^2 + 2x^3 = k_1(3 + 2x) + k_2(x + x^3) + k_3(1 + x + x^2 - x^3)$$

$$-7 + 2x^2 + 2x^3 = 3k_1 + k_3 + (2k_1 + k_2 + k_3)x + k_3x^2 + (k_2 - k_3)x^3$$

$$\begin{cases} 3k_1 \qquad\quad + k_3 = -7 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ \qquad\qquad\quad k_3 = 2 \\ \qquad\quad k_2 - k_3 = 2 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si vede che questo sistema è risolubile.
Perciò, $q(x)$ appartiene al sottospazio E.