L3: Matrice inversa (1,6)

Argomenti lezione:

- Matrice unità
- Matrice inversa
- Proprietà dell'inversa
- Sistemi di equazioni lineari
- Teorema di Cramer

Matrice Unità

Matrice unità

Proprietà dei numeri reali sull'**inverso** di un numero:
dato un numero reale $a \neq 0$ esiste un numero reale b tale che $ab = 1$.
Tale numero b non solo esiste, ma è anche unico.

Studiamo la medesima proprietà per le matrici. Ci domandiamo:

1. Esiste una matrice unità I corrispondente al numero 1 ?
2. Data una matrice <u>quadrata</u> A, con $A \neq 0$,
   esiste una matrice <u>quadrata</u> B, tale che $AB = I$?

Risposte:

1. Esiste la matrice unità I
2. Esiste la matrice quadrata B se e solo se $det\,\mathrm{A} \neq 0$

Matrice unità

Chiamiamo **matrice unità** o **matrice identica** di ordine *n* la matrice quadrata I_n avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0 (la matrice identica è, quindi, una matrice diagonale).

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

det I = 1

E’ una matrice triangolare.
Il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale!

Matrice unità

Chiamiamo **matrice unità** o **matrice identica** di ordine n la matrice quadrata I_n avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi uguali a 0 (la matrice identica è, quindi, una matrice diagonale).

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$a1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$

$AI_n = A$ con n colonne

$I_nB = B$ con n righe

?

Matrice unità

Per ogni matrice A con n colonne si ha:

$$AI_n = A.$$

Dimostrazione:

$$AI_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & \cdots\cdots & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & & \cdots\cdots & & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

L'unico elemento $\neq 0$ nella moltiplicazione per la i-esima riga è l'elemento della j-esima colonna (per I_n vale 1, per A vale a_{ij}). Dunque, l'elemento di posto (i, j) di AI_n è a_{ij}. Segue $AI_n = A$.

Matrice unità

$$Per\ ogni\ matrice\ A\ con\ n\ colonne\ si\ ha:$$

$$AI_n = A.$$

Si dimostra in modo analogo che:

$$Per\ ogni\ matrice\ B\ con\ n\ righe\ si\ ha:$$

$$I_nB = B.$$

Matrice Inversa

Matrice inversa

Una matrice quadrata A si dice **invertibile** se esiste una matrice quadrata B dello stesso ordine di A tale che $AB = BA = I$.
Indichiamo con $GL(n, R)$ l'insieme delle **matrici invertibili** di ordine n (anche note col nome ***G*ruppo *L*ineare**).

<u>Attenzione</u>:

- $\boldsymbol{A \neq 0}$, altrimenti per qualunque B avremmo $AB = 0$ e $BA = 0$.

- $\boldsymbol{det\ A \neq 0}$, altrimenti non esiste alcuna matrice B t.c. $AB = I$, perché avremmo $1 = det\ I = det\ (AB) = det\ A\ det\ B = 0\ det\ B = 0$.

La matrice inversa è unica

Se A è una matrice invertibile e B e C sono due matrici tali che $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, allora $B = C$.

Dimostrazione:

Sappiamo che: $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$

Calcoliamo ora il prodotto CAB:

$$CAB = (CA)B = IB = B$$

D'altra parte:

$$CAB = C(AB) = CI = C$$

Dunque CAB è uguale sia a B che a C.

Segue B e C sono la stessa matrice.

La matrice inversa è unica

Se A è una matrice invertibile e B e C sono due matrici tali che $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, allora $B = C$.

$$\Downarrow$$

Data una matrice invertibile A si chiama **inversa** A^{-1} di A **l'unica** matrice B tale che $AB = BA = I$.

Matrice inversa

Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $det\ A \neq 0$.

In tal caso, detto n l'ordine di A, la matrice inversa di A si calcola nel modo seguente:

$se\ n = 1\ e\ A := (a_{11})\ si\ ha\ A^{-1} = (a_{11}^{-1});$

$se\ n > 1\ l'elemento\ b_{ij}\ di\ posto\ (i, j)\ della\ matrice\ A^{-1}\ \grave{e}\ dato\ da$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

Matrice inversa

Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $det\, A \neq 0$.

In tal caso, detto n l'ordine di A, la matrice inversa di A si calcola nel modo seguente:

se $n = 1$ *e* $A := (a_{11})$ *si ha* $A^{-1} = (a_{11}^{-1})$;

se $n > 1$ *l'elemento* b_{ij} *di posto* (i, j) *della matrice* A^{-1} *è dato da*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

$+$	$-$	$+$	$\cdots$
$-$	$+$	$-$	$\cdots$
$+$	$-$	$+$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

<u>Attenzione</u>:

1. Consideriamo il determinante della matrice aggiunta A_{ji}
2. Lo dividiamo per il $det\, A \neq 0$
3. Lo moltiplichiamo per -1 elevato alla somma degli indici

Matrice inversa

se $n > 1$ *l'elemento* b_{ij} *di posto* (i, j) *della matrice* A^{-1} *è dato da*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}.$$

Esempio (1):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

det A ≠ 0

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \frac{\det A_{11}}{\det A} = \frac{3}{3} = 1$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \frac{\det A_{21}}{\det A} = -\frac{2}{3}$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1} \frac{\det A_{12}}{\det A} = -\frac{0}{3} = 0$$

$$b_{22} = (-1)^{2+2} \frac{\det A_{22}}{\det A} = \frac{1}{3}$$

Matrice inversa

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

Esempio (2):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{12}{5}$$

$\boxed{\det A \neq 0}$

A è invertibile !

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{6}{5}, \qquad \det A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = 0, \qquad \det A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5}, \qquad \det A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{4}{5}, \qquad \det A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\det A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{26}{3}, \qquad \det A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}, \qquad \det A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{5}{12} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{26}{3} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{65}{18} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Proprietà dell'inversa

L'inversa di una matrice invertibile A è una matrice invertibile.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \qquad \boxed{\det A \neq 0}$$

Dimostrazione:

Bisogna verificare che vale (def.): $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

A^{-1} è per definizione l'inversa di A

e quindi i due prodotti indicati sopra sono validi.

Inoltre, dal teorema di Binet si ha:

$$1 = \det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}$$

Proprietà dell'inversa

Date due matrici invertibili *A* e *B* dello stesso ordine, anche il prodotto *AB* è invertibile e si ha:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>Dimostrazione</u>:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = \\ &= AIA^{-1} = AA^{-1} = I\end{aligned}$$

Proprietà dell'inversa

Data una matrice invertibile A, la sua trasposta è invertibile e si ha:

$$({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$$

<u>Dimostrazione</u>:

Data una matrice invertibile A: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Per la trasposta di un prodotto si ha: ${}^{t}A\,{}^{t}(A^{-1}) = {}^{t}(A^{-1}A)$

Segue: ${}^{t}A\,{}^{t}(A^{-1}) = {}^{t}I$

La trasposta della matrice identità è la matrice identità, per cui:

${}^{t}A\,{}^{t}(A^{-1}) = I$

Proprietà dell'inversa

$$\textit{Date } A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ B \in \mathrm{M}(n,r,\mathbb{R}) \textit{ e } C \in \mathrm{M}(n,r,\mathbb{R}) \textit{ si ha:}$$

$$\textit{se } AB = AC \textit{ allora } B = C.$$

<u>Dimostrazione</u>:

Moltiplicando a sinistra ambo i membri per l'inversa di A si ha:

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC$$

$$IB = IC$$

$$B = C$$

Proprietà dell'inversa

$$\textit{Date } A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ B \in \mathrm{M}(n,r,\mathbb{R}) \textit{ e } C \in \mathrm{M}(n,r,\mathbb{R}) \textit{ si ha:}$$

$$\textit{se } AB = AC \textit{ allora } B = C.$$

Si dimostra in modo analogo al precedente che:

$$\textit{Date } A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}),\ B \in \mathrm{M}(r,n,\mathbb{R}) \textit{ e } C \in \mathrm{M}(r,n,\mathbb{R}) \textit{ si ha:}$$

$$\textit{se } BA = CA \textit{ allora } B = C.$$

Sistemi di equazioni lineari

Una equazione in una incognita

Obiettivo: come determinare le eventuali soluzioni di una equazione lineare in una incognita

Esempi di equazioni lineari in una incognita:

$3x = 2$ => SOLUZIONE $$x = \frac{2}{3}$$

$0x = 2$

$0x = 0$

Una equazione in una incognita

Obiettivo: come determinare le eventuali soluzioni di una equazione lineare in una incognita

Esempi di equazioni lineari in una incognita:

$$3x = 2$$

$0x = 2 \Rightarrow$ NO SOLUZIONE

$$0x = 0$$

Una equazione in una incognita

Obiettivo: come determinare le eventuali soluzioni di una equazione lineare in una incognita

Esempi di equazioni lineari in una incognita:

$$3x = 2$$

$$0x = 2$$

$0x = 0$ => INFINITE SOLUZIONI,

tale equazione si dice **identicamente soddisfatta**

Una equazione in una incognita

Esercizio di base: Perche esistono infinite equazioni lineari in una incognita?

Ogni equazione lineare in una incognita può scriversi:

$$ax = b$$

Essa è determinata da due numeri qualsiasi:

- il coefficiente a della x (incognita)
- il termine noto b

Poiché i numeri sono infiniti, le equazioni sono infinite.

Una equazione in una incognita

Ogni equazione lineare in un'incognita può scriversi:

$$ax = b$$

Fissati i numeri a e b, l'equazione precedente ha soluzioni? Quante?

Procedimento: Isoliamo l'incognita x, ovvero moltiplichiamo ambo i membri per l'inverso di a. Abbiamo due casi:

1. $a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1}b \Rightarrow$ Abbiamo **una sola soluzione**

2. $a = 0 \Rightarrow$ primo membro è nullo, secondo membro?

sama@ing.uniroma3.it

Una equazione in una incognita

Ogni equazione lineare in un’incognita può scriversi:

$$ax = b$$

2. $a = 0$ => primo membro è nullo, secondo membro?

- *2.1* Sotto caso $b \neq 0$ => I due membri dell'equazione sono diversi qualunque valore assuma la x. Quindi **no soluzioni**.

- *2.2* Sotto caso $b = 0$ => I due membri dell'equazione sono uguali a 0, qualsiasi valore assuma la x. **Infinite soluzioni**.

Due equazioni in due incognite

Obiettivo: come determinare le eventuali soluzioni di due equazioni lineari in due incognite

Esempi di due equazioni lineari in due incognite: **sistema**

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

Una soluzione di un sistema S è una coppia di numeri (h, k) che, sostituita nelle due equazioni alla coppia (x, y), da due uguaglianze

Due equazioni in due incognite

$$S\colon\ \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

La coppia (-2, 3) è una soluzione del nostro sistema?

No, ecco perché:

$$\begin{cases} -2 + 2 \cdot 3 = 4 \ ✓ \\ -2 + 5 \cdot 3 = 6 \ ✗ \end{cases}$$

Due equazioni in due incognite

$$S\colon \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

La coppia (8/3, 2/3) è una soluzione del nostro sistema?

Sì, ecco perché:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{3} + 2 \cdot \dfrac{2}{3} = 4 \checkmark \\ \dfrac{8}{3} + 5 \cdot \dfrac{2}{3} = 6 \checkmark \end{cases}$$

Come si è potuta determinare tale soluzione?

Ci sono altre soluzioni a tale sistema?

Due equazioni in due incognite

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

Procedimento per determinare le soluzioni al sistema *S*:

1. Sottraendo alla seconda equazione la prima equazione, si ha:

$$S': \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 2 \end{cases}$$

sistema equivalente ad *S*

Da cui: $y = 2/3$

e sostituendo $y = 2/3$ nella prima equazione si ha $x = 8/3$

Due equazioni in due incognite

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 2 \end{cases}$$

Sistema *S* è **equivalente** a sistema *S'*

significa *S* ha le stesse soluzioni di *S'*

<u>Trasformazioni possibili</u>:

• Sommare a un'equazione del sistema un'altra equazione moltiplicata per una costante (abbiamo sommato alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per – 1)

• *Moltiplicare un'equazione per una costante non nulla*

(Per determinare *y* abbiamo moltiplicato la seconda equazione per 1/3 trovando *y* = 2/3)

Due equazioni in due incognite

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 2 \end{cases}$$

Sistema *S* è **equivalente** a sistema *S'*

significa *S* ha le stesse soluzioni di *S'*

<u>Trasformazioni possibili</u>:

- Possiamo anche *scambiare tra loro due equazioni*:

$$\begin{cases} x + 5y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

sistema equivalente a *S* (e *S'*)

Due equazioni in due incognite

<u>Esercizio di base</u>:

Determinare le eventuali soluzioni del sistema:

$$S: \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$$

Sommiamo alla II equazione la I equaz. moltiplicata per – 3/2

$$S': \begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ \qquad 2y = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Il sistema ha quindi una sola soluzione: (x = 13/4, y = – 7/4)

Due equazioni in due incognite

In generale abbiamo il seguente sistema di equazioni:

$$S\colon \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Vedremo nel corso che:

se $ae - bd \neq 0$, allora il sistema ha una sola soluzione (Cramer)

se $ae - bd = 0$, allora il sistema ha nessuna soluzione oppure ha infinite soluzioni (Rouché - Capelli)

=> situazione analoga al caso una equazione e una incognita!

sama@ing.uniroma3.it

Molte equazioni in molte incognite

<u>Obiettivo</u>: come determinare le eventuali soluzioni di q equazioni lineari in p incognite, p e q numeri interi positivi

Per indicare q incognite si usano i seguenti simboli:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q$$

Abbiamo j è un numero intero tale che $1 \leq j \leq q$, dunque la j-esima incognita è indicata con il simbolo x_j

Indichiamo con il simbolo a_{ij} il coefficiente della j-esima incognita appartenente alla i-esima equazione: $a_{ij}\, x_j$

Molte equazioni in molte incognite

Sistema generico di p equazioni in q incognite:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Il numero a_{ij} con $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ e il coefficiente della j-esima incognita appartenente alla i-esima equazione.

Molte equazioni in molte incognite

Sistema generico di p equazioni in q incognite:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Una soluzione del sistema S:

q-upla di numeri reali $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_q)$ che, sostituiti nelle equazioni del sistema S alle incognite $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, danno delle identità.

Molte equazioni in molte incognite

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Matrice dei coefficienti del sistema:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Equivale a una tale tabella con *p* righe e *q* colonne

Molte equazioni in molte incognite

Consideriamo alcuni sistemi e calcoliamo le matrici associate:

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tale sistema non ha no soluzioni

$$S: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tale sistema ha infinite soluzioni

Teorema di Cramer

Teorema di Cramer

Un sistema di *n* equazioni lineari a coefficienti reali in *n* incognite:

$$AX = B \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se $det\, A \neq 0$, il sistema ammette <u>una e una sola soluzione</u> data da:

$$X = A^{-1}B$$

<u>Dimostrazione</u>:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Teorema di Cramer

Un sistema di *n* equazioni lineari a coefficienti reali in *n* incognite:

$$AX = B$$

Se *det A* $\neq 0$, il sistema ammette una e una sola soluzione data da:

$$X = A^{-1}B$$

SOLUZIONE:

$$x_i = \frac{\det A(i)}{\det A} \qquad con\ 1 \leq i \leq n$$

dove $A(i)$ è la matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima colonna di A con la colonna B dei termini noti.

Un sistema lineare di *n* equazioni in *n* incognite la cui matrice dei coefficienti sia invertibile si dice **Crameriano**.

Teorema di Cramer

Esercizio (1):

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \qquad + z = 1 \\ x + y \qquad = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{(2, 0, -1)}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{det}\, A = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$

Teorema di Cramer

Esercizio (1):

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{(2, 0, -1)}$$

unica soluzione del sistema

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1$$

Come controllo possiamo sostituire i valori di $(x, y, z) = (2, 0, -1)$ nelle equazioni del sistema e verificare che sono tutte soddisfatte:

$$\begin{cases} 2 + 0 + (-1) = 1 \\ 2 + (-1) = 1 \\ 2 + 0 = 2 \end{cases}$$

Teorema di Cramer

Esercizio (2): Determinare la soluzione del sistema: *det A* = 36

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = -\frac{1}{12} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{1}{6}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{36} = \frac{1}{4} \qquad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{36} = 0$$

Esercizio: Verificare che la soluz. (x_1, x_2, x_3, x_4) trovata è ammissibile.