L14: Immagine (27)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Immagine di un omomorfismo
- Calcolo dell'immagine
- Esercizi

marcella.sama@uniroma3.it

Immagine di un omomorfismo

Ricordiamo che, data un'applicazione tra insiemi $f : A \to B$, l'<u>immagine</u> di f è il sottoinsieme $f(A)$ dell'insieme B formato dalle immagini degli elementi di A tramite f. Vale a dire da **tutti gli elementi b di B per cui esiste a in A tale che $f(a) = b$**.

<u>Esempio</u>: Sia $f : R^2 \to R^3$ definita da: $f(x, y) := (x+2y, x+y, x-y)$.

L'immagine di f si determina tramite i $w := (a, b, c)$ di R^3 per cui esiste $v := (x, y)$ tale che $f(v) = w$. Cioè: $(x+2y, x+y, x-y) = (a, b, c)$.

Da cui il vettore v esiste se e solo se il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x + y = b \\ x - y = c \end{cases} \xrightarrow[\text{di Gauss}]{\text{metodo}} \begin{cases} x + 2y = a \\ - y = a - b \\ 0 = 2a - 3b + c \end{cases}$$

Il sistema è risolubile <u>se e solo se</u> $2a - 3b + c = 0$.

Immagine di un omomorfismo

Ricordiamo che, data un'applicazione tra insiemi $f : A \rightarrow B$, l'<u>immagine</u> di f è il sottoinsieme $f(A)$ dell'insieme B formato dalle immagini degli elementi di A tramite f. Vale a dire da **tutti gli elementi *b* di *B* per cui esiste *a* in *A* tale che *f* (*a*) = *b***.

<u>Esempio</u>: Sia $f : R^2 \rightarrow R^3$ definita da: $f(x, y) := (x+2y, x+y, x-y)$.

L'immagine di f si determina tramite i $w := (a, b, c)$ di R^3 per cui esiste $v := (x, y)$ tale che $f(v) = w$. Cioè: $(x+2y, x+y, x-y) = (a, b, c)$.

Da cui il vettore v esiste se e solo se il seguente sistema è risolubile:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x + y = b \\ x - y = c \end{cases} \xrightarrow[\text{di Gauss}]{\text{metodo}} \begin{cases} x + 2y = a \\ - y = a - b \\ 0 = 2a - 3b + c \end{cases}$$

$f(\mathbb{R}^2) = \{(a, b, c) \mid 2a - 3b + c = 0\}$ è un <u>sottospazio vettoriale</u> di R^3

Immagine di un omomorfismo

<u>Teorema</u>: Se $f : V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali, allora $f(V)$ è un sottospazio vettoriale di W.

<u>Dimostrazione</u>: Osserviamo per prima cosa che $f(V)$ è non vuoto. Preso un qualsiasi v in V, il vettore $w := f(v)$ appartiene a $f(V)$.

- Dobbiamo ora mostrare che se w_1 e w_2 appartengono a $f(V)$, allora la loro somma $w_1 + w_2$ appartiene a $f(V)$.

Sappiamo che esistono v_1 e v_2 in V tali che $f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2$.
$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$. Segue $w_1 + w_2 \in f(V)$.

- Dobbiamo anche mostrare che se w appartiene a $f(V)$, e dato uno scalare k, allora kw appartiene a $f(V)$.

Si ha che esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Segue $f(k\,v) = k\,f(v) = k\,w$.
Da cui kw è l'immagine tramite f del vettore kv. Segue $kw \in f(V)$.

Immagine di un omomorfismo

Domanda: Se abbiamo un'applicazione non lineare $f : V \to W$ tra spazi vettoriali, cosa possiamo dire dell'immagine di f?

Risposta: Se abbiamo un'applicazione non lineare $f : V \to W$ tra spazi vett., non possiamo (a priori) dire nulla sull'immagine di f :

- Né che sia un sottospazio vettoriale di W.
- Né che non lo sia.

Bisogna valutare caso per caso come è fatto il sistema risultante.

Esempi:

- Sia $f : R^2 \to R^2$ l'applicazione non lineare $f(x, y) := (x^2, x + y)$

Si può verificare che in questo caso *non è* un sottospazio di R^2

- Sia $f : R^2 \to R^2$ l'applicazione non lineare $f(x, y) := (xy, 2xy)$

Si può verificare che in questo caso *è* un sottospazio di R^2

Calcolo dell'immagine

Teorema: Se $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se lo spazio vettoriale V è generato dai vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, allora $f(V)$ è generato dai vettori $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$.

Dimostrazione: Dobbiamo mostrare che ogni w dell'immagine di f si può esprimere come combin. lineare di $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)$.

Sappiamo che esiste un vettore v di V tale che $w = f(v)$. Possiamo ora esprimere v come combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$:

$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$

Ma allora $f(v) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + \dots + k_n f(v_n)$

Poiché $w = f(v)$ abbiamo dunque espresso w come combinazione lineare dei vettori $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$, come volevamo.

Calcolo dell'immagine

- Abbiamo mostrato che $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ generano $f(V)$, non tutto W (ciò è vero <u>solo</u> se $f(V) = W$, ovvero f è *suriettivo*).
- Notiamo poi che, anche nel caso in cui i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ formano una base per V, non è detto che $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ formano una base per $f(V)$.

<u>Contro-esempio</u>: Sia dato l'omomorfismo $f: R^3 \to R[x]$ definito da:

$f(a, b, c) := (a - b) + (b - c)\,x + (c - a)\,x^2$

$f(R^3)$ è generato dalle immagini dei vettori di una base di R^3.

Presa la base canonica, $f(R^3)$ è generato dai polinomi:

$f(1, 0, 0) = 1 - x^2,\ f(0, 1, 0) = -1 + x,\ f(0, 0, 1) = -x + x^2.$

Questi tre polinomi sono <u>linearmente dipendenti</u>:

$-x + x^2 = -(1 - x^2) - (-1 + x)$

Dunque, <u>non formano una base</u> per $f(R^3)$.

Calcolo dell'immagine

Corollario: Se $f : V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se la dimensione di V è finita, allora la dimensione di $f(V)$ è finita e $\dim f(V) \leq \dim V$. (Invece non sappiamo nulla sulla dim W.)

Dimostrazione: Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formano una base per V (e, dunque, $\dim V = n$), allora $f(V)$ è generato dagli n vettori $f(v_1)$, $f(v_2), \ldots, f(v_n)$, e, pertanto, la sua dimensione è al più n.

Osservazioni: Se $f : V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e $\dim V < \dim W$ allora f non può essere suriettivo (ovvero $f(V) \neq W$).

Nel caso in cui $\dim V \geq \dim W$ non possiamo dire nulla a priori: dobbiamo valutare caso per caso.

Calcolo dell'immagine

<u>Esercizio</u>: Sia V uno spazio vettoriale con una base formata dai vettori e_1, e_2, e_3, e_4. Sia W un altro spazio vettoriale con una base formata dai vettori f_1, f_2, f_3. Sia $f : V \to W$ l'omomorfismo:

$f(e_1) := f_1 + f_2 + f_3$; $f(e_2) := f_1 + 2f_2 + 3f_3$;

$f(e_3) := 3f_1 + 4f_2 + 5f_3$; $f(e_4) := -f_2 - 2f_3$.

Vogliamo determinare una base per l'immagine di f.

Consideriamo la matrice A le cui colonne danno le componenti di $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$ rispetto alla base formata da f_1, f_2, f_3:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{A a scalini}]{\text{riduciamo}} B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché gli scalini sono in I e II posizione troviamo che una base per $f(V)$ è data dai vettori $f(e_1)$ e $f(e_2)$, ovvero $f_1+f_2+f_3$ e $f_1+2f_2+3f_3$

Calcolo dell'immagine

Teorema: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissiamo una base per V, formata dai vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$, e una base per W, formata dai vettori $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Prendiamo la matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi date.

Risulta: $\dim f(V) = \mathrm{rk}\, A$. In particolare, abbiamo che f è suriettivo (i.e. $f(V) = W$) se e solo se $\mathrm{rk}\, A = \dim W$.

Osservazioni: Per determinare una base dell'immagine di f notiamo che le colonne della matrice A forniscono le componenti rispetto alla base $f_1, f_2, \ldots, f_m$ dei vettori $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ che generano $f(V)$. Possiamo quindi determinare una base di $f(V)$ calcolando il rango r della matrice A e scegliendo opportunamente r vettori tra $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$.

Calcolo dell'immagine

<u>Esercizio</u>: Prendiamo l'omomorfismo $f: R^3 \to R^4[x]$ definito da:

$f(a, b, c) := (2a + b + 8c) + (3a - b + 7c)\,x + (-a - 3c)\,x^2 + (b + 2c)\,x^3$

Determinare una base per $f(R^3)$.

La matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango 2: dim $f(R^3) = 2$. Poichè gli scalini sono in I e II posizione, una base per $f(R^3)$ è formata dall'immagine dei primi due vettori della base canonica di R^3, cioè da $f(1, 0, 0)$ e $f(0, 1, 0)$.

Una base per $f(R^3)$ è formata dai vettori: $2 + 3x - x^2$ e $1 - x + x^3$.

Calcolo dell'immagine

Esercizio: Stabilire se i seguenti omomorfismi sono suriettivi:

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[x]$ definito da

$$f(a,b,c) := a + ax + bx^2 + (c - b + a)x^5.$$

Possiamo dire subito che f non è suriettivo (i.e. $f(V) \neq W$) : R^3 ha dimensione finita, mentre $R[x]$ non ha dimensione finita.

Calcolo dell'immagine

<u>Esercizio</u>: Stabilire se i seguenti omomorfismi sono suriettivi:

b. $f: \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b+2c, a+2b+c, c+d).$$

La matrice A rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che questa matrice ha rango 3 e, quindi, dim $f(R^3) = 3$. Pertanto f <u>è suriettivo</u> (i.e. $f(V) = W$).

Calcolo dell'immagine

Esercizio: Stabilire se i seguenti omomorfismi sono suriettivi:

c. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}(2, 2, \mathbb{R})$ definito da:

$$f(a, b, c) := \begin{pmatrix} a - 4b & b - 2c \\ a + 3c & a + b + c \end{pmatrix}.$$

Possiamo dire subito che f non è suriettivo (i.e. $f(V) \neq W$) : infatti $\dim R^3 < \dim M(2, 2, R)$.

Calcolo dell'immagine

Esercizio: Sia $f : M(2, 2, R) \to R^2$ l'applicazione definita da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b, c+d)$$

Mostrare che f è un omomorfismo e stabilire se f è suriettivo.

L'applicazione f è un omomorfismo visto che $(a + b)$ e $(c + d)$ sono polinomi omogenei di grado 1 in a, b, c, d.

Non escludiamo che f è suriettivo, perchè $\dim M(2, 2, R) \geq \dim R^2$

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2.

Dunque, f è suriettivo.

Calcolo dell'immagine

<u>Esercizio</u>: Mostrare che le seguenti condizioni definiscono un unico omomorfismo $f : R^3 \to R^2$. Poi, stabilire se f è suriettivo.

$$f(1,2,1) = (0,1)$$
$$f(1,0,1) = (2,1)$$
$$f(0,0,1) = (0,1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

I tre vettori (1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1) costituiscono una base per R^3, abbiamo definito un unico omomorfismo $f : R^3 \to R^2$.

dim $R^3 \geq$ dim R^2 e quindi <u>non</u> escludiamo che f è suriettivo.

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base data di R^3 e dalla base canonica di R^2 è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2.

Dunque, f è suriettivo.