L13: Omomorfismi (26)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Introduzione
- Omomorfismi tra spazi vettoriali
- Matrice associata a un omomorfismo
- Omomorfismo associato a una matrice
- Esercizi

marcella.sama@uniroma3.it

Omomorfismo

Funzioni

<u>Definizioni</u>: Siano A e B due insiemi qualsiasi.

Una **funzione** (o **applicazione**) $f : A \to B$ è una legge che associa ad ogni elemento $a \in A$ un elemento $b \in B$.

L'insieme A si dice **insieme di partenza** o **dominio** di f.
L'insieme B si dice **insieme di arrivo** o **codominio** di f.

L'elemento b viene indicato con $f(a)$ è chiamato **immagine** di a.

L'insieme $f(A)$ delle immagini degli elementi di A viene chiamato **immagine** di A attraverso la funzione f (o anche **immagine** di f):

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

Dato $b \in B$: $b \in f(A)$ <u>se e solo se</u> esiste $a \in A$ tale che $f(A) = b$

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Definizione: Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono entrambe le proprietà:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u \in V, v \in V$ [addizione]

2. $f(k\,u) = k\,f(u)$ per ogni $k \in R, u \in V$ [moltiplicazione]

Esempio: Data $f : R^3 \to R^2$ definita da: $\boldsymbol{f(x, y, z) := (x + y, y + z)}$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

1. Presi due vettori $u := (x^1, y^1, z^1)$ e $v := (x^2, y^2, z^2)$ di R^3

$$f(u + v) = f((x^1, y^1, z^1) + (x^2, y^2, z^2)) =$$

per la def. di somma in R^3 $= f(x^1 + x^2, y^1 + y^2, z^1 + z^2) =$

per la def. di f $= (x^1 + x^2 + y^1 + y^2, y^1 + y^2 + z^1 + z^2)$

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Definizione: Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono entrambe le proprietà:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u \in V, v \in V$ [addizione]

2. $f(k\, u) = k\, f(u)$ per ogni $k \in R, u \in V$ [moltiplicazione]

Esempio: Data $f : R^3 \to \boldsymbol{R^2}$ definita da: $f(x, y, z) := (x + y, y + z)$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

1. Presi due vettori $u := (x^1, y^1, z^1)$ e $v := (x^2, y^2, z^2)$ di R^3

$$f(u + v) = (x^1 + x^2 + y^1 + y^2, y^1 + y^2 + z^1 + z^2)$$

$$f(u) + f(v) = f(x^1, y^1, z^1) + f(x^2, y^2, z^2) =$$

per la def. di f $= (x^1 + y^1, y^1 + z^1) + (x^2 + y^2, y^2 + z^2) =$

per la def. di somma in R^2 $= (x^1 + y^1 + x^2 + y^2, y^1 + z^1 + y^2 + z^2)$

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Definizione: Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono entrambe le proprietà:

1. $\boldsymbol{f(u+v) = f(u) + f(v)}$ per ogni $u \in V$, $v \in V$ [addizione]

2. $f(k\,u) \quad = k\,f(u)$ per ogni $k \in R$, $u \in V$ [moltiplicazione]

Esempio: Data $f : R^3 \to R^2$ definita da: $f(x, y, z) := (x + y, y + z)$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

1. Presi due vettori $u := (x^1, y^1, z^1)$ e $v := (x^2, y^2, z^2)$ di R^3

$$f(u + v) = (x^1 + x^2 + y^1 + y^2, y^1 + y^2 + z^1 + z^2) \quad \textbf{OK}$$

$$f(u) + f(v) = f(x^1, y^1, z^1) + f(x^2, y^2, \mathrm{z2}) =$$

per la def. di f $\quad = (x^1 + y^1, y^1 + z^1) + (x^2 + y^2, y^2 + z^2) =$

per la def. di somma in R^2 $\quad = (x^1 + y^1 + x^2 + y^2, y^1 + z^1 + y^2 + z^2) \quad$ **OK**

Omomorfismi tra spazi vettoriali

<u>Definizione</u>: Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono <u>entrambe</u> le proprietà:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u \in V, v \in V$ [addizione]

2. $f(k\,u) = k\,f(u)$ per ogni $k \in R, u \in V$ [moltiplicazione]

<u>Esempio</u>: Data $f : R^3 \to R^2$ definita da: $\boldsymbol{f(x, y, z) := (x + y, y + z)}$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

2. Presi un vettore $u := (x, y, z)$ di R^3 e uno scalare k di R

$$f(k\,u) = f(k\,(x, y, z)) =$$

per la def. di prodotto in R^3 $= f(k\,x, k\,y, k\,z) =$

per la def. di f $= (k\,x + k\,y, k\,y + k\,z)$

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Definizione: Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono entrambe le proprietà:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u \in V, v \in V$ [addizione]

2. $f(k\,u) = k\,f(u)$ per ogni $k \in R, u \in V$ [moltiplicazione]

Esempio: Data $f : R^3 \to \boldsymbol{R^2}$ definita da: $f(x, y, z) := (x + y, y + z)$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

2. Presi un vettore $u := (x, y, z)$ di R^3 e uno scalare k di R

$$f(k\,u) = (k\,x + k\,y, k\,y + k\,z)$$

$$k\,f(u) = k\,f(x, y, z) =$$

per la def. di f $\quad = k\,(x + y, y + z) =$

per la def. di prodotto in R^2 $\quad = (k\,x + k\,y, k\,y + k\,z)$

Omomorfismi tra spazi vettoriali

<u>Definizione</u>: Sia $f: V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono <u>entrambe</u> le proprietà:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u \in V$, $v \in V$ [addizione]

2. $\boldsymbol{f(k\,u) = k\,f(u)}$ per ogni $k \in R$, $u \in V$ [moltiplicazione]

<u>Esempio</u>: Data $f: R^3 \to R^2$ definita da: $f(x, y, z) := (x + y, y + z)$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

2. Presi un vettore $u := (x, y, z)$ di R^3 e uno scalare k di R

$$f(k\,u) = (k\,x + k\,y, k\,y + k\,z) \quad \textbf{OK}$$

$$k\,f(u) = k\,f(x, y, z) =$$

per la def. di f $\qquad = k\,(x + y, y + z) =$

per la def. di prodotto in R^2 $\qquad = (k\,x + k\,y, k\,y + k\,z)$ **OK**

Omomorfismi tra spazi vettoriali

<u>Definizione</u>: Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi V e W. L'applicazione f si dice **omomorfismo** di spazi vettoriali o **applicazione lineare** se valgono <u>entrambe</u> le proprietà:

1. $\boldsymbol{f(u+v) = f(u) + f(v)}$ per ogni $u \in V$, $v \in V$ [addizione]

2. $\boldsymbol{f(k\,u) = k\,f(u)}$ per ogni $k \in R$, $u \in V$ [moltiplicazione]

<u>Esempio</u>: Data $f : R^3 \to R^2$ definita da: $f(x, y, z) := (x + y, y + z)$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

1. Presi due vettori $u := (x^1, y^1, z^1)$ e $v := (x^2, y^2, z^2)$ di R^3

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

2. Presi un vettore $u := (x, y, z)$ di R^3 e uno scalare k di R

$$f(k\,u) = k\,f(u)$$

=> f è un omomorfismo di spazi vettoriali !

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Esercizio: Data $f : M(2, 2, R) \rightarrow M(2, 2, R)$ definita da: $f(A) := A + {}^tA$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

1. Prese due matrici A e B di $M(2, 2, R)$, si ha:

$$f(A + B) = A + B + {}^t(A + B) = A + B + {}^tA + {}^tB$$

$$f(A) + f(B) = A + {}^tA + B + {}^tB$$

$$f(A + B) = f(A) + f(B)$$

2. Prese una matrice A di $M(2, 2, R)$ e uno scalare k di R, si ha:

$$f(k\,A) = k\,A + {}^t(k\,A) = k\,A + k\,{}^tA$$

$$k\,f(A) = k\,(A + {}^tA) = k\,A + k\,{}^tA$$

$$f(k\,A) = k\,f(A)$$

=> f è un omomorfismo di spazi vettoriali su R !

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Esercizio: Data $f: R^2 \to R^2$ definita da: $f(x, y) = (x^2, x + y)$

Verifichiamo se f è un omomorfismo di spazi vettoriali:

1. Presi due vettori $u := (x_1, y_1)$ e $v := (x_2, y_2)$ di R^2, si ha:

$$
\begin{aligned}
f(u+v) &= f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= ((x_1 + x_2)^2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\
&= (x_1^2 + 2\, x_1 x_2 + x_2^2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\
f(u) + f(v) &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\
&= (x_1^2, x_1 + y_1) + (x_2^2, x_2 + y_2) \\
&= (x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)
\end{aligned}
$$

Notiamo che $f(u+v) = f(u) + f(v)$ **se e solo** se $x_1 x_2 = 0$

Infatti tale relazione, e.g., non è verificata se $u := (1, 0)$ e $v := (1, 0)$

Dunque f **non** è un omomorfismo di spazi vettoriali !

Matrice associata a un omomorfismo

Matrice associata a un omomorfismo

Dato un omomorfismo $f : V \to W$ di spazi vettoriali:

Se conosciamo $f(u)$ e $f(v)$ allora conosciamo anche $f(u + v)$.

Possiamo anche determinare l'immagine di vettori del tipo ku.

<u>Più in generale</u>: Se $f : V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se conosciamo l'immagine tramite f di $v_1, v_2, \dots, v_n$ di V, di quali altri vettori di V possiamo determinare l'immagine?

<u>Proposizione</u>: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Siano $v_1, v_2, \dots, v_n$ vettori di V e $k_1, k_2, \dots, k_n$ scalari. Si ha:

$$f(k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + \dots + k_n f(v_n)$$

Dunque $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ ci permettono di determinare l'immagine tramite f di tutte le <u>combinazioni lineari</u> di $v_1, v_2, \dots, v_n$

Matrice associata a un omomorfismo

Proposizione: Siano $f : V \to W$ e $g : V \to W$ due omomorfismi di spazi vettoriali. Se $v_1, v_2, \dots, v_n$ generano V e $f(v_j) = g(v_j)$ per $1 \le j \le n$ allora $f = g$.

Dimostrazione:

Bisogna mostrare che $f(v) = g(v)$ per ogni vettore v in V.

Sappiamo che v è combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n$

Allora per la proposizione vista in precedenza abbiamo che

$$f(v) = f(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + \ldots + k_n f(v_n)$$
$$g(v) = g(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_n v_n) = k_1 g(v_1) + k_2 g(v_2) + \ldots + k_n g(v_n)$$

Poiché $f(v_1) = g(v_1), \ldots, f(v_n) = g(v_n)$, abbiamo che $f(v) = g(v)$.

Matrice associata a un omomorfismo

Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono dei generatori di V, un omomorfismo $f : V \to W$ è completamente descritto tramite $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$.

<u>Domanda</u>: Si trova un'applicazione lineare per ogni $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

La risposta è **negativa**, vediamo un <u>contro-esempio</u>:

Lo spazio vettoriale R^2 è generato dai vettori (1, 0), (0, 1), (1, 1).

Non esiste alcuno omomorfismo $f : R^2 \to R^3$ tale che
$f(1, 0) = (0, 0, 0)$, $f(0, 1) = (0, 0, 0)$, $f(1, 1) = (1, 0, 0)$.

Infatti se un tale omomorfismo esistesse dovremmo avere:

$$f(1, 1) = f((1, 0) + (0, 1)) = f(1, 0) + f(0, 1)$$
$$= (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Matrice associata a un omomorfismo

Se però i generatori considerati costituiscono una **base** abbiamo:

Teorema: Siano dati: due spazi vettoriali V e W ; una base di V costituita dai vettori $e_1, e_2, \dots , e_n$; i vettori $w_1, w_2, \dots , w_n$ di W. Esiste un unico $f : V \rightarrow W$ tale che: $f(e_j) = w_j$ per $1 \leq j \leq n$.

Osservazione: Notiamo che non abbiamo fatto alcuna richiesta sui vettori $w_1, w_2, \dots , w_n$ di W : ne che siano linearmente indipendenti ne che generino W.

Matrice associata a un omomorfismo

<u>Definizione</u>: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissiamo una base di V formata dai $e_1, e_2, \dots, e_n$ e una base di W formata dai $f_1, f_2, \dots, f_m$. Possiamo esprimere ciascun vettore $f(e_j)$ come combinazione lineare dei $f_1, f_2, \dots, f_m$:

$$f(e_1) = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + \ldots + a_{m1} f_m$$
$$f(e_2) = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + \ldots + a_{m2} f_m$$
$$\dots$$
$$f(e_n) = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 + \ldots + a_{mn} f_m$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice A di $M(m, n, R)$ è detta **matrice rappresentativa** di f rispetto alle basi $e_1, e_2, \dots, e_n$ e $f_1, f_2, \dots, f_m$

La j-esima colonna di A è data dalle componenti del vettore $f(e_j)$ rispetto alla base formata dai vettori $f_1, f_2, \dots, f_m$

Matrice associata a un omomorfismo

<u>Esercizio</u>: Sia $f : R^3 \to R^2$ l'omomorfismo $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$

$e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (1, 1, 0)$, $e_3 := (1, 1, 1)$ formano una base per R^3

$f_1 := (1, 1)$, $f_2 := (2, 1)$ formano una base per R^2

Determiniamo la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi.

$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0)$

$f(e_2) = f(1, 1, 0) = (2, 1)$

$f(e_3) = f(1, 1, 1) = (2, 2)$

Decomponiamo le immagini rispetto alla base composta da f_1 e f_2:

$f(e_1) = (1, 0) = -(1, 1) + 1\,(2, 1) = \mathbf{-1}\,f_1 + \mathbf{1}\,f_2$

$f(e_2) = (2, 1) = 0\,(1, 1) + 1\,(2, 1) = \mathbf{0}\,f_1 + \mathbf{1}\,f_2$

$f(e_3) = (2, 2) = 2\,(1, 1) + 0\,(2, 1) = \mathbf{2}\,f_1 + \mathbf{0}\,f_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi assegnate è $\boldsymbol{A}$.

Matrice associata a un omomorfismo

Esercizio: Sia $f : R^3 \to R^2$ **l'omomorfismo** $\boldsymbol{f(x, y, z) = (x + y, y + z)}$

Prendiamo **due basi differenti**:

$e'_1 := (0, 1, 1)$, $e'_2 := (1, 0, 1)$, $e'_3 := (1, 1, 0)$ formano una base per R^3

$f'_1 := (0, 2)$, $f'_2 := (1, 1)$ formano una base per R^2

Determiniamo la matrice ***A'*** rappresentativa di f rispetto a tali basi.

$$f(\boldsymbol{e}_1') = f(0,1,1) = (1,2) = \frac{1}{2}(0,2) + (1,1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}_1' + 1\boldsymbol{f}_2',$$

$$f(\boldsymbol{e}_2') = f(1,0,1) = (1,1) = 0(0,2) + (1,1) = 0\boldsymbol{f}_1' + 1\boldsymbol{f}_2',$$

$$f(\boldsymbol{e}_3') = f(1,1,0) = (2,1) = -\frac{1}{2}(0,2) + 2(1,1) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{f}_1' + 2\boldsymbol{f}_2'.$$

$$A' := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice associata a un omomorfismo

<u>Esercizio</u>: $f : M(2, 2, R) \to M(2, 2, R)$ omomorfismo $f(A) := A + {}^tA$

Per rappresentare f con una matrice dobbiamo fissare una base per $M(2, 2, R)$ «di partenza» e una base per $M(2, 2, R)$ «di arrivo».

In questo esempio prendiamo in entrambi i casi la <u>base canonica</u>.

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}$$

$$f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 1E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}$$

$$f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 2E_{22}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice associata a un omomorfismo

<u>Esercizio</u>: Sia $f: R^3 \to R^2$ l'omomorfismo $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$

Per rappresentare f rispetto alle basi canoniche di R^3 ed R^2 usiamo le immagini dei vettori $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$ espresse come combinazione lineare di $f_1 := (1, 0)$, $f_2 := (0, 1)$.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f(1,0,0) = (1,0) = \boldsymbol{f}_1$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = f(0,1,0) = (1,1) = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = f(0,0,1) = (0,1) = \boldsymbol{f}_2.$$

La matrice $\boldsymbol{A}$ rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le <u>colonne</u> di A danno $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$

Le <u>righe</u> di A corrispondono ai coefficienti di x, y, z nelle espressioni $(x + y)$ e $(y + z)$

Tutto ciò vale **solo** quando rappresentiamo f rispetto alle basi canoniche!

Matrice associata a un omomorfismo

<u>Esercizio</u>: Sia $f : R^3 \to R^2$ l'omomorfismo $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$

Per rappresentare f rispetto alle basi canoniche di R^3 ed R^2 usiamo le immagini dei vettori $e_1 := (1, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1)$ espresse come combinazione lineare di $\boldsymbol{f_1}' := (1, 1)$, $\boldsymbol{f_2}' := (2, -1)$.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (1,0) = \frac{1}{3}(1,1) + \frac{1}{3}(2,-1)$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = (1,1) = 1(1,1) + 0(2,-1)$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = (0,1) = \frac{2}{3}(1,1) - \frac{1}{3}(2,-1).$$

La matrice $\boldsymbol{A'}$ rappresentativa di f rispetto alle <u>nuove basi</u> è :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Matrice associata a un omomorfismo

<u>Teorema</u>: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Siano fissate una base per V formata dai vettori $e_1, e_2, \ldots , e_n$ e una base per W formata dai vettori $f_1, f_2, \ldots , f_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi fissate. Dato un vettore v di V possiamo determinare $\boldsymbol{f(v)}$ come segue:

1. Per prima cosa esprimiamo v come combinazione lineare dei vettori della base $e_1, e_2, \ldots , e_n$: $v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n$
2. Calcoliamo poi il prodotto matriciale:

$$A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

3. Per ottenere $f(v)$ basta ora calcolare la combinazione lineare:

$$f(v) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_m f_m$$

Omomorfismo associato a una matrice

Omomorfismo associato a una matrice

Teorema: Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia data una base per V formata dai vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ e una base per W formata dai vettori $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Allora esiste **un unico omomorfismo** $f: V \to W$, la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi fissate è $\boldsymbol{A}$ di tipo $M(m, n, R)$.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Omomorfismo associato a una matrice

Definizione: Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia data una base per V formata da $e_1, e_2, \dots, e_n$ e una base per W formata dai $f_1, f_2, \dots, f_m$. Sia A una matrice di tipo $M(m, n, R)$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si denota **"omomorfismo associato ad *A* rispetto alle basi fissate"** l'omomorfismo f definito da:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{f}_1 + a_{21}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{f}_m,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{f}_1 + a_{22}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{f}_m,$$
$$\vdots$$
$$f(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{f}_m.$$

marcella.sama@uniroma3.it

Omomorfismo associato a una matrice

Esercizio: Sia $f: R^3 \to R^2$ l'omomorfismo associato alla matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 := (1, 1, 1)$, $e_2 := (1, 1, 0)$, $e_3 := (1, 0, 0)$
$\boldsymbol{f_1 := (1, 1)}$, $\boldsymbol{f_2 := (1, -1)}$

Determinare $f(x, y, z)$ per ogni (x, y, z) in R^3.

Calcoliamo le componenti di (x, y, z) rispetto alla base data di R^3:

$$(x, y, z) = z\,(1, 1, 1) + (y - z)\,(1, 1, 0) + (x - y)\,(1, 0, 0)$$

Per ottenere le componenti di $f(x, y, z)$ rispetto alla base data di R^2 basta allora calcolare il prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + x - y \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = (z + x - y)(1, 1) + y(1, -1) = \boxed{(z + x, z + x - 2y)}$$

Omomorfismo associato a una matrice

Esercizio: Sia $f: R^2 \to R^3$ definita da: $f(x, y) := (xy, x - y, 0)$

Vogliamo stabilire se f è lineare.

Troviamo le immagini di f per i vettori della base canonica di R^2
$f(1, 0) = (0, 1, 0)$, $f(0, 1) = (0, -1, 0)$.

Poi consideriamo l'unica applicazione lineare $g: R^2 \to R^3$ definita dalle medesime condizioni $g(1, 0) = (0, 1, 0)$, $g(0, 1) = (0, -1, 0)$.

La matrice rappresentativa di g rispetto alle basi canoniche è :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede allora facilmente che:
$g(x, y) = (0, x - y, 0)$ da cui $f \neq g$

Per verifica mostriamo un vettore su cui le due funzioni f e g assumono valori diversi: $f(1, 1) = (1, 0, 0)$, $g(1, 1) = (0, 0, 0)$.
Segue la conferma che $f \neq g$. Pertanto, f **non** è lineare.

Omomorfismo associato a una matrice

Esercizio: Sia $f: R^2 \to R^3$ definita da: $f(x, y) := (x+y, x-1, 2x-y)$

Vogliamo stabilire se f è lineare.

Troviamo le immagini di f per i vettori della base canonica di R^2
$f(1, 0) = (1, 0, 2), \quad f(0, 1) = (1, -1, -1).$

Poi consideriamo l'unica applicazione lineare $g: R^2 \to R^3$ definita dalle medesime condizioni $g(1, 0) = (1, 0, 2)$, $g(0, 1) = (1, -1, -1)$.

La matrice rappresentativa di g rispetto alle basi canoniche è :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si vede allora facilmente che:
$g(x, y) = (x + y, -y, 2x - y)$ da cui $f \neq g$

Per verifica mostriamo un vettore su cui le due funzioni f e g assumono valori diversi: $f(2, 0) = (2, 1, 4)$, $g(2, 0) = (2, 0, 4)$.
Segue la conferma che $f \neq g$. Pertanto, f **non** è lineare.

Omomorfismo associato a una matrice

Esercizio: Sia $f: R^2 \rightarrow R^3$ definita da: $f(x, y) := (0, -x, 2x - y)$

Vogliamo stabilire se f è lineare.

Troviamo le immagini di f per i vettori della base canonica di R^2
$f(1, 0) = (0, -1, 2)$, $f(0, 1) = (0, 0, -1)$.

Poi consideriamo l'unica applicazione lineare $g: R^2 \rightarrow R^3$ definita dalle medesime condizioni $g(1, 0) = (0, -1, 2)$, $g(0, 1) = (0, 0, -1)$.

La matrice rappresentativa di g rispetto alle basi canoniche è :

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si vede allora facilmente che:
$g(x, y) = (0, -x, 2x - y)$ da cui $\boldsymbol{f = g}$

Pertanto, f è lineare.

Omomorfismo associato a una matrice

Osservazione: L'esempio precedente ha in realtà validità generale !

L'unica cosa che abbiamo sfruttato è che ciascuna delle espressioni $0, -x, 2x - y$ è un **polinomio omogeneo di primo grado** in x e y oppure il **polinomio nullo.**

[Ricordiamo che un polinomio omogeneo di primo grado è un polinomio in cui tutti gli addendi sono monomi di grado 1]

Esaminando gli esempi visti:

$2x - y + 1$ è un polinomio di primo grado non omogeneo, perché tra i suoi addendi c'è 1.

xy è un polinomio omogeneo di secondo grado.

Omomorfismi

<u>Esercizio</u>: Stabilire se esistono omomorfismi $f: R^3 \to R^2$ di spazi vettoriali tali che:

$f(1, 2, 1) = (0, 1)$

$f(1, 0, 2) = (0, 1)$

$f(2, 2, 1) = (2, 1)$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi.

I tre vettori (1, 2, 1), (1, 0, 2), (2, 2, 1) formano una base per R^3 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Essendo i tre vettori una base, allora esiste esattamente un solo omomorfismo f che soddisfa le condizioni date.

Omomorfismi

Esercizio: Stabilire se esistono omomorfismi $f: R^3 \to R[x]$ di spazi vettoriali tali che:

$f(1, 3, 0) = x$

$f(0, 1, 1) = x^2$

$f(1, 5, 2) = x + x^2$

In caso affermativo stabilire se esiste uno solo di tali omomorfismi.

I vettori (1, 3, 0), (0, 1, 1) e (1, 5, 2) non formano una base per R^3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Infatti: (1, 5, 2) = (1, 3, 0) + 2(0, 1, 1)

$f(1, 5, 2) = x + x^2$

$f(1, 3, 0) + 2f(0, 1, 1) = x + \mathbf{2}\, x^2$

$f(1, 5, 2) \neq f(1, 3, 0) + 2f(0, 1, 1)$

Omomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia $f : R^3 \to R^2$ l'omomorfismo definito dalle condizioni $f(1, 0, 1) := (3, 1)$, $f(1, 1, 1) := (1, 2)$, $f(0, 0, 1) := (0, 1)$. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche di R^3 e R^2.

$$(1,0,0) = (1,0,1) - (0,0,1),$$
$$(0,1,0) = -(1,0,1) + (1,1,1),$$
$$(0,0,1) = (0,0,1).$$

$$f(1,0,0) = f(1,0,1) - f(0,0,1) = (3,1) - (0,1) = (3,0),$$
$$f(0,1,0) = -f(1,0,1) + f(1,1,1) = -(3,1) + (1,2) = (-2,1),$$
$$f(0,0,1) = f(0,0,1) = (0,1).$$

La matrice di f rispetto alle basi canoniche è : $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Omomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia $f : R^3 \to R^2$ l'omomorfismo definito dalle condizioni $f(1, 0, 1) := (3, 1)$, $f(1, 1, 1) := (1, 2)$, $f(0, 0, 1) := (0, 1)$.
Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alle base di R^3 formata dai vettori $v_1 := (1, 0, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1)$, $v_3 := (0, 0, 1)$ e alla base di R^2 formata dai vettori $w_1 := (1, 1)$, $w_2 := (1, 2)$.

$$f(1,0,1) = (3,1) = 5(1,1) - 2(1,2),$$
$$f(1,1,1) = (1,2) = 0(1,1) + 1(1,2),$$
$$f(0,0,1) = (0,1) = -(1,1) + 1(1,2).$$

La matrice di f rispetto alle basi assegnate è : $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Omomorfismi

<u>Esercizio</u>: Stabilire se esiste un omomorfismo che verifica le seguenti condizioni e, in caso affermativo, dire se l'omomorfismo è unico.

$f : R^3[x] \to R^2$ tale che:
$f(1 + x^2) = (1, -2)$
$f(2 + x + x^2) = (1, 0)$

I polinomi $1 + x^2$, $2 + x + x^2$ sono linearmente indipendenti.

Se $p_3(x)$ è un qualsiasi vettore che insieme a $1 + x^2$ e $2 + x + x^2$ forma una base di $R^3[x]$,
allora per ogni vettore w_3 di R^2 esiste un unico omomorfismo f : $R^3[x] \to R^2$ tale che $f(1 + x^2) = (1, -2)$,
$f(2 + x + x^2) = (1, 0)$, $f(p_3(x)) = w_3$.

Per l'arbitrarietà di w_3 abbiamo allora infiniti omomorfismi come quello cercato.

Omomorfismi

<u>Esercizio</u>: Determinare l'immagine del vettore (x, y, z, w) tramite l'omomorfismo $f: R^4 \to R^3$ associato alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e_1 := (1, 2, 0, 0), e_2 := (1, 0, 1, 0),$
$e_3 := (1, 3, 0, 0), e_4 := (0, 0, 0, 1)$

$f_1 := (1, 2, 1), f_2 := (1, 0, 2), f_3 := (2, 2, 1)$

$$(x, y, z, w) = a(1, 2, 0, 0) + b(1, 0, 1, 0) + c(1, 3, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ 2a + 3c = y \\ b = z \\ d = w \end{cases}$$

Notiamo che in questo sistema noi conosciamo x, y, z, w e dobbiamo determinare a, b, c, d.

Omomorfismi

<u>Esercizio</u>: Determinare l'immagine del vettore (x, y, z, w) tramite l'omomorfismo $f: R^4 \to R^3$ associato alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e_1 := (1, 2, 0, 0), e_2 := (1, 0, 1, 0),$
$e_3 := (1, 3, 0, 0), e_4 := (0, 0, 0, 1)$

$f_1 := (1, 2, 1), f_2 := (1, 0, 2), f_3 := (2, 2, 1)$

$$(x, y, z, w) = a(1, 2, 0, 0) + b(1, 0, 1, 0) + c(1, 3, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ 2a + 3c = y \\ b = z \\ d = w \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3x - y - 3z, \; b = z, \\ c = -2x + y + 2z, \quad d = w. \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x - y - 3z \\ z \\ -2x + y + 2z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 2z \\ 2x - 2z + w \\ 2x - y - z + 2w \end{pmatrix}$$

Omomorfismi

Esercizio: Determinare l'immagine del vettore (x, y, z, w) tramite l'omomorfismo $f: R^4 \to R^3$ associato alla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$e_1 := (1, 2, 0, 0)$, $e_2 := (1, 0, 1, 0)$,
$e_3 := (1, 3, 0, 0)$, $e_4 := (0, 0, 0, 1)$

$f_1 := (1, 2, 1)$, $f_2 := (1, 0, 2)$, $f_3 := (2, 2, 1)$

$$(x, y, z, w) = a(1,2,0,0) + b(1,0,1,0) + c(1,3,0,0) + d(0,0,0,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x - y - 3z \\ z \\ -2x + y + 2z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 2z \\ 2x - 2z + w \\ 2x - y - z + 2w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= (3x - y - 2z)\boldsymbol{f}_1 + (2x - 2z + w)\boldsymbol{f}_2 + (2x - y - z + 2w)\boldsymbol{f}_3 \\ &= (9x - 3y - 6z + 5w, 10x - 4y - 6z + 4w, 9x - 2y - 7z + 4w). \end{aligned}$$