LAVORO ed ENERGIA

CdS Ingegneria Informatica
A.A. 2019/20

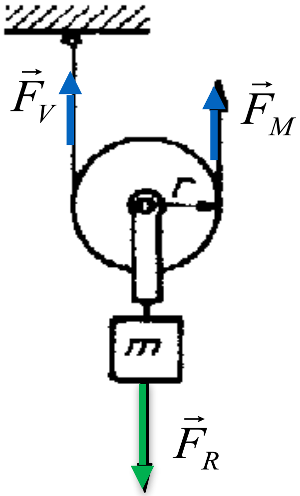
Lavoro ed Energia: definizioni intuitive

- Lavoro: caratteristica di una forza di operare uno spostamento
- L'energia è la capacità di produrre lavoro
- Il lavoro è il processo attraverso il quale una certa quantità di energia si trasferisce da un corpo a un altro.
- Ingredienti per una definizione più rigorosa di Lavoro: forza e movimento

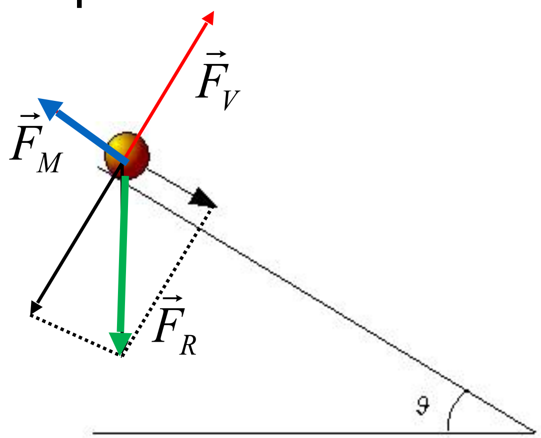
Lavoro ed Energia: Macchine

Una macchina è un dispositivo vincolato capace di spostare il punto di applicazione di una forza, chiamata “resistente”, sfruttando un’altra forza chiamata “motrice”.

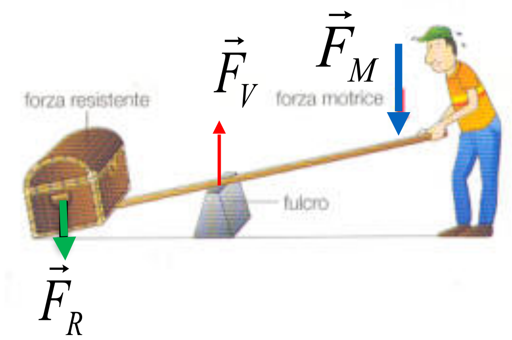
carrucola



piano inclinato



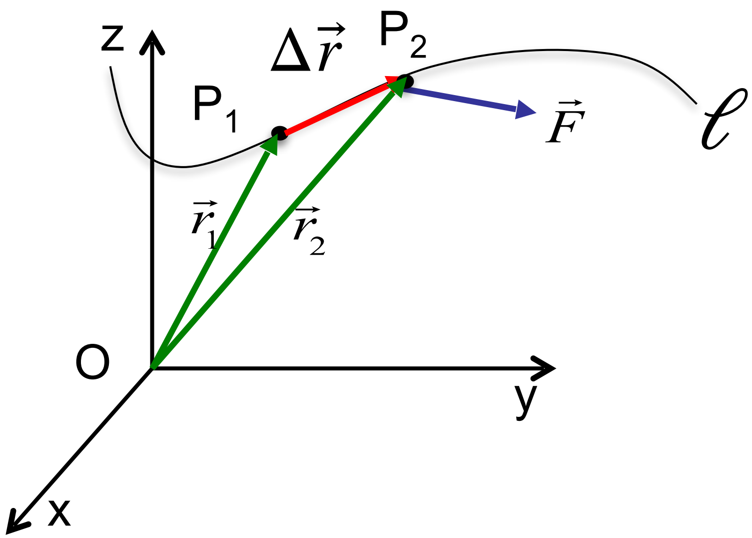
leva



Una macchina “vantaggiosa” sposta il punto di applicazione di una forza resistente utilizzando una forza motrice di modulo più piccolo.

Definizione di lavoro infinitesimo

Per definire lavoro infinitesimo compiuto da una forza:



- Regione di spazio in cui agisce $\vec{F}$
- Punto P si muove lungo linea curva ℓ

In un intervallo di tempo Δt i, punto si sposta da P_1 a P_2 : $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Se Δt piccolo, $\Delta\vec{r} \to d\vec{l} = \hat{u}_t dl$ tangente

Lavoro infinitesimo compiuto da $\vec{F}$ durante uno spostamento infinitesimo $d\vec{l}$ la quantità scalare:

$$\boxed{\delta\mathscr{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

Lavoro infinitesimo δL perché non è un differenziale esatto (in generale non dipende solo dagli estremi in cui si integra).

Definizione di lavoro infinitesimo

Lavoro infinitesimo compiuto da una forza:

$$\delta\mathscr{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = |\vec{F}||d\vec{l}|\cos\theta = Fdl\cos\theta$$

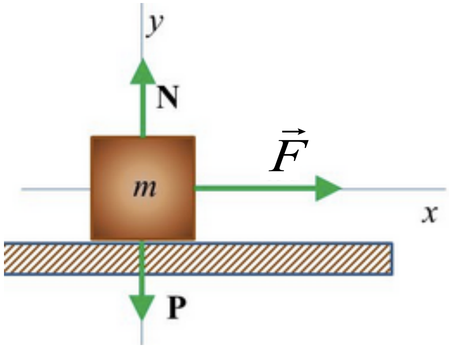
Se chiamo $F_t = F\cos\theta$ la componente della forza lungo la tangente allo spostamento allora

$$\boxed{\delta\mathscr{L} = F_t dl}$$

Il lavoro infinitesimo è il prodotto dello spostamento per la componente della forza lungo lo spostamento

Se la forza è $\perp$ allo spostamento: $\delta\mathscr{L} = 0$

Es:

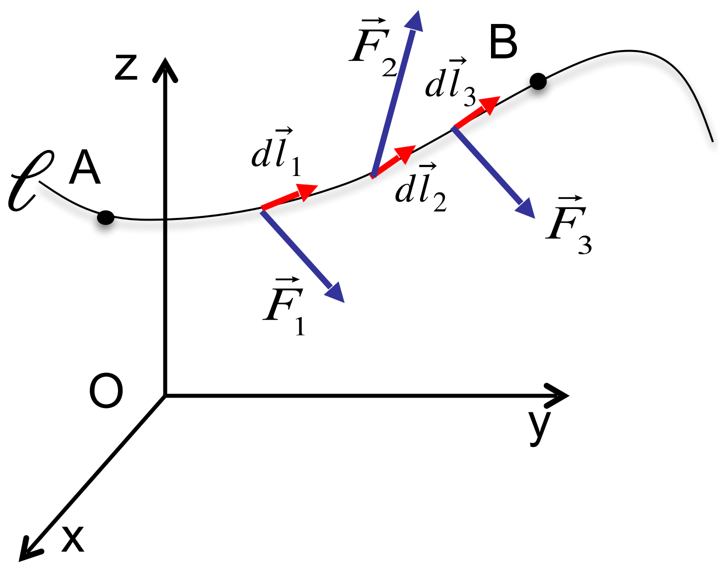


$$\delta\mathscr{L}_{peso} = 0$$

$$\delta\mathscr{L}_{forza\ \vec{F}} \neq 0$$

NB:definizioni valgono per qualsiasi forza, non è detto sia quella che causa il moto!

Definizione di lavoro



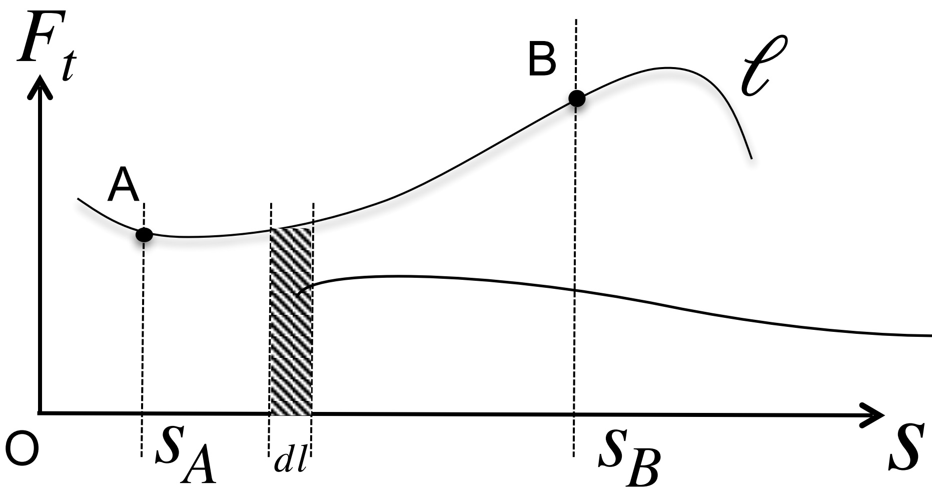
Il lavoro totale compiuto dalla forza su un punto materiale in un intervallo di tempo in cui il punto si sposta da A a B è la somma di tutti i lavori infinitesimi:

$$\mathscr{L} = \sum_i \delta\mathscr{L} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{l}_i$$

Il lavoro compiuto da una generica forza $\vec{F}$, il cui punto di applicazione **P** si sposta da A a B lungo una linea ℓ, è l'integrale esteso a tale linea del prodotto scalare fra la forza $\vec{F}$ e lo spostamento infinitesimo $d\vec{l}$:

$$\mathscr{L}_{\ell(A,B)} = \int_{A \atop \ell}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Graficamente

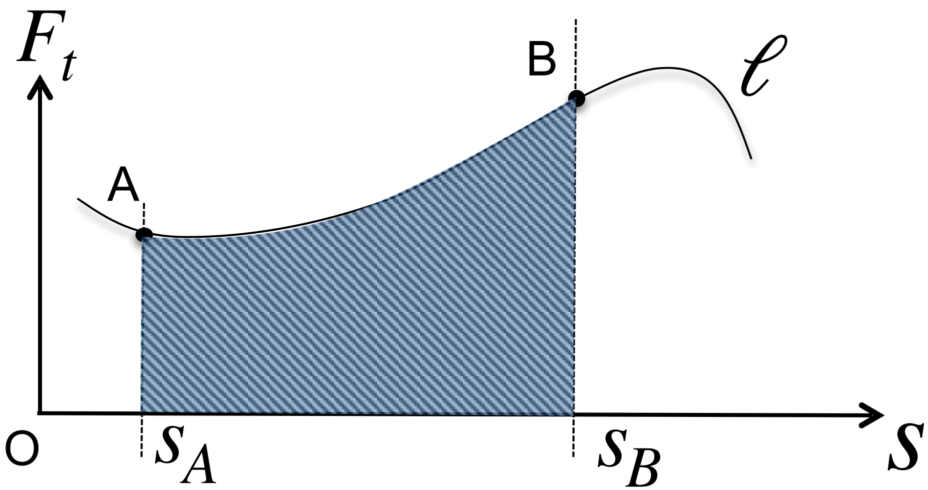


Il lavoro infinitesimo in un tratto di s è pari all'area tratteggiata

$$\delta\mathscr{L} = F_t dl$$

In un piano in cui rappresentiamo F_t in funzione dell'ascissa curvilinea s, sia F_t che s sono funzioni della particolare traiettoria: s_A e s_B variano cambiando il percorso da A a B. Fissata una certa traiettoria…

Graficamente



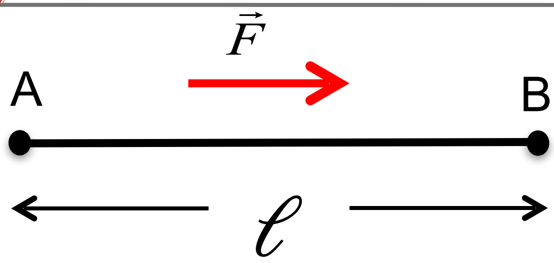
Il lavoro totale è pari all'area sotto la curva compresa fra i due estremi fra cui si sposta il punto materiale

In un piano in cui rappresentiamo F_t in funzione dell'ascissa curvilinea s, sia F_t che s sono funzioni della particolare traiettoria: s_A e s_B variano cambiando il percorso da A a B. Fissata una certa traiettoria…

$$\mathscr{L} = \int_A^B F_t dl$$

Esempi

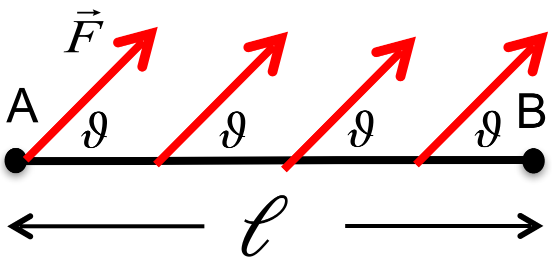
1.



$F_T = \left|\vec{F}\right| = F$ costante in modulo, direzione e verso

$$\mathscr{L}_{\ell(A,B)} = \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} F_t dl = F_t \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} dl = F_t \ell$$

2.



$F_t = |\vec{F}| \cos\theta = F\cos\theta$ costante in modulo

$$\mathscr{L}_{\ell(A,B)} = \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} F\cos\theta dl = F\cos\theta \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} dl = F\ell\cos\theta$$

In generale in coordinate cartesiane: forza posizionale

$$\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{\imath} + F_y(x,y,z)\hat{\jmath} + F_z(x,y,z)\hat{k}$$
$$d\vec{l} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$$

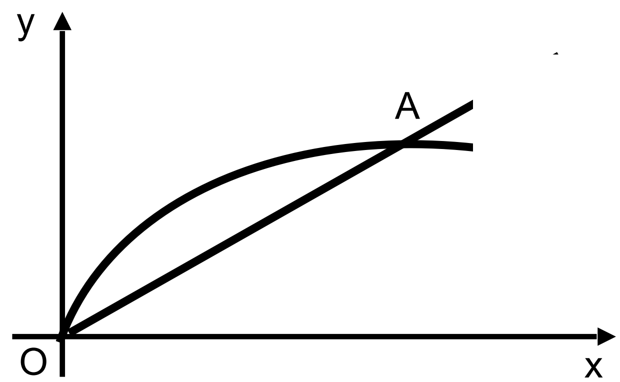
Integrale generalmente non scomponibile!

$$\boxed{\mathscr{L} = \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} \vec{F}(x,y,z) \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{A \\ \ell}}^{B} \left[F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz\right]}$$

Esercizio

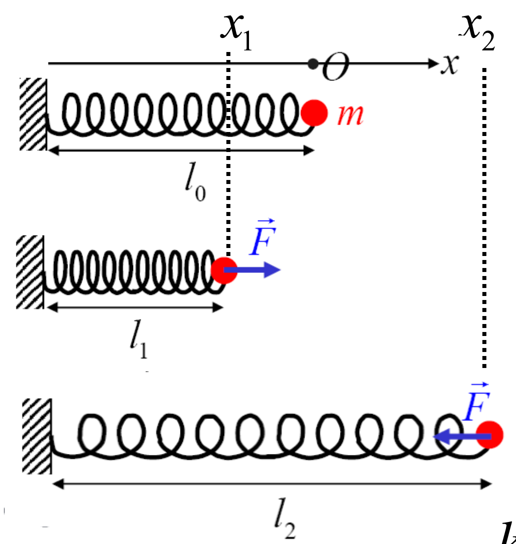
Calcolare il lavoro della forza $\vec{F}(x,y,z) = ky^2\hat{i} + hx\hat{j}$ con k e h costanti che agisce sul piano (x,y) sulle traiettorie:

1) Lungo un segmento rettilineo che congiunge l'origine con un punto A=(a,b);
2) Lungo l'arco di parabola OA avente vertice nell'origine e per asse l'asse x.



Lavoro di una forza elastica

Esempio: lavoro compiuto da una molla compressa da l_1 fino all' espansione l_2



$$\vec{F} = -k\,x\,\hat{i} \qquad \vec{dl} = dx\,\hat{\imath}$$

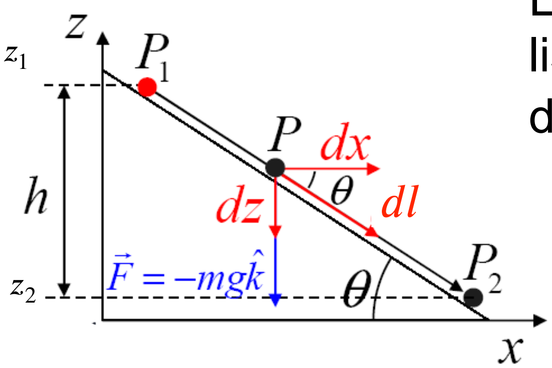
$$\delta\mathscr{L} = \vec{F}\cdot d\vec{l} = (-kx\hat{\imath})\cdot(\hat{\imath}dx) = -\,kxdx(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}) = -\,kxdx$$

$$\mathscr{L}_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\,k\int_{x_1}^{x_2} x dx$$

$$-k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}x_1^2 = -\frac{k}{2}\left(l_2 - l_0\right)^2 + \frac{k}{2}\left(l_1 - l_0\right)^2$$

$$\boxed{\mathscr{L}_{1,2} = -\frac{k}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)}$$

Lavoro della forza peso



Esempio: punto materiale di massa m scivola su un piano liscio inclinato di un angolo da un punto P_1 a un punto P_2 a differenza di quota h

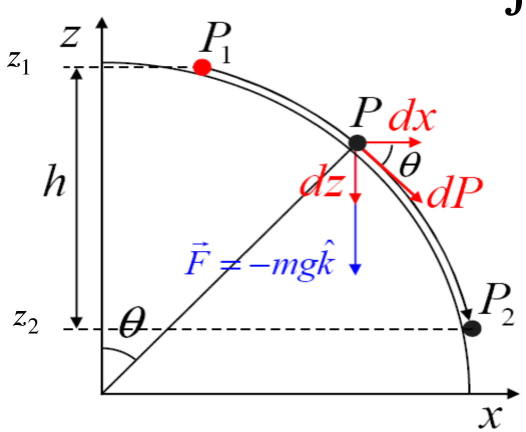
$$\vec{F} = -mg\hat{k} \qquad \vec{dl} = dx\,\hat{i} + dz\hat{k}$$

Lavoro infinitesimo

$$\delta\mathscr{L} = \vec{F}\cdot d\vec{l} = (-mg\hat{k})\cdot(\hat{\imath}dx + \hat{k}dz) =$$
$$= -mg(\hat{k}\cdot\hat{\imath}) - mg(\hat{k}\cdot\hat{k}) = -mgdz$$

Lavoro totale

$$\mathscr{L}_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{l} = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = -mg\left(z_2 - z_1\right) = mgh > 0$$



Stessa conclusione se al posto del piano inclinato abbiamo un profilo curvo.

$$\boxed{\mathscr{L}_{1,2} = mgh}$$

h = differenza di quota a cui si porta il punto

Proprietà additiva dei lavori

Punto materiale soggetto a N forze, equivale a un punto soggetto alla risultante delle forze

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

Lavoro infinitesimo di ciascuna forza: $\delta\mathscr{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

Lo spostamento è lo stesso per ogni forza perché agiscono tutte sulla stessa particella che compie un tratto di traiettoria.

Lavoro infinitesimo totale:

$$\delta\mathscr{L}_{tot} = \delta\mathscr{L}_1 + \delta\mathscr{L}_2 + \ldots = \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} + \ldots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots) \cdot d\vec{l} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{l} = \vec{R} \cdot d\vec{l}$$

Date n forze $\boldsymbol{F_i}$, applicate allo stesso punto **P**, che si muove lungo una propria curva ℓ dal punto A al punto B, il lavoro complessivo è dato da….

$$\mathscr{L}^{\ell}_{tot} = \int_{A,\,\ell}^{B} \vec{R} \cdot d\vec{l} = \int_{A,\,\ell}^{B} \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{l} = \int_{A,\,\ell}^{B} \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{l}\right) = \sum_i \left[\int_{A,\,\ell}^{B} \vec{F}_i \cdot d\vec{l}\right] = \sum_i \mathscr{L}^{\ell}_i$$

Somma dei lavori delle singole forze.

Potenza di una forza

Def: capacità di produrre lavoro per unità di tempo

$$P = \frac{\delta \mathscr{L}}{dt}$$

Lavoro compiuto da una forza per unità di tempo durante un intervallo di tempo infinitesimo

- Per un punto materiale:

$$P = \frac{\delta \mathscr{L}}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

$$\delta \mathscr{L} = Pdt \implies \boxed{\mathscr{L} = \int Pdt}$$

Nuova definizione di lavoro

Analisi dimensionale

Lavoro

$$\left[L\right]=\left[F\cdot ds\right]=\left[N\cdot m\right]=\left[kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m\right]=\left[MLT^{-2}L\right]\Rightarrow\boxed{\left[L\right]=\left[ML^2T^{-2}\right]}$$

Unitá di misura: SI-MKS

$$\boxed{Joule(J)=N\cdot m}$$

Potenza

$$\left[P\right]=\left[\frac{L}{\Delta t}\right]=\left[\frac{F\cdot ds}{\Delta t}\right]=\left[\frac{N\cdot m}{s}\right]=\left[kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot m\cdot\frac{1}{s}\right]=\left[MLT^{-2}LT^{-1}\right]\Rightarrow\boxed{\left[P\right]=\left[ML^2T^{-3}\right]}$$

Unitá di misura: SI-MKS

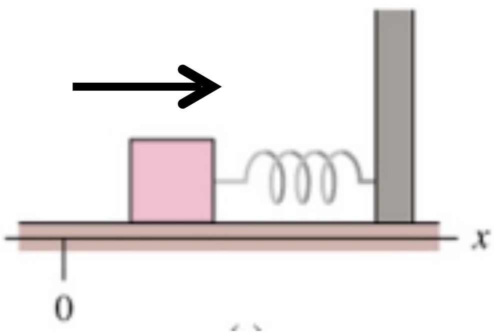
$$\boxed{Watt(W)=Joule/s}$$

Esercizio

Determinare la potenza istantanea sviluppata durante la caduta su un piano inclinato di un angolo α alto h da un punto A in cima al piano ad un punto B in fondo al piano da un punto materiale di massa m.

Teorema delle Forze Vive

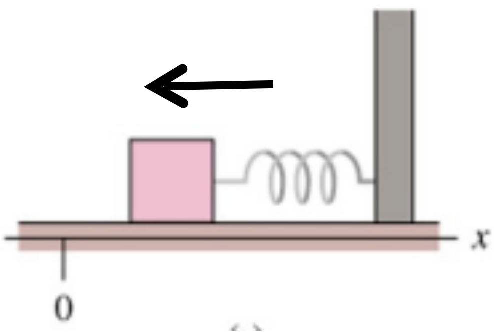
- Lavoro: scalare legato alla forza e allo spostamento
- Maxwell: "il lavoro è l'atto con cui viene realizzata una modificazione (deformazione o spostamento) nella configurazione di un sistema materiale contro le forze che a questa modificazione si oppongono"
- Il lavoro è una forma di energia. Es: macchina che compie lavoro trasferisce energia da un corpo all'altro.



Es: Corpo in moto con velocità v su piano orizzontale liscio contro molla. Corpo comprime molla perdendo velocità. Molla esercita forza tale che $\overrightarrow{F}$ e dx opposti e $\mathscr{L} < 0$

Teorema delle Forze Vive

- Lavoro: scalare legato alla forza e allo spostamento
- Maxwell: “il lavoro è l’atto con cui viene realizzata una modificazione (deformazione o spostamento) nella configurazione di un sistema materiale contro le forze che a questa modificazione si oppongono”
- Il lavoro è una forma di energia. Es: macchina che compie lavoro trasferisce energia da un corpo all’altro.



Alla fine del moto il corpo è fermo e molla compressa esercita forza che tende a ridistenderla, in grado di rimettere in moto il corpo. In questo caso $\overrightarrow{F}$ e dx hanno stesso verso e $\mathscr{L} > 0$

Sperimentalmente $\overrightarrow{v}_{finale} = -\overrightarrow{v}_{iniziale}$

Relazione fra velocità e lavoro

Teorema delle Forze Vive

Descrive il lavoro compiuto da un sistema di forze qualunque (attive, vincolari, interne, esterne, di interazione o apparenti), su un sistema meccanico qualunque (puntiforme, esteso, rigido, non rigido, vincolato, ecc.).

Teorema delle forze vive per il punto materiale:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

principio: risultante di tutte le forze

$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l}$$

Lavoro compiuto da tutte le forze per spostare corpo da A a B lungo un tratto di traiettoria

$$d\vec{l} = \vec{v}dt \implies \mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}dt$$

Sostituisco la definizione di $d\vec{l}$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Proprietà delle derivate

$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = \int_A^B m\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}dt = \frac{1}{2}m\int_A^B dv^2 = \frac{1}{2}m\left[v^2\right]_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Teorema delle Forze Vive

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

***Energia Cinetica**:*
1. Ha le dimensioni del lavoro $[T] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = \left[ML^2T^{-2}\right] \rightarrow \text{Joule}$
2. Non è mai negativa (T>=0)

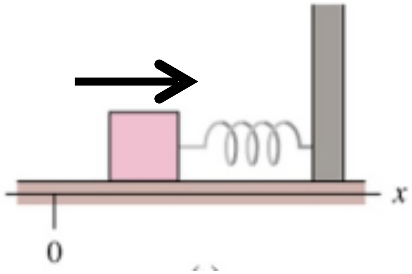
$$\mathscr{L}_{A,B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = T_B - T_A$$

*Il lavoro compiuto **dalla risultante delle forze** che agiscono su un sistema meccanico qualunque, nel passaggio da una configurazione A ad un'altra B, è uguale alla corrispondente variazione dell'energia cinetica di tale sistema.*

Se $\mathscr{L} > 0 \implies v_B > v_A \rightarrow$ forza ha accelerato il corpo compiendo un lavoro positivo

Se $\mathscr{L} < 0 \implies v_B < v_A \rightarrow$ forza ha decelerato il corpo compiendo un lavoro negativo

Energia Potenziale



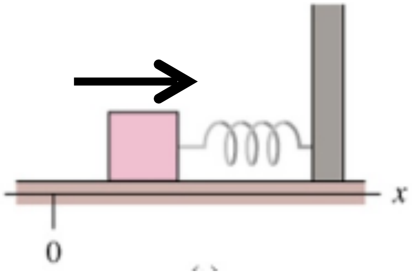
Corpo in moto su un piano orizzontale liscio contro una molla ideale

- velocità iniziale del carrello v_0,
- velocità finale nulla poiché comprime una molla che esercita una forza opposta allo spostamento del corpo provocandone l'arresto.

Lavoro sul corpo (teorema delle forze vive):

$$\mathscr{L}_{corpo} = T_{fin} - T_{in} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 < 0$$

Energia Potenziale



Dal punto di vista della molla…

- Molla inizialmente in quiete si comprime per effetto di una forza premente.
- Chi produce la forza compressiva è il carrello e l'entità della compressione è una misura della forza agente.
- Forza reagente della molla è uguale e opposta alla forza premente.

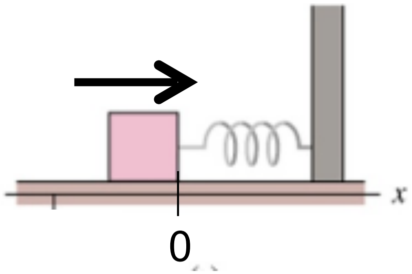
Lavoro sulla molla (teorema delle forze vive):

$$\mathscr{L}_{molla} = T_{fin} - T_{in} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = -\mathscr{L}_{corpo} > 0$$

Energia Potenziale

- Corpo in ragione della velocità compie un lavoro positivo sulla molla comprimendola;
- Energia di un corpo: possibilità di un corpo di compiere un lavoro positivo;
- Energia del carrello in moto si trasferisce gradualmente alla molla;
- Quando il carrello si ferma, tutta la sua energia cinetica iniziale è trasferita alla molla compiendo un lavoro positivo su di essa;
- Molla immagazzina l'energia del corpo comprimendosi;
- Molla poi rilascia gradualmente l'energia immagazzinata distendensosi e imprimendo al corpo una velocità uguale e contraria: restituisce energia cinetica al carrello;
- energia totale immagazzinata dalla molla ridiventa interamente energia cinetica

Energia Potenziale



$$\vec{v} = v_0 \hat{i}$$

$$\vec{F}_{el} = -kx\hat{i}$$

Molla compressa di una certa quantità a ad un certo tempo t>0

Lavoro forza elastica: $\mathscr{L}_{el} = \int_{in}^{fin} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \int_{in}^{fin} (-kx\hat{\imath}) \cdot (\hat{\imath} dx) = \int_{in}^{fin} -kxdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{in}^{fin} = -k\frac{x^2}{2}$

Teorema forze vive: $\mathscr{L}_{el} = T_{fin} - T_{in} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

Uguagliando: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -k\frac{x^2}{2} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv^2 + k\frac{x^2}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}mv_0^2}$

Energia iniziale: cinetica

Energia totale istantanea durante la compressione

$k\frac{x^2}{2}$ Lavoro che sarebbe in grado di fornire la molla ridistendendosi -> misura dell'energia propria immagazzinata dalla molla: **Energia potenziale**

La somma dell'energia cinetica e di quella potenziale si conserva IN QUESTO moto.

Esercizio

Un blocco di ghiaccio è in moto su una salita inclinata di $\alpha = 6°$ Sapendo che all'inizio la sua velocità è pari a v = 9 m/s e che il coefficiente di attrito dinamico è pari a $\mu_c = 0.07$, di quanto si sposta lungo il piano inclinato il blocco di ghiaccio prima di fermarsi?

Esercizio

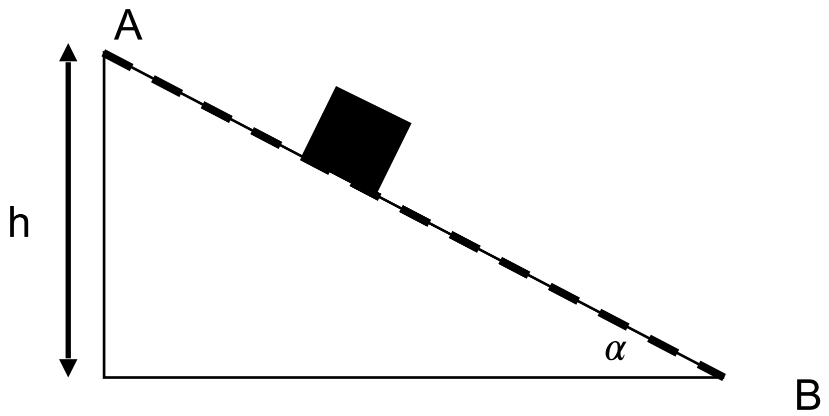
Un blocco P di massa m = 3 kg si muove di moto rettilineo su un piano orizzontale scabro nella direzione dell'asse di una molla non deformata, di cui va a colpire uno degli estremi, mentre l'altro è bloccato a un supporto verticale fisso. La molla, di costante elastica k = 300 N/m, viene compressa di $\delta = 8cm$ Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra P e il piano è $\mu_c = 0.25$, determinare:

1) I lavori compiuti durante tale compressione dalla forza elastica e dalla forza di attrito;

2) Il modulo della velocità di P nel momento in cui colpisce la molla.

Esercizio

Un cubetto P di massa m scivola lungo il segmento AB disposto lungo un piano inclinato di un angolo rispetto alla direzione orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico passa dal valore massimo di ½ alla sommità A al valore 0 alla base B secondo una legge del tipo dove e k sono costanti positive e s è la distanza da A di un generico punto di AB. Sapendo che e che P è partito da fermo in A, calcolare il modulo v della sua velocità all’istante in cui arriva in B in termini di e della variazione di quota h fra A e B.



Alcuni concetti matematici

- Derivate parziali: primo e secondo ordine, miste…
- Differenziali;
- Campi: scalari, vettoriali…

Derivate parziali

Se una funzione esiste per ogni valore della variabile nel dominio, derivate parziali al primo ordine:

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0,z_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0,z_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y, z_0)}{\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right|_{x_0,y_0,z_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0+\Delta z)}{\Delta z}$$

Se le derivate parziale al primo ordine esistono per ogni valore della variabile nel dominio, derivate parziali al secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$$

Derivate parziali miste (l'ordine non influenza)

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial z}$$

Es: $f(x,y,z) = x^3 - y^2 + 3z$

Differenziali

Sia una funzione a 3 variabili. Quanto varia il valore della funzione se ci spostiamo da un punto a un punto infinitamente vicino ?

$$f(x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz) = f(x_0, y_0, z_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} dy + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} dz$$

Più ordini successivi

Differenziale

$$dF = f(x_0+dx, y_0+dy, z_0+dz) - f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Campi

Campo scalare: una grandezza scalare funzione delle coordinate spaziali U(x,y,z) definita ovunque dentro una certa regione di spazio.

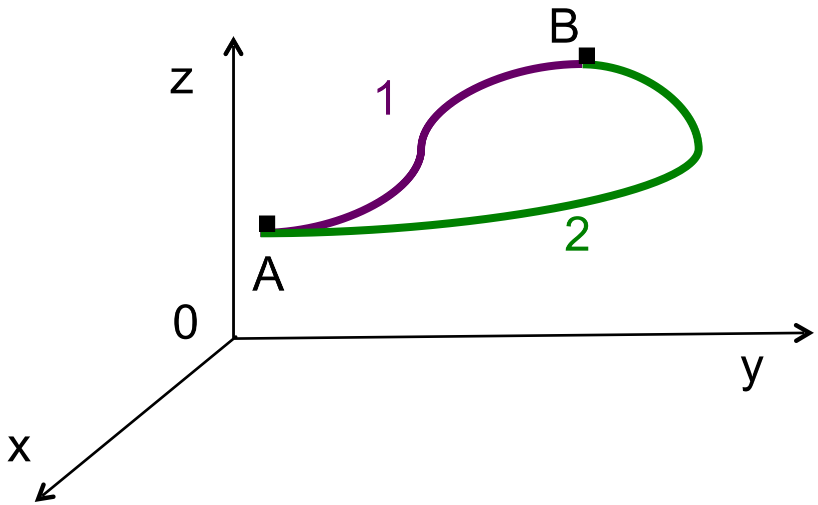
Superficie di livello: luogo geometrico dei punti dove la funzione scalare assume un valore costante prefissato
U(x,y,z) = costante -> infinite superfici

Campo vettoriale: un vettore applicato funzione delle coordinate spaziali $\vec{v}(x,y,z)$ definito ovunque dentro una certa regione di spazio

Linee di forza: una o più linee sempre tangenti al vettore del campo.
Le linee di forza sono più fitte dove il modulo del vettore è maggiore.

Campi di forze conservativi

In generale il lavoro di una forza per spostare un punto materiale su un tratto AB di traiettoria dipende dalla traiettoria



$$\mathscr{L}_{1(A,B)} = \int_{A \atop 1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathscr{L}_{2(A,B)} = \int_{A \atop 2}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}_{1(A,B)} \neq \mathscr{L}_{2(A,B)}$$

Per il teorema delle forze vive:

$$\mathscr{L}_{1(A,B)} = \frac{1}{2}m(v_B)^2 - \frac{1}{2}m(v_A)^2$$

$$\mathscr{L}_{2(A,B)} = \frac{1}{2}m(v_B')^2 - \frac{1}{2}m(v_A')^2$$

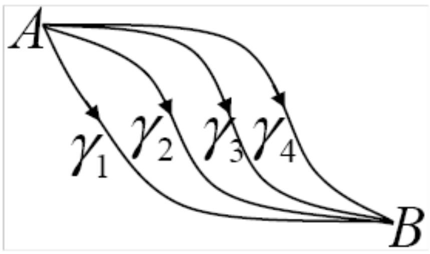
$$\Longrightarrow v_B \neq v_B'$$

$$\Longrightarrow v_A \neq v_A'$$

Le velocità agli estremi sono diverse a seconda che si percorra la curva 1 o la 2.

Campi di forze conservativi

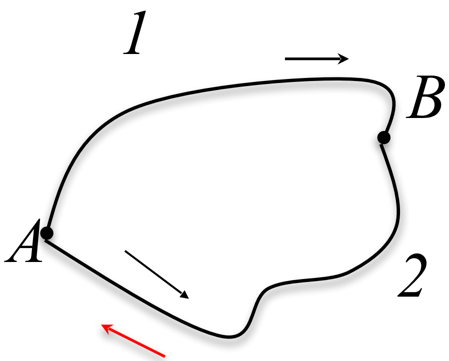
Campo di forza conservativo: forza posizionale che, spostando il suo punto di applicazione da A a B, punti qualunque del dominio di esistenza, compie un lavoro che è indipendente dalla particolare traiettoria seguita, ma dipendente soltanto dagli estremi A e B.



$$\mathscr{L}_{1(A,B)} = \mathscr{L}_{2(A,B)} = \mathscr{L}_{3(A,B)} = \ldots = \mathscr{L}_{A,B}$$

$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Campi di forze conservativi: 1ª proprietà



Campo conservativo:

$$\mathscr{L}_{1(A,B)} = \int_{\substack{A \\ 1}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathscr{L}_{2(A,B)} = \int_{\substack{A \\ 2}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_{\substack{A \\ 1}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{A \\ 2}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\substack{A \\ 1}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{\substack{A \\ 2}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{\substack{A \\ 1}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \boxed{\int_{\substack{B \\ 2}}^{A}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

1ª Proprietà

$$\boxed{\mathscr{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

Lavoro su una curva chiusa di una forza conservativa (circuitazione) è nullo

Condizione <u>necessaria</u> (se il campo è conservative allora la circuitazione è nulla) e <u>sufficiente</u> (se la circuitazione è nulla allora il campo è conservativo)

Campi di forze conservativi: 2ª proprietà

$$\underset{1}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \underset{2}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{l} \implies \mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

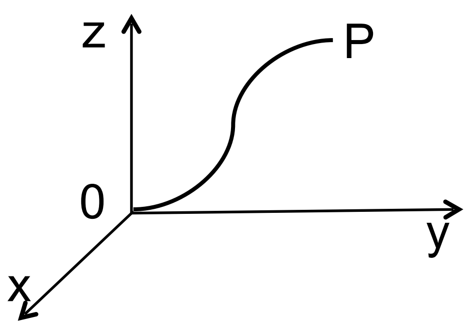
Differenziale esatto di una funzione scalare è un campo scalare

$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

Analisi: integrale fra A e B di un differenziale esatto è la differenza della primitiva fra B e A.

$U = U(x,y,z)$ funzione scalare definita in ogni punto dello spazio legata al valore della forza in quell punto. Fissata a meno di una costante additiva arbitraria: se $U(x,y,z)$ soddisfa la relazione anche $U' = U(x,y,z) + k$ lo fa

$$\mathscr{L}_{A,B} = U(B) - U(A) = \left[U'(B) - k\right] - \left[U'(A) - k\right] = U'(B) - U'(A)$$

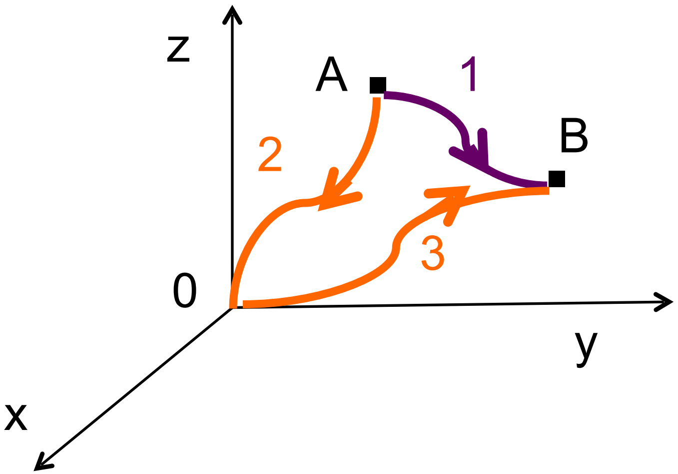


Scelgo arbitrariamente un punto in cui $U = 0$ (origine)

$$U(x,y,z) = \int_0^{P(x,y,z)} \vec{F}\cdot d\vec{l} = U(P) - U(0) = U(P)$$

U funzione solo del punto non della traiettoria

Campi di forze conservativi: 2ª proprietà



Percorso AB: A->O->B

$$\mathscr{L}_{A,B} = \underset{1}{\int_A^B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \underset{2}{\int_A^0} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \underset{3}{\int_0^B} \vec{F}\cdot d\vec{l} =$$

$$- \underset{2}{\int_0^A} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \underset{3}{\int_0^B} \vec{F}\cdot d\vec{l} =$$

$$= -\left[U(A) - U(0)\right] + \left[U(B) - U(0)\right] = U(B) - U(A)$$

Esiste una funzione scalare $U(P)$, dipendente solo dalla posizione e dalla forza, detta potenziale tale che

$$\mathscr{L}_{A,B} = U(B) - U(A)$$

2ª Proprietà

Energia potenziale

Al posto di U(P) si preferisce introdurre $V(P) = -\,U(P)$

- V(P) misura la capacità che ha il punto P di produrre lavoro quando il punto materiale ritorna all'origine.

$$V(P) = -\,U(P) = -\,\mathscr{L}_{0,P} = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_P^0 \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

Esiste una funzione scalare $V(P)$, dipendente solo dalla posizione e dalla forza, detta energia potenziale tale che

$$\mathscr{L}_{A,B} = U(B) - U(A) = V(A) - V(B)$$

2ª Proprietà

Le prime due proprietà devono essere mutualmente dimostrabili.

Forze conservative 3ª proprietà

Campo conservativo è un differenziale esatto

$$\delta\mathscr{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU = -dV$$

Per definizione

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Uguagliando

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial x}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial x}\hat{k}$$

Forze conservative 3ª proprietà

Operatore vettoriale
(operatore simbolico) nabla

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial x}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial x}\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} V}$$

3ª Proprietà

La forza è col segno meno il gradiente dell'energia potenziale

NB: l'operatore nabla non è un vettore, è un operatore che agisce sulle funzioni, come la derivata o l'integrale.
Il risultato dell'operazione dipende al tipo di funzione a cui è applicato.

Operatore Nabla

Nabla:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

È un operatore

Gradiente di una funzione scalare

$$\vec{v} = grad(f(x,y,z)) = \vec{\nabla} f = \hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

È un vettore

Divergenza di un campo vettoriale

$$f = div(\vec{v}(x,y,z)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

È uno scalare

Rotore di un campo vettoriale

$$\vec{\omega} = rot(\vec{v}(x,y,z)) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

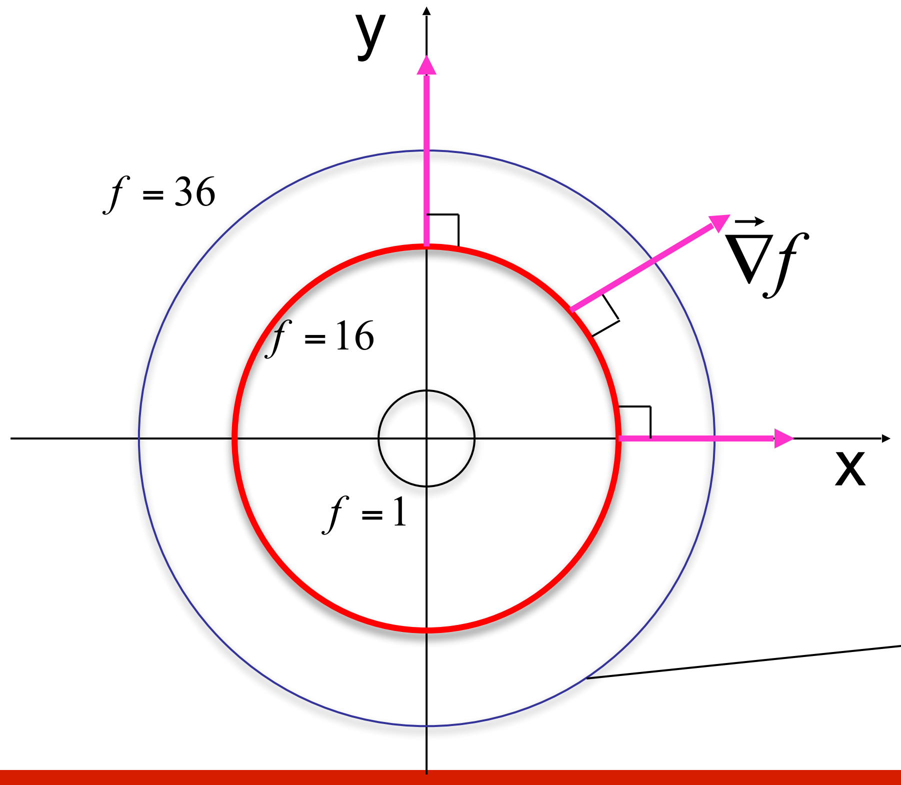
È un vettore

Significato dell'operatore gradiente

L'operatore gradiente restituisce un vettore diretto lungo la direzione in cui aumenta più velocemente la funzione scalare.

Campo scalare $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\vec{v} = grad(f) = \vec{\nabla} f = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}$$



Vettore applicato!

Diretto dove f(x,y) aumenta e $\perp$ alle superfici di livello

Superfici (linee) di livello

Forze conservative 4ª proprietà

3ª proprietà $$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial x}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial x}\hat{k} = -\vec{\nabla} V$$

Rotore $$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Sostituisco la prima nella seconda:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)$$

Proprietà delle derivate parziali seconde per funzioni continue e derivabili:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

Forze conservative 4ª proprietà

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)=$$

$$=\hat{i}\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\right)-\hat{j}\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}\right)+\hat{k}\left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right)=\vec{0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$$

4a proprietà:
se il campo è conservativo il suo rotore é nullo

Modo facile e pratico per verificare se un campo è conservativo:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di forze sia conservativo è che il rotore si annulli in tutti i punti del campo.

Riepilogo: Forze conservative

Forze posizionali il cui lavoro non dipende mai dal percorso ma solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo.

1ª Proprietà

$$\mathscr{L} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

2ª Proprietà

Esiste una funzione scalare *V(P) (=-U(P))*, detta energia potenziale, tale che

$$\mathscr{L}_{A,B} = V(A) - V(B)$$

3ª Proprietà

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

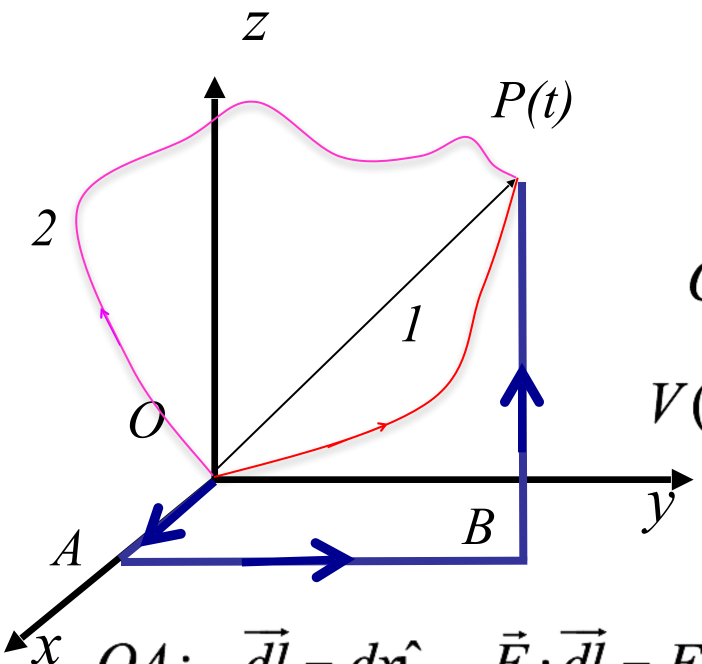
4ª Proprietà

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Tutte le proprietà sono simultaneamente necessarie e sufficienti (la verifica di una implica tutte le altre)

Calcoli di energia potenziale

Data una forza conservativa, trovare l'energia potenziale



$$V(P) = -U(P) = -\mathscr{L}_{0,P} = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_P^0 \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\mathscr{L}_{0,P} = \mathscr{L}_{1(0,P)} = \mathscr{L}_{2(0,P)} = \mathscr{L}_{(0,A,B,P)}$$

$$O(0,0,0),\quad A(\bar{x},0,0),\quad B(\bar{x},\bar{y},0),\quad P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$$

$$V(P) = -\int_{OP} \vec{F}\cdot\vec{dl} = -\left(\int_{OA} \vec{F}\cdot\vec{dl} + \int_{AB} \vec{F}\cdot\vec{dl} + \int_{BP} \vec{F}\cdot\vec{dl}\right)$$

$$OA:\quad \vec{dl} = dx\hat{\imath},\quad \vec{F}\cdot\vec{dl} = F_x dx \quad \rightarrow \int_{OA} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\bar{x}} F_x(x,0,0)dx$$

$$AB:\quad \vec{dl} = dy\hat{\jmath},\quad \vec{F}\cdot\vec{dl} = F_y dy \quad \rightarrow \int_{AB} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\bar{y}} F_y(\bar{x},y,0)dy$$

$$BP:\quad \vec{dl} = dz\hat{k},\quad \vec{F}\cdot\vec{dl} = F_z dz \quad \rightarrow \int_{BP} \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^{\bar{z}} F_z(\bar{x},\bar{y},z)dz$$

Calcoli di energia potenziale

1. Scelgo un percorso arbitrario su una spezzata

$$O(0,0,0),\quad A(\overline{x},0,0),\quad B(\overline{x},\overline{y},0),\quad P(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$$

2. Applico la definizione di energia potenziale sul percorso scelto

$$V(P) = -U(P) = -\mathscr{L}_{0,P} = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_P^0 \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

In coordinate cartesiane:

$$V(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = -\int_{OP} \vec{F}\cdot\vec{dl} = -\left(\int_0^{\overline{x}} F_x(x,0,0)dx + \int_0^{\overline{y}} F_y(\overline{x},y,0)dy + \int_0^{\overline{z}} F_z(\overline{x},\overline{y},z)dz\right)$$

Esercizio

Si consideri il campo $\vec{F}(x, y, z) = 2x\hat{\imath} - z\hat{\jmath} - ay\hat{k}$. Determinare:

a) per quali valori di a il campo risulta conservativo

b) il potenziale V generato dal campo $\vec{F}$

Esercizio

Sia dato un punto materiale di massa M su cui agisce una forza conservativa di energia potenziale: $V(x,y,z)=\alpha x^4+\beta y^2 z^2$
Sapendo che le costanti α e β sono positive, determinare:

1) l'espressione della forza;

2) le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β;

3) l'accelerazione del corpo quando passa per il punto P(0,L,L).

Conservazione dell'energia meccanica

Sistema meccanico con:
- Vincoli ideali
- Forze attive conservative

$$\boxed{\mathscr{L}_{A,B} = T(B) - T(A)}$$ Teo. forze vive

$$\boxed{\mathscr{L}_{A,B} = V(A) - V(B)}$$ Campi conservativi

Uguagliando: $\mathscr{L}_{A,B} = T(B) - T(A) = V(A) - V(B) \implies T(A) + V(A) = T(B) + V(B)$

Energia meccanica: $\boxed{E = T + V}$

Teorema della conservazione dell'energia meccanica: Per un sistema meccanico sottoposto a vincoli tutti ideali ed a forze non vincolari tutte conservative, l'energia meccanica E si conserva, ossia la somma fra l'energia cinetica T e l'energia potenziale totale V, rimane costante durante il moto.

$\boxed{E = T + V \equiv cost}$ Dimensionalmente: $[E]=[T]=[V]$ Joule

NB: A e B sono punti sulla traiettoria, l'energia si conserva lungo la traiettoria

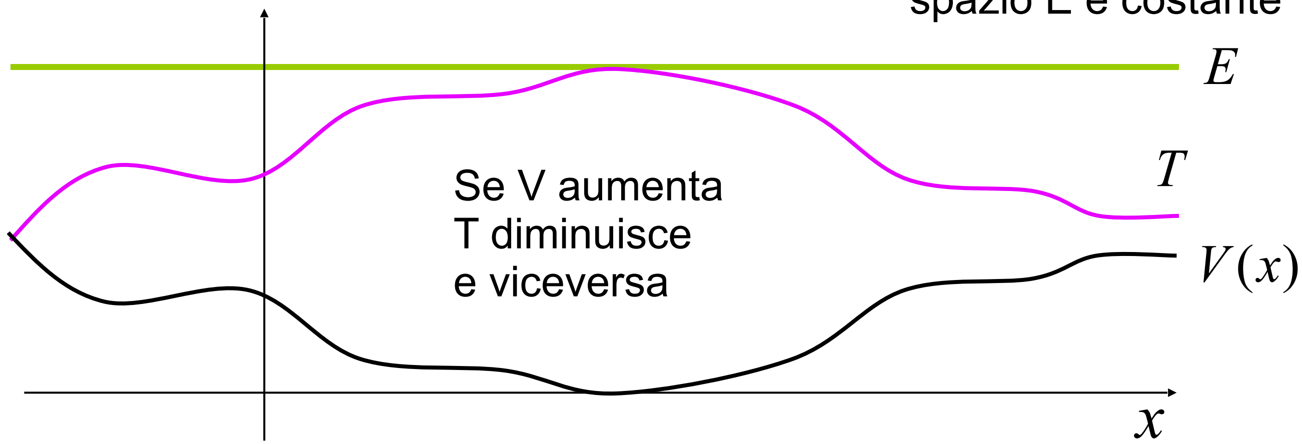
Conservazione dell'energia meccanica

$$\boxed{E = T(v) + V(x,y,z) \equiv cost}$$

In una certa regione di spazio E è costante

$$T = \frac{m}{2}v^2 = E - V \geq 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)} > 0$$



Moto possibile solo nelle regioni di spazio in cui

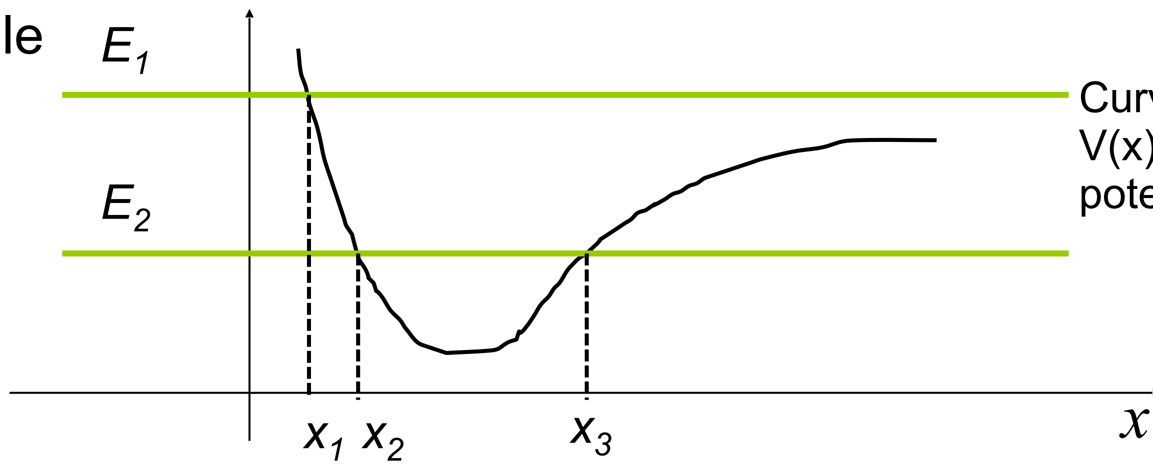
$E \geq V$ per def di T

Corpo 1: $x \geq x_1$

Stato libero

Corpo 2: $x_2 \leq x \leq x_3$

Stato legato



Curva nera: V(x) energia potenziale

Esempi: forza elastica

Forza elastica: $\boxed{\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})}$

Verificichiamo se è conservativa: $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = 0$?

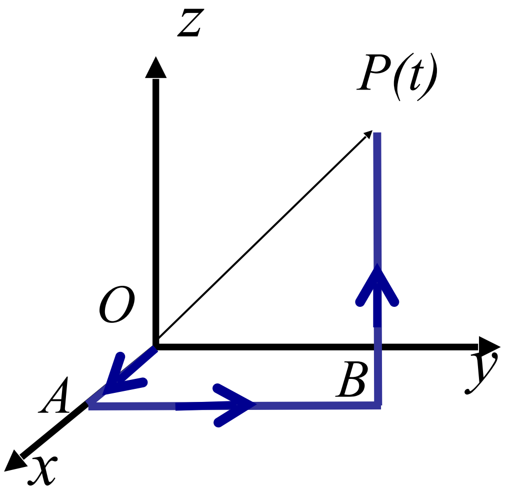
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right) =$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial(ky)}{\partial z} - \frac{\partial(kz)}{\partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial(kz)}{\partial x} - \frac{\partial(kx)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial(kx)}{\partial y} - \frac{\partial(ky)}{\partial x}\right) = \overrightarrow{0}$$

La forza elastica è conservativa

Potenziale elastico

$$\vec{F} = -k\vec{r} = -k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$



$V(P)$ calcolata sul percorso OP:

$$O(0,0,0) \rightarrow A(x,0,0) \rightarrow B(x,y,0) \rightarrow P(x,y,z)$$

$$V(P) = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_0^{(x,0,0)} F_x dx - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} F_y dy - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} F_z dz =$$

$$= \int_0^{(x,0,0)} kx\,dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} ky\,dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} kz\,dz =$$

$$= k\frac{x^2}{2} + k\frac{y^2}{2} + k\frac{z^2}{2} = \frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) = k\frac{|\vec{r}^2|}{2}$$

$$\boxed{V(P) = \frac{k}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) = k\frac{|\vec{r}^2|}{2}}$$

Esempi: forza peso

Forza peso: $\boxed{\vec{F} = -mg\hat{k}}$

Verificichiamo se è conservativa: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$?

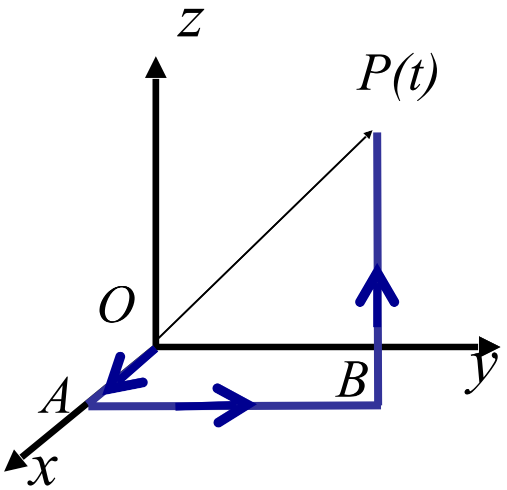
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial \cancel{F_y}}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial \cancel{F_x}}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial \cancel{F_x}}{\partial y} - \frac{\partial \cancel{F_y}}{\partial x}\right) =$$

$$= \hat{\imath}\left(-\frac{\partial(-mg)}{\partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial(-mg)}{\partial x}\right) + 0\hat{k} = \vec{0}$$

La forza peso è conservativa

Potenziale gravitazionale

$$\vec{F} = -mg\hat{k}$$



$V(P)$ calcolata sul percorso OP:

$$O(0,0,0) \rightarrow A(x,0,0) \rightarrow B(x,y,0) \rightarrow P(x,y,z)$$

$$V(P) = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_0^{(x,0,0)} \cancel{F_x}\,dx - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} \cancel{F_y}\,dy - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} F_z dz =$$

$$= \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} mg dz = mgz$$

$$\boxed{V(P) = mgz}$$

Esempi: forza costante

Forza costante: $\boxed{\vec{F} = f_x\hat{\imath} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}}$

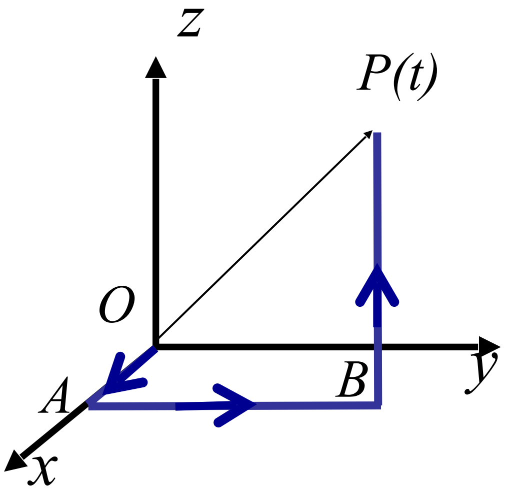
Verifichiamo se è conservativa: $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = 0$?

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}\right) = \overrightarrow{0}$$

Una forza costante è conservativa

Potenziale di una forza costante

$$\vec{F} = f_x\hat{\imath} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$$



$$V(P) = -\int_0^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_0^{(x,0,0)} f_x dx - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} f_y dy - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} f_z dz =$$

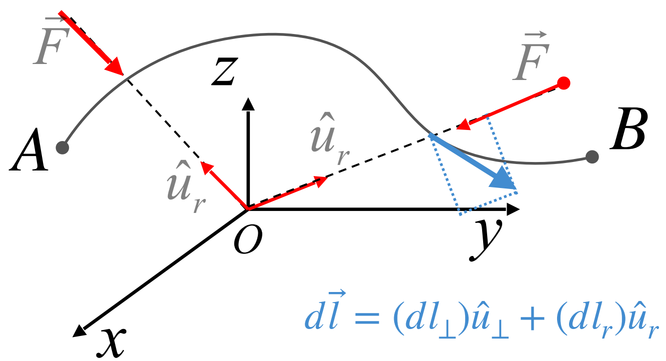
$$= -f_x\int_0^{(x,0,0)} dx - f_y\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} dy - f_z\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} dz = -f_x x - f_y y - f_z z$$

$$\boxed{V(P) = -f_x x - f_y y - f_z z}$$

Esempi: campo centrale a simmetria sferica

Forza centrale a simmetria sferica:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{u}_r}$$



Verifichiamo se è conservativa:

$$d\vec{l} = \hat{u}_\perp(dl_\perp) + \hat{u}_r(dr)$$

$$\delta\mathscr{L} = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F\hat{u}_r\cdot\left(\hat{u}_\perp dl_\perp + \hat{u}_r dr\right) = F\left(\underbrace{\cancel{u_r\cdot\hat{u}_\perp}}_{=0} dl_\perp + \underbrace{u_r\cdot\hat{u}_r}_{=1} dr\right) = F dr$$

$F(r)dr$ funzione scalare della sola posizione

$F(r)dr = -dV$ è un'energia potenziale se è possibile trovare una funzione scalare t.c $F(r)dr = -dV \implies F(r) = -dV/dr$ (forza è conservativa).

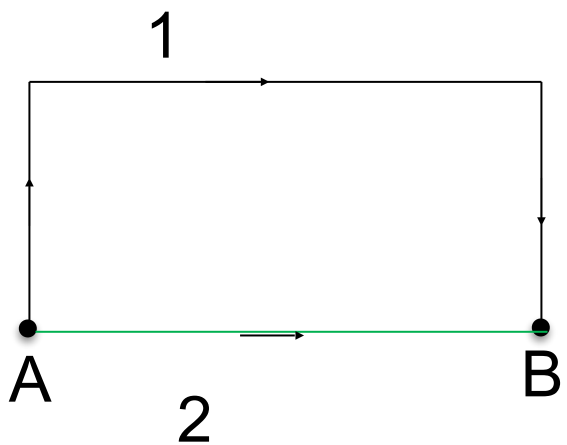
$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B F(r)dr = -\int_A^B dV = V(r_B) - V(r_A)$$

Tutti i campi centrali a simmetria sferica sono conservativi

- sono arrivato qua
- (mancano le animazioni)

Lavoro di una forza di attrito dinamico

Lavoro da A a B della forza di attrito dinamico: $\vec{F} = -\mu_c N \hat{u}_t = -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v}$



Lavoro lungo la traiettoria 1:

$$\mathscr{L}_{1(A,B)} = \int_{\substack{A\\1}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{A\\1}}^{B} (-\mu_c N \hat{u}_t) \cdot (\hat{u}_t dl)$$

$$= -\mu_c N \int_{\substack{A\\1}}^{B} dl = -\mu_c N L_{A1B} < 0$$

Lavoro lungo la traiettoria 2:

$$\mathscr{L}_{2(A,B)} = \int_{\substack{A\\2}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\substack{A\\2}}^{B} (-\mu_c N \hat{u}_t) \cdot (\hat{u}_t dl)$$

$$= -\mu_c N \int_{\substack{A\\2}}^{B} dl = -\mu_c N L_{A2B} < 0$$

$$L_{A1B} \neq L_{A2B} \implies \mathscr{L}_{1(A,B)} \neq \mathscr{L}_{2(A,B)}$$

Tutte le forze di attrito (dinamico, viscoso) NON sono mai conservative

Lavoro di forze conservative e non

$\vec{F} = \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{nc}$ Punto materiale soggetto ad una forza totale: somma di 2 contributi

$$\mathscr{L}_{A,B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(\vec{F}_{cons} + \vec{F}_{nc}\right) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{l}$$

Lavoro totale

$\mathscr{L}_{tot} = \mathscr{L}_{cons} + \mathscr{L}_{nc}$

Teo. Forze vive $\mathscr{L}_{tot} = T(B) - T(A)$

Campi conservativi $\mathscr{L}_{cons} = V(A) - V(B)$

$$T(B) - T(A) = V(A) - V(B) + \mathscr{L}_{nc}$$

$$\mathscr{L}_{nc} = \left[T(B) + V(B)\right] - \left[T(A) + V(A)\right] = E(B) - E(A)$$

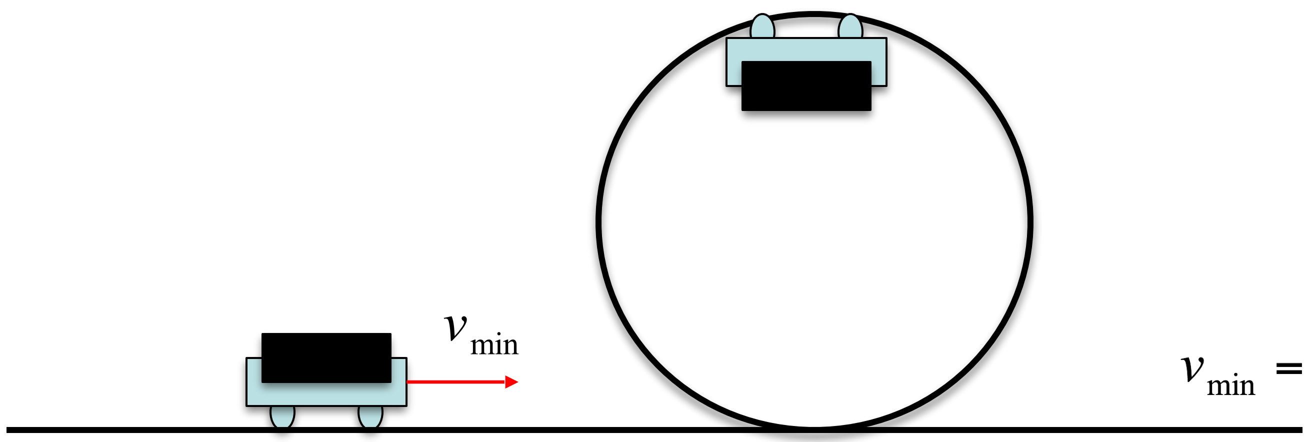
Il lavoro delle forze non conservative è dato dalla variazione dell'energia meccanica totale

In presenza di forze d'attrito, generalmente, si ha $\mathscr{L}_{nc} < 0 \implies E(B) < E(A)$

Forze dissipative

Esercizio

- Un carrello viene lanciato con una velocità iniziale v lungo un binario orizzontale che poi presenta un avvolgimento circolare verticale di raggio $R = 4\ \mathrm{m}$. Calcolare, nell'ipotesi di assenza di attriti, il minimo valore v_{min} che deve essere dato alla velocità v affinché il carrello compia il "giro della morte" senza staccarsi dai binari.



$$v_{\mathrm{min}} = \sqrt{5gR} = 14\ \mathrm{m/s}$$

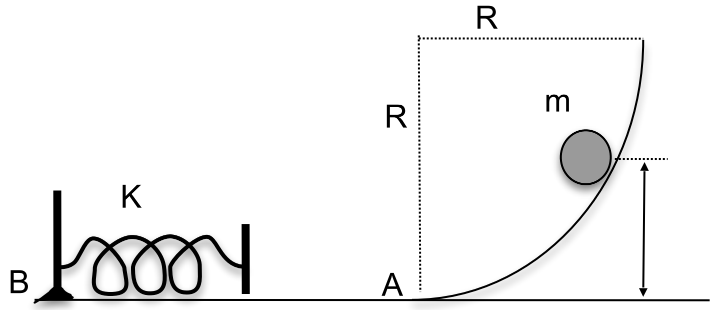
Esercizio

Un punto materiale di massa m=30 g è inizialmente fermo su di un profilo circolare liscio di raggio R=20 cm ad una altezza H=R/2 rispetto al piano orizzontale. Scendendo lungo il profilo il punto incontra in A un piano orizzontale liscio su cui è vincolata in B una molla di costante elastica k =0,1 kg/s^2, inizialmente a riposo. Determinare:

a) le componenti tangenziale (a_T) e centripeta (a_N) dell'accelerazione del punto nel punto iniziale;

b) la reazione vincolare nel punto A;

c) la compressione massima della molla.



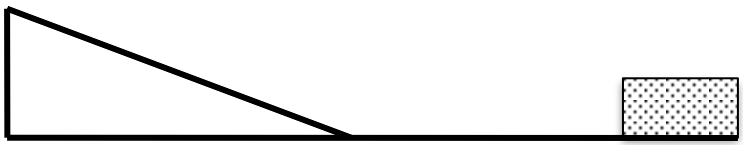
Esercizio

Una cassa, di massa M=7 kg è inizialmente in moto su un piano orizzontale liscio con una velocità di v =8 m/s ad una distanza D =6 m da un piano ruvido inclinato di α=15° rispetto alla direzione orizzontale. Sapendo che la cassa si ferma dopo aver percorso L = 8 m sul piano inclinato, determinare

a) il coefficiente di attrito dinamico del piano inclinato,

b) il lavoro fatto dalla forza di attrito sul piano inclinato,

c) indicare (motivando la risposta) se, raggiunta la quota massima la cassa ridiscende il piano o si ferma.



Esercizio

Un corpo di massa $M = 12\ \mathrm{kg}$ scende da un piano inclinato di α=30° rispetto ad una direzione orizzontale. Sapendo che il corpo parte da fermo, che si abbassa di una quota $h = 2\ \mathrm{m}$, che il piano è ruvido e con un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0,2, determinare la sua velocità finale.