L4: Rango di una matrice (7-8)

Argomenti lezione:

- Definizione di rango
- Proprietà del rango
- Teorema dell'orlare
- Teorema di Rouché-Capelli

sama@ing.uniroma3.it

Rango di una matrice

Definizione di rango

Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ ed $n \leq q$. **Un minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe ed n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

I minori di ordine 1 di A sono ovviamente le 12 matrici a una riga e una colonna formate dai 12 elementi di A.

Definizione di rango

Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ ed $n \leq q$. **Un minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe ed n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo i <u>minori di ordine 2</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

un minore di ordine 2

Definizione di rango

Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ ed $n \leq q$. **Un minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe ed n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo i minori di ordine 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & \boxed{4} \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 4 & \boxed{6} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

un altro minore di ordine 2

Definizione di rango

Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ ed $n \leq q$. **Un minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe ed n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo i <u>minori di ordine 2</u>:

6 minori scegliendo le prime due righe di A in tutti i modi possibili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definizione di rango

Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ ed $n \leq q$. **Un minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe ed n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo i minori di ordine 2:

In totale abbiamo 18 minori di ordine 2:

- 6 minori scegliendo le prime due righe di A in tutti i modi possibili.
- 6 minori scegliendo la prima riga e l'ultima riga di A in tutti i modi possibili.
- 6 minori scegliendo le ultime due righe di A in tutti i modi possibili.

Definizione di rango

Sia A una matrice di tipo (p, q). Sia n un numero intero positivo tale che $n \leq p$ ed $n \leq q$. **Un minore** di ordine n di A è una matrice che si ottiene scegliendo n righe ed n colonne di A e prendendo gli elementi di A che si trovano sia sulle righe che sulle colonne scelte.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo i minori di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Definizione di rango

I minori di una matrice sono sempre delle matrici quadrate, di cui possiamo quindi calcolare il determinante.

Una matrice A ha **rango** (o **caratteristica**) ***rk A*** uguale ad n se:

1. Esiste almeno un minore di A di ordine n con determinante $\neq 0$
2. Tutti i minori di A di ordine <u>maggiore</u> di n hanno determinante $= 0$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale minore è invertibile, ovvero ha determinante $\neq 0$.

Il rango della matrice A è maggiore o uguale a 2.

Definizione di rango

I minori di una matrice sono sempre delle matrici quadrate, di cui possiamo quindi calcolare il determinante.

Una matrice A ha **rango** (o **caratteristica**) ***rk A*** uguale ad n se:

1. Esiste almeno un minore di A di ordine n con determinante $\neq 0$
2. Tutti i minori di A di ordine <u>maggiore</u> di n hanno determinante $= 0$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Tutti i quattro minori di A di ordine 3 non sono invertibili

Il rango della matrice A è quindi uguale a 2 : $\boldsymbol{rk\ A = 2}$

Definizione di rango

Se tutti i minori di A hanno determinante nullo, allora $rk\ A = 0$

⇨ Una matrice ha rango 0 se e solo se è la matrice nulla.

<u>Dimostrazione</u>:

Se $A = 0$ allora tutti i minori di qualsiasi ordine estratti da A sono nulli e hanno quindi determinante nullo. Dunque A ha rango 0.

Se $rk\ A = 0$, tutti i minori estratti da A hanno determinante = 0. Poiché il determinante di una matrice di ordine 1 è uguale all'unico elemento della matrice, si ha che <u>tutti</u> gli elementi di A sono nulli.

Proprietà del rango

Per ogni matrice A si ha: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} {}^tA$

<u>Dimostrazione</u>:

I minori della trasposta di A sono, ovviamente, tutte e sole le matrici trasposte dei minori di A.
Poiché una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante, si ha $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} {}^tA$

Proprietà del rango

Sia A una matrice. Se tutti i minori estratti da A di un certo ordine fissato n hanno determinante nullo, allora tutti i minori estratti da A di ordine più grande di n hanno determinante nullo. Si ha ***rk A < n***

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vediamo i minori di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo, segue ***rk A < 3***

sama@ing.uniroma3.it

Teorema dell'orlare

Dato un minore B di ordine n di una matrice A, un minore C di A di ordine $n + 1$ è detto **orlato** di B se B è un minore di C.

In altre parole, il minore C è ottenuto dal minore B aggiungendo ad esso un'altra riga e un'altra colonna di A.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

minore B

minore C $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

Teorema dell'orlare

Teorema dell'orlare: Sia A una matrice e sia B un suo minore con determinante $\neq 0$. Se tutti gli orlati di B hanno determinante nullo, allora il rango della matrice A è uguale all'ordine del minore B.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

minore B

Invece di calcolare i minori di tutti i 16 minori di ordine 3, possiamo limitarci a considerare solo gli orlati di B che sono 4.

[N.B. I 4 orlati si ottengono da: terza riga – seconda colonna, terza riga – quarta colonna, quarta riga – seconda colonna, quarta riga – quarta colonna.]

Teorema dell'orlare

<u>Teorema dell'orlare</u>: Sia A una matrice e sia B un suo minore con determinante $\neq 0$. Se tutti gli orlati di B hanno determinante nullo, allora il rango della matrice A è uguale all'ordine del minore B.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

minore B

Invece di calcolare i minori di tutti i 16 minori di ordine 3, possiamo limitarci a considerare solo gli orlati di B che sono 4.

… Facendo i calcoli si trova che hanno tutti determinante nullo: possiamo fermarci e affermare che $rk\ A = 2$

Teorema dell'orlare

<u>Esercizio di base</u>: Calcoliamo il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} B_1 \\ \\ \end{matrix}$$

Consideriamo il minore B_1 formato dalla prima riga e dalla prima colonna. Ovviamente il suo determinante è diverso da 0. Proseguiamo orlando B_1 . . .

N.B. Bisogna orlare solamente se il minore B_1 ha *det* $B_1 \neq 0$!

Teorema dell'orlare

Esercizio di base: Calcoliamo il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 & 8 \end{matrix} & \begin{matrix} 12 & 8 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Questo minore ha determinante nullo: dobbiamo proseguire.

Teorema dell'orlare

<u>Esercizio di base</u>: Calcoliamo il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Anche il minore così ottenuto ha determinante nullo: dobbiamo proseguire.

sama@ing.uniroma3.it

Teorema dell'orlare

Esercizio di base: Calcoliamo il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{B_2}$$

Questo minore (che chiameremo B_2) ha determinante non nullo: il rango di A è almeno 2.

Ora dobbiamo proseguire considerando gli orlati di B_2 . . .

> N.B. Bisogna orlare solamente se il minore B_2 ha *det* $B_2 \neq 0$!

Teorema dell'orlare

Esercizio di base: Calcoliamo il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}^{B_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ otteniamo un minore che ha determinante = 0

Teorema dell'orlare

<u>Esercizio di base</u>: Calcoliamo il rango della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix} B_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \boxed{4} & 8 & 12 & \boxed{8} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{4} \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ \boxed{4} & 8 & 12 & \boxed{8} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ otteniamo due minori che hanno determinante = 0

$\Rightarrow$ poiché B_2 non ha altri orlati, concludiamo che $rk\ A = 2$

Teorema dell'orlare

<u>Esercizio</u>: Calcoliamo il rango della matrice col teorema dell'orlare:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

B_1

• Il minore B_1 formato dalla prima riga e dalla prima colonna è invertibile ($det\ B_1 \neq 0$). Quindi $rk\ A \geq 1$.

• Determinante degli orlati di B_1 : orlando B_1 con la seconda riga e la seconda colonna otteniamo un minore B_2 con $det\ B_2 \neq 0$

B_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Teorema dell'orlare

Esercizio: Calcoliamo il rango della matrice col teorema dell'orlare:

$$B_2 \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 6 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

• Consideriamo un orlato di B_2. Se orliamo B_2 con la terza riga e la terza colonna otteniamo un minore con determinante nullo:

• Consideriamo un altro orlato di B_2. Se orliamo B_2 con la terza riga e la quarta colonna otteniamo un minore con determinante nullo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

B_2 non ha altri orlati.

***rk A* = 2**

Teorema di Rouchè-Capelli

sama@ing.uniroma3.it

Sistemi di equazioni lineari

Dal teorema di Cramer: un sistema di n equazioni in n incognite ha una sola soluzione se la matrice dei coefficienti è invertibile

Studiamo ora il caso più generale in cui abbiamo:

- Sistema di p equazioni lineari a coefficienti reali in q incognite
- La matrice dei coefficienti del sistema non è invertibile

Sfrutteremo il calcolo del rango di due particolari matrici per individuare se un sistema ha o non ha soluzioni.
Inoltre, studieremo il metodo di Rouché-Capelli per il calcolo delle eventuali soluzioni del sistema (se il sistema è **risolubile**).

Definizioni

Sistema di *p* equazioni lineari a coefficienti reali in *q* incognite:

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti del sistema

(p, q)

matrice completa del sistema

$(p, q+1)$

Definizioni

Sistema di *p* equazioni lineari a coefficienti reali in *q* incognite:

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

matrice colonna delle incognite $(q,1)$

matrice colonna dei termini noti $(p,1)$

Definizioni

Sistema di *p* equazioni lineari a coefficienti reali in *q* incognite:

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Una soluzione del sistema risolubile *S* è una *q*-upla di numeri reali

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_q)$

che sostituiti nelle equazioni del sistema alle incognite

$(x_1, x_2, \ldots, x_q)$

danno delle identità.

$\boxed{\mathrm{Sol}(S) \subseteq \mathbb{R}^q}$

Indichiamo con il simbolo *Sol* (*S*) l'insieme delle soluzioni di *S*.

Definizioni

Sistema di *p* equazioni lineari a coefficienti reali in *q* incognite:

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$S\colon \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Ogni sistema *S* può essere scritto nella forma matriciale:

$$S\colon AX = B$$

Una soluzione del sistema *S* si scrive come la matrice colonna:

$$X_0 \in \mathrm{M}(q, 1, \mathbb{R})$$

Per verifica, se X_0 è sostituita in *S* alla matrice colonna *X* :

$$AX_0 = B$$

Definizioni

Un esempio:

$$S:\ \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice *A* è invertibile. Si tratta quindi di un sistema Crameriano.

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

Definizioni

Un esempio:

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice *A* è invertibile. Si tratta quindi di un sistema Crameriano.

Esso è pertanto dotato di una sola soluzione. Svolgendo i calcoli:

$$\mathrm{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

Un sistema Crameriano di *n* equazioni in *n* incognite ha la matrice dei coefficienti *A* e la matrice completa *A'* ambedue di rango *n*.

Definizioni

Un altro esempio:

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni: $\mathrm{Sol}(S) = \varnothing$

La prima e terza equazione sono evidentemente incompatibili

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$rk\, A = 2$ $\qquad$ $rk\, A' = 3$

In questo caso il teorema dell'orlare non ci avrebbe avvantaggiato, perché l'unico orlato è anche l'unico minore di ordine 3 di A'.

Teorema di Rouché-Capelli

Teorema di Rouché-Capelli: Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti del sistema S e sia A' la matrice completa del sistema. Il sistema S è risolubile se e solo se $rk\, A' = rk\, A$

Esempi:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

$rk\, A = 2$ $\qquad$ $rk\, A' = 2$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Sol}(S) = \emptyset$$

$rk\, A = 2$ $\qquad$ $rk\, A' = 3$

Teorema di Rouché-Capelli

Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti di S e sia A' la matrice completa del sistema. Mostrare che $rk\ A' \geq rk\ A$.

<u>Dimostrazione</u>:

Sia r il rango di A: allora A possiede almeno un minore di ordine r con determinante non nullo. Sia B un tal minore.

B è un minore anche di A' che ha, pertanto, rango almeno r.

Inoltre, nel caso in cui il sistema è non risolubile si può dimostrare che $rk\ A' = rk\ A + 1$.

[Se il sistema è risolubile già sappiamo che $rk\ A' = rk\ A$.]

Teorema di Rouché-Capelli

Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti di S e sia A' la matrice completa del sistema. Allora si ha: $rk\, A' \geq rk\, A$.

Esempio (1):

$$A := \begin{array}{c} B_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & \boxed{-2} & -3 \\ \boxed{4} & 6 & \boxed{1} & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$rk\, A = 2$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & -3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & 1 \\ 6 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 3 & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & 6 & \mathbf{1} \\ 6 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema di Rouché-Capelli

Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti di S e sia A' la matrice completa del sistema. Allora si ha: $rk\, A' \geq rk\, A$.

<u>Esempio (1)</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$rk\, A = 2$

determinante = 0, già noto (vedi A)

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante = 0, ultima colonna * 2 = prima colonna

Teorema di Rouché-Capelli

Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti di S e sia A' la matrice completa del sistema. Allora si ha: $rk\,A' \geq rk\,A$.

Esempio (1):

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$rk\,A = 2$

determinante = 0, già noto (vedi A)

$\Downarrow$

sistema risolubile !

$\Uparrow$

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$rk\,A' = 2 \Longleftarrow$ determinante = 0

Teorema di Rouché-Capelli

Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti di S e sia A' la matrice completa del sistema. Allora si ha: $rk\, A' \geq rk\, A$.

<u>Esempio (2)</u>:

$$
A := \begin{array}{c} B_2 \\ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}} & \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{array} & \begin{array}{cc} -4 & 3 \\ -7 & 5 \end{array} \end{array}\right) \end{array}
$$

$rk\, A = 2$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & -3 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

Non serve calcolare gli orlati di B_2 con la quarta colonna, perché è identica alla prima.

Teorema di Rouché-Capelli

Sia *S* un sistema lineare. Sia *A* la matrice dei coefficienti di *S* e sia *A'* la matrice completa del sistema. Allora si ha: $rk\, A' \geq rk\, A$.

<u>Esempio (2)</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$rk\, A = 2$

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante = 0

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante $\neq 0$

Teorema di Rouché-Capelli

Sia S un sistema lineare. Sia A la matrice dei coefficienti di S e sia A' la matrice completa del sistema. Allora si ha: $rk\,A' \geq rk\,A$.

Esempio (2):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$rk\,A = 2$

$\Downarrow$

sistema non risolubile !

$\Uparrow$

$rk\,A' \geq 3$

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante = 0

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante $\neq 0$

Procedimento di Rouché-Capelli

Teorema: Sia S un sistema lineare risolubile, e siano A e A' la matrice dei coefficienti di S e la matrice completa di S.
Sia n il rango di A (e anche il rango di A', dato che S è risolubile) e sia B un minore invertibile di A di ordine n.
Allora il sistema S è equivalente al **sistema ridotto** SR che si ottiene considerando solo le n equazioni di S corrispondenti alle righe di B. Dunque: $Sol(S) = Sol(SR)$

Il teorema ci dice che, scelte in modo opportuno n equazioni di S, le altre sono "conseguenza" di queste n.

Procedimento di Rouché-Capelli

Come risolvere un sistema lineare *S* di *p* equazioni in *q* incognite.

Sia *A* la matrice del sistema *S* e sia *A'* la matrice completa di *S*.

Esempio:

$$S\colon \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \\ 6x + 9y - z - 2w = 3 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante $\neq 0$;

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Facendo i calcoli si trova che A ha rango 2 e che un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, e.g., il minore B :

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} & 3 & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} & -3 \\ & 6 & & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$det\ B \neq 0$$

Procedimento di Rouché-Capelli

2. Calcoliamo il rango della matrice *A'* , ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di *B* con l'ultima colonna di *A'* (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe:

<u>Esempio</u>:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante = 0

Procedimento di Rouché-Capelli

2. Calcoliamo il rango della matrice *A'* , ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di *B* con l'ultima colonna di *A'* (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe:

2.1 Se tutti gli orlati così determinati hanno determinante nullo, allora *rk A* = *rk A'* e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile: passiamo al punto successivo;

<u>Esempio</u>:

$$A' := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} & 3 & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} & -3 & 1 \\ & 6 & & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

determinante = 0

Procedimento di Rouché-Capelli

2. Calcoliamo il rango della matrice *A’* , ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di *B* con l'ultima colonna di *A’* (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe:

2.1 Se tutti gli orlati così determinati hanno determinante nullo, allora *rk A* = *rk A’* e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile: passiamo al punto successivo;

2.2 Invece, se anche uno solo di tali orlati ha determinante ≠ 0, il rango di *A’* è diverso dal rango di *A* (è anzi esattamente uguale a 1 + *rk A*): il sistema non è risolubile e ci fermiamo.

Procedimento di Rouché-Capelli

3. Consideriamo il sistema ridotto *SR* formato dalle *n* equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore *B*.

Il sistema ridotto *SR* è equivalente al sistema *S*;

<u>Esempio</u>:

$$S: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \\ 6x + 9y - z - 2w = 3 \end{cases}$$

$$A' := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} & 3 & \boxed{\begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}} & -3 & 1 \\ & 6 & & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$SR: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

4. Portiamo a secondo membro (nel sistema *SR*) le $q - n$ incognite i cui coefficienti **non** concorrono a formare il minore *B*;

Esempio:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$SR: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3y + 3w \\ 4x + z = 2 - 6y - w \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

5. Poniamo le incognite portate a secondo membro uguali a dei parametri $h_1, h_2, \dots, h_{q-n}$ (se $q = n$ a secondo membro non c'è alcuna incognita e quindi non occorre assegnare alcun parametro);

Esempio:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3y + 3w \\ 4x + \ \ z = 2 - 6y - \ \ w \end{cases}$$

$$\boxed{y = h} \qquad \boxed{w = k}$$

al variare dei parametri h (h_1) e k (h_2)

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3h + 3k \\ 4x + \ \ z = 2 - 6h - \ \ k \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

6. Risolviamo il sistema parametrico Crameriano (di matrice B) nelle incognite rimaste a primo membro: otteniamo queste incognite in funzione dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3h + 3k \\ 4x + z = 2 - 6h - k \end{cases} \qquad \boxed{y = h} \qquad \boxed{w = k}$$

al variare dei parametri h (h_1) *e k* (h_2)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-3h+3k & -2 \\ 2-6h-k & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{5-15h+k}{10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3h+3k \\ 4 & 2-6h-k \end{vmatrix}}{\det B} = -\frac{7}{5}k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5-15h+k}{10} \\ y = h \\ z = -\dfrac{7}{5}k \\ w = k \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

Verifica correttezza soluzione:

$$S:\ \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + \ \ z + \ \ w = 2 \\ 6x + 9y - \ \ z - 2w = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5 - 15h + k}{10} \\ y = h \\ z = -\dfrac{7}{5}k \\ w = k \end{cases}$$

Possiamo verificare che le soluzioni così trovate sono corrette sostituendo le espressioni trovate nelle equazioni del sistema *S*. Sostituendo, ad esempio, nella prima equazione di *S* troviamo:

$$2\frac{5 - 15h + k}{10} + 3h - 2\left(-\frac{7}{5}k\right) - 3k = 1 \quad \text{OK}$$

Attenzione: Stiamo verificando solamente che le soluzioni trovate siano effettivamente soluzioni, ma non stiamo verificando che siano **tutte** le soluzioni del sistema *S*.

Procedimento di Rouché-Capelli

Osservazioni:

- **Il procedimento dipende da quale minore *B* scegliamo.** Cambiando minore *B* otterremo le stesse soluzioni ma parametrizzate in forma diversa.

Esempio:

$$S: \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow SR: \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - h \\ y = h \\ z = -2 \end{cases}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow SR: \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h \\ y = 5 - h \\ z = -2 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

<u>Osservazioni</u>:

- **Il procedimento dipende da quale minore *B* scegliamo.** Cambiando minore *B* otterremo le <u>stesse soluzioni</u> ma parametrizzate in forma diversa.

<u>Esempio</u>:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 - h \\ y = h \\ z = -2 \end{cases} \Longleftarrow \quad k = 5 - h$$

$$\Uparrow$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = h \\ y = 5 - h \\ z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 5 - k \\ z = -2 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

Osservazioni:

- Sia S un sistema risolubile di p equazioni in q incognite.
  Sia n il rango della matrice del sistema.
  Allora le soluzioni di S dipendono da $q - n$ parametri.
- **Cosa significa che "p" = n ?**
  Se $p = n$, quando consideriamo il sistema ridotto SR
  dobbiamo prendere n equazioni, quindi tutte le equazioni di S.
  Pertanto tutte le equazioni di S sono necessarie.

Procedimento di Rouché-Capelli

Osservazioni:

- Sia S un sistema risolubile di p equazioni in q incognite.

  Sia n il rango della matrice del sistema.

  Allora le soluzioni di S dipendono da $q - n$ parametri.

- **Cosa significa che "q" = n ?**

  Se $q = n$ quando consideriamo il sistema ridotto SR abbiamo un sistema di n equazioni in n incognite e la matrice del sistema ridotto contiene un minore di ordine n invertibile.

  Il sistema ridotto è pertanto Crameriano.

  Segue che il sistema S ha un'unica soluzione.

Procedimento di Rouché-Capelli

Come risolvere un sistema lineare *S* di *p* equazioni in *q* incognite.

Sia *A* la matrice del sistema *S* e sia *A'* la matrice completa di *S*.

<u>Esercizio (1)</u>:

$$S: \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante $\neq 0$;

<u>Esercizio (1)</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad rk\, A = 2$$

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

2. Calcoliamo il rango della matrice *A'* , ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di *B* con l'ultima colonna di *A'* (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe;

<u>Esercizio (1)</u>:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

rk A = *rk A'* = 2

Il sistema ammette quindi soluzioni.

Poichè il rango della matrice del sistema *A'* è uguale al numero delle incognite (ovvero *x* e *y*), allora possiamo affermare che il sistema ha un'unica soluzione.

Procedimento di Rouché-Capelli

3. Consideriamo il sistema ridotto *SR* formato dalle *n* equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore *B*.

Il sistema ridotto *SR* è equivalente al sistema *S*;

Esercizio (1):

$$S: \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + \ \ y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$SR: \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + \ \ y = 1 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

4. Portiamo a secondo membro (nel sistema *SR*) le $q - n$ incognite i cui coefficienti **non** concorrono a formare il minore *B*;

Esercizio (1):

$$SR\colon \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ \;\; x + \;\; y = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema Crameriano: non dobbiamo portare a secondo membro alcuna incognita.

Procedimento di Rouché-Capelli

5. Poniamo le incognite portate a secondo membro uguali a dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$ (se $q = n$ a secondo membro non c'è alcuna incognita e quindi non occorre assegnare alcun parametro);

<u>Esercizio (1)</u>:

$$SR: \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema Crameriano: non dobbiamo portare a secondo membro alcuna incognita.

Abbiamo $q = n$, quindi assegniamo alcun parametro.

Procedimento di Rouché-Capelli

6. Risolviamo il sistema parametrico Crameriano (di matrice B) nelle incognite rimaste a primo membro: otteniamo queste incognite in funzione dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$.

Esercizio (1):

$$SR\colon \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ \ \ x + \ \ y = 1 \end{cases}$$

Possiamo risolvere il sistema tramite il teorema di Cramer e trovare l'unica soluzione di S:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

Come risolvere un sistema lineare *S* di *p* equazioni in *q* incognite.

Sia *A* la matrice del sistema *S* e sia *A'* la matrice completa di *S*.

Esercizio (2):

$$S:\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante $\neq 0$;

Esercizio (2):

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Il minore B_2 di A è invertibile

$rk\ A \geq 2$

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 5 & 4 \end{matrix} & 4 \end{pmatrix}$$

Il minore B_3 di A è invertibile

$rk\ A \geq 3$

Procedimento di Rouché-Capelli

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante $\neq 0$;

<u>Esercizio (2)</u>:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Il minore B_2 di A è invertibile

$rk\ A \geq 2$

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 5 & 4 \end{matrix} & 4 \end{pmatrix}$$

Il minore B_3 di A è invertibile

$rk\ A \geq 3$

Dobbiamo orlare B_3. L'unico orlato di B_3 è la matrice A stessa. Svolgendo i calcoli si verifica che il $det\ A = 0$, in quanto la terza colonna coincide con la quarta colonna. Quindi $rk\ A = 3$.

Procedimento di Rouché-Capelli

2. Calcoliamo il rango della matrice *A'* , ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di *B* con l'ultima colonna di *A'* (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe;

Esercizio (2):

Si ottiene un unico possibile minore:

$$A' := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 5 & 4 \end{matrix} & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Facendo i calcoli si trova che il minore così ottenuto ha determinante nullo.

Dunque *rk A'* = 3 = *rk A*, e il sistema ha soluzioni.

Procedimento di Rouché-Capelli

3. Consideriamo il sistema ridotto *SR* formato dalle *n* equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore *B*.

Il sistema ridotto *SR* è equivalente al sistema *S*;

Esercizio (2):

$$S: \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases} \quad A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$SR: \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

4. Portiamo a secondo membro (nel sistema *SR*) le $q - n$ incognite i cui coefficienti **non** concorrono a formare il minore *B*;

<u>Esercizio (2)</u>:

$$SR: \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \quad A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 - 2x_4 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

5. Poniamo le incognite portate a secondo membro uguali a dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$ (se $q = n$ a secondo membro non c'è alcuna incognita e quindi non occorre assegnare alcun parametro);

Esercizio (2):

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - \boxed{x_4} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 - \boxed{x_4} \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 - 2\boxed{x_4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - \boxed{h} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 - \boxed{h} \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 - 2\boxed{h} \end{cases}$$

Soluzioni del sistema S al variare del parametro ***h***

Procedimento di Rouché-Capelli

6. Risolviamo il sistema parametrico Crameriano (di matrice B) nelle incognite rimaste a primo membro: otteniamo queste incognite in funzione dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$.

Esercizio (2):

Soluzioni del sistema S al variare di h

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 - h \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 - h \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 - 2h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 - h \\ x_4 = h \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

Come risolvere un sistema lineare *S* di *p* equazioni in *q* incognite.

Sia *A* la matrice del sistema *S* e sia *A'* la matrice completa di *S*.

Esercizio (3):

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante $\neq 0$;

<u>Esercizio (3)</u>:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\3\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il minore B_2 di A è invertibile

$rk\, A \geq 2$

Dobbiamo considerare gli orlati di B_2 fino a che eventualmente ne troviamo uno con determinante $\neq 0$.

Facendo i calcoli (sono 6 orlati) si trova che hanno tutti determinante $= 0$, dunque A ha rango 2.

[In realtà, serve calcolare solo 4 orlati di B_2 (quarta/quinta colonna combinata a terza/quarta riga), perché le prime due colonne di A sono identiche.]

Procedimento di Rouché-Capelli

2. Calcoliamo il rango della matrice *A'* , ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di *B* con l'ultima colonna di *A'* (cioè con la colonna dei termini noti) e con tutte le possibili righe;

<u>Esercizio (3)</u>:

$$A' := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ 7 \end{matrix} \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo 2 orlati di B_2 (terza e quarta riga) con l'ultima colonna di *A'* .

Entrambi gli orlati hanno determinante nullo.

Pertanto *A'* ha rango 2 e il sistema è risolubile.

Procedimento di Rouché-Capelli

3. Consideriamo il sistema ridotto *SR* formato dalle *n* equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore *B*.

Il sistema ridotto *SR* è equivalente al sistema *S*;

<u>Esercizio (3)</u>:

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + x_5 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 2 & 0 & 5 \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{1} & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$SR: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

4. Portiamo a secondo membro (nel sistema *SR*) le $q - n$ incognite i cui coefficienti **non** concorrono a formare il minore B;

Esercizio (3):

$$A' := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \boxed{1} & 2 & 0 & 5 \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{1} & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 7 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$SR: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 - x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 7 - 2x_2 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

5. Poniamo le incognite portate a secondo membro uguali a dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$ (se $q = n$ a secondo membro non c'è alcuna incognita e quindi non occorre assegnare alcun parametro);

<u>Esercizio (3)</u>:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 - x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 + x_3 = 7 - 2x_2 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$\boxed{x_2 = h_1,\, x_4 = h_2 \text{ e } x_5 = h_3}$$

Soluzioni del sistema S al variare di h_1, h_2, h_3

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 - h_1 - 2h_2 \\ 2x_1 + x_3 = 7 - 2h_1 - 3h_2 - h_3 \end{cases}$$

Procedimento di Rouché-Capelli

6. Risolviamo il sistema parametrico Crameriano (di matrice B) nelle incognite rimaste a primo membro: otteniamo queste incognite in funzione dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$.

<u>Esercizio (3)</u>:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 - h_1 - 2h_2 \\ 2x_1 + x_3 = 7 - 2h_1 - 3h_2 - h_3 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - h_1 - h_2 - h_3 \\ x_3 = 3 \qquad - h_2 + h_3 \end{cases}$$

Soluzioni del sistema S al variare di h_1 , h_2 , h_3

$$\begin{cases} x_1 = 2 - h_1 - h_2 - h_3 \\ x_2 = h_1 \\ x_3 = 3 - h_2 + h_3 \\ x_4 = h_2 \\ x_5 = h_3 \end{cases}$$

Sunto: Procedimento Rouché-Capelli

Sia A (A') la matrice (completa) del sistema S di p equazioni e q incognite.

1. Calcoliamo il rango della matrice A (sia n questo rango) e scegliamo un minore B di A di ordine n con determinante $\neq 0$;

2. Calcoliamo il rango della matrice A', ovvero calcoliamo i determinanti degli orlati di B con l'ultima colonna di A' e con tutte le possibili righe;

3. Se ***rk A = rk A'*** : Prendiamo il sistema ridotto SR formato dalle n equazioni i cui coefficienti concorrono a formare il minore B. SR è equivalente a S;

4. Portiamo a secondo membro (nel sistema SR) le $q - n$ incognite i cui coefficienti **non** concorrono a formare il minore B;

5. Poniamo le incognite portate a secondo membro uguali a dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$ (se $q = n$ a secondo membro non c'è alcuna incognita e quindi non occorre assegnare alcun parametro);

6. Risolviamo il sistema parametrico Crameriano (di matrice B) nelle incognite rimaste a primo membro: otteniamo queste incognite in funzione dei parametri $h_1, h_2, \ldots, h_{q-n}$.