L10: Basi di spazi vettoriali (16-17)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Dipendenza e indipendenza lineare
- Basi
- Dimensione
- Una base per Sol(*SO*)
- Dimensioni di sottospazi vettoriali
- Calcolo di dimensioni e basi

marcella.sama@uniroma3.it

Dipendenza e indipendenza lineare

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

<u>Esempio</u>:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 è <u>combinazione lineare</u> di A_1 e A_3: $A_2 = 3A_1 - \frac{5}{2}A_3$

Segue che $k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$ si può scrivere:

$$k_1A_1 + k_2\left(3A_1 - \frac{5}{2}A_3\right) + k_3A_3 = (k_1 + 3k_2)A_1 + \left(k_3 - \frac{5}{2}k_2\right)A_3$$

Da cui si ha: $L(A_1, A_2, A_3) \subseteq L(A_1, A_3)$
Inoltre sappiamo che $L(A_1, A_3) \subseteq L(A_1, A_2, A_3)$
Segue che: $L(A_1, A_3) = L(A_1, A_2, A_3)$

Introduzione

Osservazione: In qualunque spazio vettoriale V, se un vettore v_{r+1} è combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ allora si ha:

$$L(v_1, v_2, \dots, v_r) = L(v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1})$$

Interpretazione: Se uno spazio vettoriale V è generato dai vettori $v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}$ e uno di essi è combinazione lineare degli altri, allora *lo possiamo scartare* e ottenere r vettori che generano V.

Idea: Potremmo applicare lo stesso ragionamento agli r vettori che generano V individuando r–1 vettori generatori. Iterando il processo, a una certa iterazione non possiamo più scartare vettori.

Definizione: I vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $k_1, k_2, \dots, k_r$ non tutti nulli tali che: $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i = 0$

Dipendenza lineare

Definizione: I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $k_1, k_2, \ldots, k_r$ non tutti nulli tali che: $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i = 0$

Esempi:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 è combinazione lineare di A_1 e A_3: $A_2 = 3A_1 - \frac{5}{2}A_3$

$$\boxed{3A_1 - A_2 - \frac{5}{2}A_3 = 0}$$

Segue che le matrici A_1, A_2 e A_3 sono linearmente dipendenti.

Dipendenza lineare

Definizione: I vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $k_1, k_2, \dots, k_r$ non tutti nulli tali che: $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i = 0$

Esempi:
I vettori $v_1 := (2, 4, 4, 2)$, $v_2 := (1, 2, 2, 1)$ e $v_3 := (1, 2, 3, 3)$ di R^4 sono linearmente dipendenti.
Infatti si ha: $\mathbf{1}v_1 - \mathbf{2}v_2 + \mathbf{0}v_3 = 0$

Osservazione: Si noti che nella definizione di vettori linearmente dipendenti non si richiede che tutti i coefficienti siano diversi da 0, ma solo che qualcuno di essi (almeno uno) sia diverso da 0.

Indipendenza lineare

Definizione: I vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono **linearmente indipendenti** se $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i = 0$ è verificata solo quando $k_1=k_2=\dots=k_r=0$

Esempio: I polinomi $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3$ di $R[x]$ sono linearmente indipendenti ?

Scriviamo una loro combinazione lineare e poniamola = 0:

$$k_1 1 + k_2(1+x) + k_3(1+x+x^2) + k_4(1+x+x^2+x^3) = 0$$

$$(k_1+k_2+k_3+k_4) + (k_2+k_3+k_4)x + (k_3+k_4)x^2 + k_4x^3 = 0$$

Dobbiamo risolvere questo sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette solamente la soluzione banale $k_1=k_2=k_3=k_4=0$
Quindi $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ e $f_4(x)$ sono linearmente indipendenti !

Dipendenza e indipendenza lineare

<u>Esercizio</u>: $v_1 := (1, 2, 1, 0)$, $v_2 := (2, 3, 0, 1)$, $v_3 := (1, 5/2, 2, -1/2)$ di R^4 sono linearmente dipendenti o indipendenti ?

Scriviamo una loro combinazione lineare e poniamola = 0:

$$k_1(1,2,1,0) + k_2(2,3,0,1) + k_3\left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) = (0,0,0,0)$$

$$\left(k_1 + 2k_2 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3, k_1 + 2k_3, k_2 - \frac{1}{2}k_3\right) = (0,0,0,0)$$

Dobbiamo risolvere questo sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_2 - \frac{1}{2}k_3 = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

$$\begin{cases} k_1 = -2t \\ k_2 = \frac{1}{2}t \\ k_3 = t \end{cases}$$

Pertanto v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti !
Ad esempio:

$$-2\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Esercizio: $v_1 := (1, 2, 1, 0)$, $v_2 := (2, 3, 0, 1)$, $v_3 := (1, 5/2, 2, -1/2)$ di R^4 sono linearmente dipendenti o indipendenti ?

Scriviamo una loro combinazione lineare e poniamola = 0:

$$k_1(1,2,1,0) + k_2(2,3,0,1) + k_3\left(1,\frac{5}{2},2,-\frac{1}{2}\right) = (0,0,0,0)$$

$$\left(k_1 + 2k_2 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3, k_1 + 2k_3, k_2 - \frac{1}{2}k_3\right) = (0,0,0,0)$$

Potevamo evitare di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_2 - \frac{1}{2}k_3 = 0 \end{cases}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

<u>Esercizio</u>: $v_1 := (1, 2, 1, 0)$, $v_2 := (2, 3, 0, 1)$, $v_3 := (1, 5/2, 2, -1/2)$ di R^4 sono linearmente dipendenti o indipendenti ?

Scriviamo una loro combinazione lineare e poniamola = 0:

$$k_1(1,2,1,0) + k_2(2,3,0,1) + k_3\left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right) = (0,0,0,0)$$

$$\left(k_1 + 2k_2 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3, k_1 + 2k_3, k_2 - \frac{1}{2}k_3\right) = (0,0,0,0)$$

In alternativa studiamo la matrice:

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + \frac{5}{2}k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_3 = 0 \\ k_2 - \frac{1}{2}k_3 = 0 \end{cases}$$

Poiché il rango è 2, mentre il numero delle incognite è 3, il sistema ha soluzioni non banali.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

Teorema: Un singolo vettore v di uno spazio vettoriale V è linearmente indipendente se e solo se $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.

Teorema: Dati i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ (con $r > 1$).
Se uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti, allora i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione:
Uno dei vettori, detto v_i , è combinazione lineare dei rimanenti.
Dunque esistono scalari $h_1, h_2, \ldots, h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots, h_r$ tali che:

$$\boldsymbol{v}_i = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + h_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r$$

$$h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2 + h_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + (-1)\boldsymbol{v}_i + h_{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} + \cdots + h_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$$

Abbiamo $h_i \neq 0$. Pertanto $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linear. dipendenti.

marcella.sama@uniroma3.it

Dipendenza e indipendenza lineare

Teorema: Dati i vettori v_1, v_2, …, v_r (con $r > 1$). Se abbiamo $\sum_{i=1}^{r} k_i v_i = 0$ con $\boldsymbol{k_i} \boldsymbol{\neq} \mathbf{0}$ allora v_i è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione:

$$k_1 \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}, \text{ con } k_i \neq 0$$

$$k_i \boldsymbol{v}_i = -k_1 \boldsymbol{v}_1 - k_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - k_{i-1} \boldsymbol{v}_{i-1} - k_{i+1} \boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - k_r \boldsymbol{v}_r$$

$$\boldsymbol{v}_i = -k_i^{-1} k_1 \boldsymbol{v}_1 - k_i^{-1} k_2 \boldsymbol{v}_2 - \cdots - k_i^{-1} k_{i-1} \boldsymbol{v}_{i-1} - k_i^{-1} k_{i+1} \boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - k_i^{-1} k_r \boldsymbol{v}_r$$

$\boldsymbol{v}_i$ è combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_r$.

Dipendenza e indipendenza lineare

Osservazione: Se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente dipendenti allora **almeno uno** è combinazione lineare dei rimanenti.

Esempio: Consideriamo i seguenti polinomi:
$f_1(x) := 1 + x$, $f_2(x) := x^2$, $f_3(x) := 2 + 2x - x^2$ e $f_4(x) := 2x - x^3$.
Notiamo che $2\,f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) + 0\,f_4(x) = 0$
Dunque, i polinomi sono linearmente dipendenti.

Ora $f_3(x)$ è combinazione lineare di $f_1(x), f_2(x)$ e $f_4(x)$:
$f_3(x) = 2\,f_1(x) - f_2(x) - 0\,f_4(x)$

Ma $f_4(x)$ non è combinazione lineare di $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$!
(le loro combinazioni lineari possono avere al più grado 2)

Dipendenza e indipendenza lineare

Osservazione: Due vettori v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è **multiplo** dell'altro.

Esempi:

$v_1 := (2, 1, 3)$ e $v_2 := (1, 1, 2)$ sono linearmente dipendenti ?
No, perchè nessuno è multiplo dell'altro. Quindi: $\mathbf{0}v_1 - \mathbf{0}v_2 = 0$

$v_1 := (4, 2, 6)$ e $v_2 := (6, 3, 9)$ sono linearmente dipendenti ?
Sì, perchè $(4, 2, 6)$ è multiplo di $(6, 3, 9)$. Infatti: $\mathbf{3}v_1 - \mathbf{2}v_2 = 0$

$v_1 := (0, 0, 0)$ e $v_2 := (1, 1, 2)$ sono linearmente dipendenti ?
Sì, perchè $(0, 0, 0)$ è multiplo di $(1, 1, 2)$. Infatti: $\mathbf{1}v_1 + \mathbf{0}v_2 = 0$

Dipendenza e indipendenza lineare

<u>Teorema</u>: Se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente dipendenti allora $v_1, v_2, \ldots, v_r$, $\boldsymbol{v_{r+1}}$ sono linearm. dipendenti qualunque sia v_{r+1}.

<u>Dimostrazione</u>:
Dobbiamo trovare una combinazione lineare non banale di $v_1, v_2, \ldots, v_r$ **,** $\boldsymbol{v_{r+1}}$ che dia come risultato il vettore nullo.

Sappiamo che esiste una combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r$ con coefficienti <u>non tutti nulli</u> che è uguale al vettore nullo:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r + 0\boldsymbol{v}_{r+1} = \mathbf{0}$$

Dipendenza e indipendenza lineare

<u>Teorema</u>: Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente indipendenti, e v_{r+1} è un vettore che <u>non</u> è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r$, allora $v_1, v_2, \ldots, v_r , v_{r+1}$ sono linearmente indipendenti.

<u>Dimostrazione</u>:
Dobbiamo mostrare che se abbiamo una combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r , v_{r+1}$ uguale al vettore nullo:

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r + k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} = \boldsymbol{0}$$

allora <u>tutti</u> i coefficienti k_i sono nulli.
Per ipotesi: $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente indipendenti, da cui abbiamo che $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.
Anche $k_{r+1} = 0$, altrimenti v_{r+1} sarebbe combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Basi di uno spazio vettoriale

marcella.sama@uniroma3.it

Basi

<u>Definizione</u>: I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ di uno spazio vettoriale V costituiscono una **base** di V se sono verificate entrambe le proprietà:

1. $V = L(v_1, v_2, \ldots, v_r)$; **2.** $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

<u>Esempio</u>: Verificare che $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3$ costituiscono una base di $R^4[x]$.

$f(x) := a + bx + cx^2 + dx^3$ (ovvero un generico polinomio di grado < 4)

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x)$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (k_2 + k_3 + k_4)x + (k_3 + k_4)x^2 + k_4 x^3$$

Il sistema è *Crameriano* e, quindi, ammette un'unica soluzione (prop. 1). **Nel caso $a=b=c=d=0$, la soluzione è quella banale $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ (prop. 2).**

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = a \\ k_2 + k_3 + k_4 = b \\ k_3 + k_4 = c \\ k_4 = d \end{cases}$$

Basi

Teorema: Se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ costituiscono una base di uno spazio V, allora ogni vettore v di V equivale a un'**unica** combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ (ovvero $v = \sum_{i=1}^{r} k_i v_i$).
→ $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sono le r **componenti** di v rispetto alla base $v_1, v_2, \ldots, v_r$

Osservazione 1: Quando parliamo di componenti di un vettore dobbiamo sempre specificare rispetto a quale base ci riferiamo, perchè le componenti dello stesso vettore rispetto a basi diverse sono (in generale) diverse.

Osservazione 2: Le componenti dell'i-esimo vettore v_i rispetto alla base $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (dove l'unico 1 compare al posto i-esimo). In particolare, il vettore 0 ha componenti $(0, \ldots, 0)$.

Basi

Teorema: Se $v_1, v_2, \ldots, v_r$ costituiscono una base di uno spazio V, allora ogni vettore v di V equivale a un'**unica** combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ (ovvero $v = \sum_{i=1}^{r} k_i v_i$).

$\rightarrow k_1, k_2, \ldots, k_r$ sono le r **componenti** di v rispetto alla base $v_1, v_2, \ldots, v_r$

Dimostrazione:

$v_1, v_2, \ldots, v_r$ generano V, per ogni v segue: $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_r v_r$

Supponiamo di scrivere v tramite due diverse combinazioni lineari:

$$\boldsymbol{v} = k_1 \boldsymbol{v}_1 + k_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r \boldsymbol{v}_r$$
$$\boldsymbol{v} = h_1 \boldsymbol{v}_1 + h_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + h_r \boldsymbol{v}_r$$

Dobbiamo dimostrare che $h_i = k_i$ per ogni i.

$$\mathbf{0} = (k_1 - h_1)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 - h_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (k_r - h_r)\boldsymbol{v}_r$$

Dato che $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linear. indip. si ha $h_1 = k_1$, $h_2 = k_2$,..., $h_r = k_r$

Basi

Esempi: **Base canonica**

I seguenti vettori costituiscono una base per lo spazio vettoriale R^n :

$$\boldsymbol{e}_1 := (1, 0, 0, \ldots, 0), \boldsymbol{e}_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n := (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Caso $n = 2$:

Dimostriamo che $e_1 := (1,0)$ ed $e_2 := (0,1)$ formano una base di R^2 :

I vettori e_1 ed e_2 generano R^2 : $(a_1, a_2) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$

I vettori e_1 ed e_2 sono linear. indip. : $a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$

Allora si ha: $a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 = (0, 0)$

Da cui segue $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Quindi i vettori e_1 ed e_2 costituiscono una base (*canonica*) di R^2.

Basi

<u>Esempi</u>: **Base canonica**

Consideriamo lo spazio vettoriale $M(3, 2, R)$ e le seguenti matrici:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Data una generica matrice di $M(3, 2, R)$: $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$A = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} + eE_{31} + fE_{32}$$

Segue che le sei matrici di cui sopra sono <u>generatori</u> di $M(3, 2, R)$.

Le sei matrici sono <u>linear</u>. <u>indip</u>. e formano una <u>base</u> di $M(3, 2, R)$.

Basi canoniche

I seguenti vettori costituiscono una base per lo spazio vettoriale R^n :

$$\boldsymbol{e}_1 := (1,0,0,\ldots,0), \boldsymbol{e}_2 := (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \boldsymbol{e}_n := (0,0,\ldots,0,1).$$

Particolarità: Le componenti del vettore ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) relative a questa base sono esattamente $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$.

Una base per $M(p, q, R)$ è formata dalle pq matrici E_{ij}, dove E_{ij} è la matrice i cui elementi sono tutti 0 tranne quello di posto $(i, j) = 1$.

Particolarità: Le componenti di un vettore (cioè una matrice) relative ad esso sono **gli elementi della matrice stessa**.

Una base per $R^n[x]$, n naturale,è formata dai polinomi $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Particolarità: Il vettore $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ ha come componenti relative ad essa **i suoi coefficienti** $(\boldsymbol{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}})$.

marcella.sama@uniroma3.it

Basi

Esempio: Abbiamo già verificato che $f_1(x) := 1$, $f_2(x) := 1 + x$, $f_3(x) := 1 + x + x^2$, $f_4(x) := 1 + x + x^2 + x^3$ costituiscono una base di $R^4[x]$. Determinare le componenti di $f(x) = 2x - 3x^2$ rispetto alla base data.

$$f(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x)$$

$$2x - 3x^2 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + (k_2 + k_3 + k_4)x + (k_3 + k_4)x^2 + k_4 x^3$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ \qquad k_2 + k_3 + k_4 = 2 \\ \qquad\qquad k_3 + k_4 = -3 \\ \qquad\qquad\qquad k_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = 5 \\ k_3 = -3 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

Da cui le componenti di $f(x)$ rispetto alla base data sono $(-2, 5, -3, 0)$.

Si dimostra che $1, x, x^2, x^3$ formano un'altra base (canonica) per $R^4[x]$.

Le componenti di $f(x)$ relative a tale base di $R^4[x]$ sono $(0, 2, -3, 0)$.

Dimensioni di sottospazi vettoriali

marcella.sama@uniroma3.it

Dimensione

Esempio: Abbiamo visto che dati tre punti A, B e C dello spazio tali che O, A, B e C siano non complanari, allora i vettori di $V^3(O)$ $v_1 := \overrightarrow{OA}$, $v_2 := \overrightarrow{OB}$ e $v_3 := \overrightarrow{OC}$ di $V^3(O)$ sono linear. indipendenti. Ogni vettore v è uguale a una combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. Pertanto v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base per $V^3(O)$.

Dato che qualsiasi base di $V^3(O)$ è formata da tre vettori, si dice che la dimensione di $V^3(O)$ è uguale a **3**.

In generale chiamiamo **dimensione di uno spazio vettoriale** il numero di vettori che compongono una sua base.

Dimensione

Teorema del completamento: Sia V uno spazio vettoriale avente una base formata dai vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$. Siano poi assegnati r vettori linearmente indipendenti $v_1, v_2, \dots, v_r$ di V, con $r \leq n$.
Si dimostra che è possibile scegliere opportunamente r vettori tra quelli della base $e_1, e_2, \dots, e_n$ e sostituirli con i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ in modo tale da ottenere una base di V.

Teorema: Sia V uno spazio avente una base formata da n vettori. Allora assegnati comunque n vettori di V linearmente indipendenti, si dimostra che questi formano una base di V.

Teorema: In uno spazio V avente una base formata da n vettori non vi possono essere più di n vettori linearmente indipendenti.

Dimensione

Teorema: In uno spazio V avente una base formata da n vettori non vi possono essere più di n vettori linearmente indipendenti.

Teorema: Sia V uno spazio avente una base formata da n vettori. Allora ogni altra base di V è formata da n vettori.

Definizione: Se uno spazio V ha una base formata da n vettori, si dice che V ha **dimensione** uguale a n : $\boldsymbol{dim\ V = n}$.

Definizione: Se uno spazio vettoriale V è formato dal solo vettore nullo ($dim\ V = 0$) o ha una base formata da n vettori ($dim\ V = n$) diciamo che V ha **dimensione finita**.

Se uno spazio vettoriale non è dotato di una base formata da un numero finito di vettori, allora lo spazio ha **dimensione *infinita***.

Dimensione

<u>Teorema</u>: Si può dimostrare che:

1. $dim\ V^2(O) = 2$

2. $dim\ V^3(O) = 3$

3. $dim\ R^n = n$

4. $dim\ M(p, q, R) = pq$

5. $dim\ R^n[x] = n$

6. $R[x]$ ha dimensione *infinita*

Dimensione

<u>Teorema</u>: Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora:

1. non esistono piu di n vettori linearmente indipendenti;
2. dati comunque r vettori con $r < n$ (anche se linear. indipendenti), essi non possono essere generatori (tantomeno una base) di V;
3. dati n vettori linear. indipendenti, essi formano una base di V;
4. dati comunque n generatori, essi formano una base di V.

<u>Osservazione</u>: Dati n vettori di uno spazio vettoriale di dim. n,

per individuare se essi formano una <u>base</u>, possiamo controllare:

- che gli <u>n vettori siano generatori</u>, oppure
- che gli <u>n vettori siano linearmente indipendenti</u>.

Dimensione

<u>Teorema</u>: Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora:

1. non esistono piu di n vettori linearmente indipendenti;
2. dati comunque r vettori con $r < n$ (anche se linear. indipendenti), essi non possono essere generatori (tantomeno una base) di V;
3. dati n vettori linear. indipendenti, essi formano una base di V;
4. dati comunque n generatori, essi formano una base di V.

<u>Esempio</u>: Stabilire se i vettori $v_1 := (1, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1)$, $v_3 := (0, 1, 2)$, $v_4 := (1, 1, 3)$ di R^3 sono linearmente indipendenti.

Sappiamo che $dim\ R^3 = 3$.

Segue 4 vettori di R^3 comunque scelti sono linearmente dipendenti.

In particolare v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti.

Dimensione

Teorema: Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n allora:

1. non esistono piu di n vettori linearmente indipendenti;
2. dati comunque r vettori con $r < n$ (anche se linear. indipendenti), essi non possono essere generatori (tantomeno una base) di V;
3. dati n vettori linear. indipendenti, essi formano una base di V;
4. dati comunque n generatori, essi formano una base di V.

Esempio: Stabilire se le seguenti matrici generano $M(2, 2, R)$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $\dim M(2, 2, R) = 4$.

Segue per generare $M(2, 2, R)$ sono necessari almeno 4 vettori.

Dunque A_1, A_2, A_3 non generano $M(2, 2, R)$.

Basi per le soluzioni di un sistema lineare omogeneo

Una base per Sol(SO)

Teorema: Consideriamo un sistema lineare omogeneo SO: $AX = 0$ di p equazioni in q incognite $x_1, x_2, \dots, x_q$.

Sia $rk\ A = r$, allora lo spazio delle soluzioni Sol(SO) ha $dim\ q - r$.

Una base per SO può essere determinata nel modo seguente:

• Si determinano le soluzioni del sistema con il metodo che si preferisce (Rouchè-Capelli o Gauss): sappiamo che $q - r$ incognite scelte opportunamente fungeranno da $h_1, h_2, \dots, h_{q-r}$ parametri;

• Il primo vettore della base si ottiene assegnando a h_1 il valore 1 e agli altri parametri il valore 0;

• Il secondo vettore della base si ottiene assegnando a h_2 il valore 1 e agli altri parametri il valore 0;

• ... L'ultimo vettore della base si ottiene assegnando ad h_{q-r} il valore 1 e agli altri parametri il valore 0.

Una base per Sol(SO)

Esempio: Sia dato il seguente sistema lineare omogeneo SO :

$$\begin{cases} 2x - 4y + z - w - 2t = 0 \\ x - 2y - 2z + w = 0 \\ 3x - 6y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

Possiamo trasformare il sistema nel seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z - w - 2t = 0 \\ -\frac{5}{2}z + \frac{3}{2}w + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Assegniamo ora a y, w, t dei valori parametrici:

$$\begin{cases} x = 2h_1 + \frac{1}{5}h_2 + \frac{4}{5}h_3 \\ y = h_1 \\ z = \frac{3}{5}h_2 + \frac{2}{5}h_3 \\ w = h_2 \\ t = h_3 \end{cases}$$

Una base per Sol(SO)

Esempio: Scriviamo ora le soluzioni come matrici di $M(5, 1, R)$:

$$\mathrm{Sol}(SO) = \left\{ \begin{pmatrix} 2h_1 + \frac{1}{5}h_2 + \frac{4}{5}h_3 \\ h_1 \\ \frac{3}{5}h_2 + \frac{2}{5}h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \mid h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}, h_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Sol}(SO) = \left\{ h_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + h_3 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}, h_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Sol(SO) è generato dai vettori S_1, S_2 e S_3:

$$S_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base per Sol(SO)

Esempio: Sol(SO) è generato dai vettori S_1, S_2 e S_3 :

$$S_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per stabilire se S_1, S_2 e S_3 formano una base per Sol(SO), verifichiamo se sono linear. indipendenti: $h_1 S_1 + h_2 S_2 + h_3 S_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2h_1 + \frac{1}{5}h_2 + \frac{4}{5}h_3 \\ h_1 \\ \frac{3}{5}h_2 + \frac{2}{5}h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questa uguaglianza si verifica solo quando $h_1 = h_2 = h_3 = 0$.

S_1, S_2 e S_3 sono una base di Sol(SO) che ha dimensione 3.

Una base per Sol(*SO*)

<u>Esempio</u>: Determinare una base per il seguente sottospazio E di R^4

$$E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0\}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}x_3 - x_4 \qquad h_1 = x_2,\ h_2 = x_3,\ h_3 = x_4$$

$$E = \left\{ \left(\frac{3}{2}h_2 - h_3, h_1, h_2, h_3 \right) \mid h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}, h_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Per ottenere dei generatori di E poniamo:

$h_1 := 1$, $h_2 := 0$ e $h_3 := 0$ ottenendo il vettore $(0, 1, 0, 0)$;

$h_1 := 0$, $h_2 := 1$ e $h_3 := 0$ ottenendo il vettore $(3/2, 0, 1, 0)$;

$h_1 := 0$, $h_2 := 0$ e $h_3 := 1$ ottenendo il vettore $(-1, 0, 0, 1)$.

Dimensioni di sottospazi vettoriali

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia E un sottospazio di V. Allora E ha dimensione finita e $\boldsymbol{dim\ E \leq dim\ V}$

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale e $dim\ V = n$. Allora:

- Esiste un sottospazio E con $dim\ E = 0$, formato dal vettore nullo.
- Esiste un sottospazio di dim. uguale a n, formato da V stesso.

Esempi: Abbiamo visto che $\boldsymbol{V^2(O)}$ ha dim. uguale a 2.

Pertanto i suoi sottospazi possono avere dim. uguale a 0, 1 o 2:

- L'unico sottospazio di dimensione 0 consiste nel vettore nullo;
- I sottospazi di dimensione 1 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in r\}$;
- L'unico sottospazio di dimensione 2 è $V^2(O)$ stesso.

Dimensioni di sottospazi vettoriali

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia E un sottospazio di V. Allora E ha dimensione finita e $\boldsymbol{dim\ E \leq dim\ V}$

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale e $dim\ V = n$. Allora:
- Esiste un sottospazio E con $dim\ E = 0$, formato dal vettore nullo.
- Esiste un sottospazio di dim. uguale a n, formato da V stesso.

Esempi: Abbiamo visto che $\boldsymbol{V^3(O)}$ ha dim. uguale a 3.
Pertanto i suoi sottospazi possono avere dim. uguale a 0, 1, 2 o 3:
- L'unico sottospazio di dimensione 0 consiste nel vettore nullo;
- I sottospazi di dimensione 1 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in r\}$;
- I sottospazi di dimensione 2 sono quelli del tipo $\{\overrightarrow{OP} \mid P \in \pi\}$;
- L'unico sottospazio di dimensione 3 è $V^3(O)$ stesso.

marcella.sama@uniroma3.it

Dimensioni di sottospazi vettoriali

<u>Esercizio(1)</u>: Sia $S(2, R)$ il sottospazio vettoriale $M(2, 2, R)$ formato dalle matrici simmetriche. Vogliamo determinarne una base.

Consideriamo il sottospazio V_1 avente come base $S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$V_1 \neq S(2, R)$, perchè c'è almeno un'altra base $S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Consideriamo il sottospazio V_2 avente come basi S_1 e S_2:

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$V_2 \neq S(2, R)$ perchè c'è almeno un'altra base $S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Consideriamo il sottospazio V_3 avente come basi S_1, S_2 e S_3.

V_3 coincide con $S(2, R)$, perché *dim* $S(2, R) <$ *dim* $M(2, 2, R) = 4$.

Dimensioni di sottospazi vettoriali

<u>Esercizio(1)</u>: Verifichiamo che le matrici S_1, S_2 e S_3 generano $S(2, R)$:

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo stabilire se esistono k_1, k_2 e k_3 tali che:

$$S := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_2 & k_1 \\ k_1 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Basta porre $k_1 = b$, $k_2 = a$ e $k_3 = c$.

Tutte le matrici simmetriche sono combinazioni lineari di S_1, S_2, S_3.

Per cui S_1, S_2, S_3 generano $S(2, R)$.

Calcolo di dimensioni e basi

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una sua base. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_s$ dei vettori che generano il sottospazio U di V. Decomponiamo $u_1, u_2, \ldots, u_s$ rispetto alla base formata da $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\
\boldsymbol{u}_2 &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}_s &= a_{1s}\boldsymbol{v}_1 + a_{2s}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{ns}\boldsymbol{v}_n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Si dimostra che $rk\ A = dim\ U$

Inoltre il teorema e il calcolo del rango di A ci dicono anche come possiamo **estrarre una base di *U*** da $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

Calcolo di dimensioni e basi

Vediamo come possiamo **estrarre una base di *U*** da $u_1, u_2, \dots, u_s$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \\
\boldsymbol{u}_2 &= a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{u}_s &= a_{1s}\boldsymbol{v}_1 + a_{2s}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{ns}\boldsymbol{v}_n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}
$$

- Se abbiamo calcolato *rk A* usando i <u>determinanti dei minori</u>:
  Sia *M* un minore di *A* di ordine *r* avente determinante non nullo.
  Gli *r* vettori relativi alle colonne di *M* formano una **base** di *U*.

- Invece, se abbiamo calcolato *rk A* riducendo la <u>matrice a scalini</u>:
  Sia *B* la matrice con *r* scalini ottenuta dalla matrice *A*.
  Una **base** di *U* si ottiene prendendo tra i vettori $u_1, u_2, \dots, u_s$
  quei vettori le cui posizioni corrispondono agli scalini di *B*.

Calcolo di dimensioni e basi

<u>Esercizio(2)</u>: Sia E il sottospazio di $R[x]$ generato da $f_1(x) := 1 + x - 2x^2$, $f_2(x) := x + 3x^4$, $f_3(x) := 1 - 2x^2 - 3x^4$. Calcolare *dim* E e una base.

La base canonica di $R^5[x]$ è formata dai polinomi $1, x, x^2, x^3, x^4$.

La matrice relativa ai 3 polinomi rispetto alla base canonica di $R^5[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{-2} & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$rk\, A = 2$ Un minore di ordine 2 con determinante $\neq 0$

Concludiamo che *dim* $E = 2$ e una **base** di E è formata da $f_1(x)$ e $f_3(x)$.

Calcolo di dimensioni e basi

Esercizio(3): Verificare che $v_1 := (1, 2, 1, 0)$, $v_2 := (2, 3, 0, 1)$ e $v_3 := (1, 5/2, 2, -1/2)$ di R^4 sono linearmente dipendenti.

La matrice A relativa ai 3 vettori rispetto alla base canonica di R^4 :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rk\, A = 2$$

Dato che $rk\, A = 2$, il sottospazio generato da v_1, v_2, v_3 ha dim. 2.

Segue che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Gli scalini sono in prima e seconda posizione nella matrice A.

Dunque una **base** per $L(v_1, v_2, v_3)$ è formata dai vettori v_1 e v_2 .

Calcolo di dimensioni e basi

Esercizio(4): Verificare che $v_1 := x + x^3$ e $v_2 := 3 + 2x + x^3$ di $R^4[x]$ sono linearmente indipendenti tramite la base canonica di $R^4[x]$.

Base canonica di $R^4[x]$: $e_0 := 1$, $e_1 := x$, $e_2 := x^2$, $e_3 := x^3$.

Prendiamo la matrice B avente come colonne le componenti dei vettori v_1 e v_2 relativamente alla base canonica (e_0, e_1, e_2, e_3).

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk\, B = 2 \quad \Longrightarrow \quad v_1$ e v_2 sono linearmente indipendenti.

Calcolo di dimensioni e basi

<u>Teorema</u>: Sia A una matrice a n righe e s colonne.

Lo spazio generato dalle <u>colonne</u> di A ha dimensione uguale a $rk\ A$.

Lo spazio generato dalle <u>righe</u> di A ha dimensione uguale a $rk\ A$.

(dato che $rk\ A = rk\ {}^tA$)

Calcolo di dimensioni e basi

Teorema: Sia A una matrice a n righe e s colonne.

Lo spazio generato dalle colonne di A ha dimensione uguale a $rk\ A$.

Lo spazio generato dalle righe di A ha dimensione uguale a $rk\ A$.

Osservazione 1: Non è detto che i sottospazi del teorema coincidano.

Se A ha n righe e s colonne:

le sue righe generano un sottospazio di $M(1, s, R)$,

mentre le sue colonne generano un sottospazio di $M(n, 1, R)$.

Osservazione 2: Anche nel caso in cui la matrice sia A quadrata:

I sottospazi generati da righe e colonne hanno la stessa dimensione,

ma non è detto che questi due sottospazi coincidano.

Esercizi

<u>Esercizio(5)</u>: Stabilire se i vettori $v_1 := (1, 3, 2, 1)$, $v_2 := (1, 0, 1, 0)$, $v_3 := (1, 0, 2, 0)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. Calcolare una base e la dimensione per lo spazio $L(v_1, v_2, v_3)$.

Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori v_1, v_2 e v_3 rispetto alla base canonica di R^4 :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $rk\, A = 3$
- $dim\, L(v_1, v_2, v_3) = 3$
- v_1 , v_2 , v_3 costituiscono una base per $L(v_1, v_2, v_3)$

<u>Oss.</u>: Se poniamo $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$, il sistema lineare nelle incognite k_1, k_2, k_3 ha A come matrice dei coefficienti.

Esercizi

<u>Esercizio(6)</u>: Stabilire se i vettori $v_1 := (1, 0, 1, 0)$, $v_2 := (2, 0, 2, 0)$, $v_3 := (2, 0, 2, 0)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti. Calcolare una base e la dimensione per lo spazio $L(v_1, v_2, v_3)$.

Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei vettori v_1, v_2 e v_3 rispetto alla base canonica di R^4 :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $rk\, A = 2$
- $dim\, L(v_1, v_2, v_3) = 2$
- Una base è formata da v_1 e v_3 (vedi scalini)

- Se osserviamo che $v_2 = 2v_1$, concludiamo che v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti. Dunque, e.g., $L(v_1, v_2, v_3) = L(v_1, v_3)$.

Esercizi

Esercizio(7): Stabilire se i vettori (1,−1, 0), (0, 1, −1), (−1, 0, 1) formano una base per R^3.

Consideriamo la matrice A le cui colonne corrispondono alle componenti dei tre vettori dati rispetto alla base canonica di R^3 :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $det\ A = 0$
- $rk\ A < 3$
- dim. del sottospazio generato < 3
- sappiamo che $dim\ R^3 = 3$
- segue i tre vettori non generano R^3 e non sono una sua base