L7: Combinazioni lineari di vettori geometrici (12)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Introduzione
- Combinazione lineare di vettori
- Vettori linearmente indipendenti

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

- Introduciamo il concetto di combinazione lineare di vettori (del piano o dello spazio) e di vettori linearmente indipendenti.

- Dimostriamo poi che nel piano esistono coppie di vettori linearmente indipendenti, ma non esistono più di due vettori linearmente indipendenti.

- Si dimostra infine che nello spazio esistono terne di vettori linearmente indipendenti, ma non esistono più di tre vettori linearmente indipendenti.

Combinazione lineare di vettori

Sia nel piano che nello spazio, si ha la seguente definizione.

Dati n vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, e dati n numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

il vettore $v := \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

viene chiamato **combinazione lineare** dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$

con **coefficienti** $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Esempio</u>:

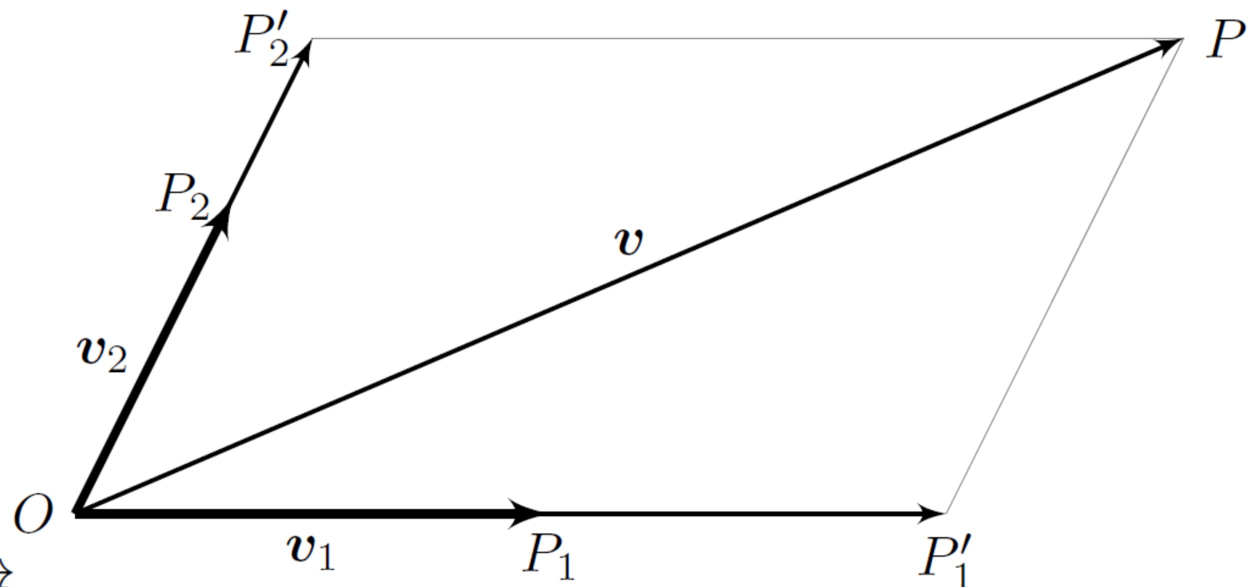
$$\boldsymbol{v}_1 := \overrightarrow{OP_1}$$

$$\boldsymbol{v}_2 := \overrightarrow{OP_2}$$

$$a_1\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{OP_1'}$$

$$a_2\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP_2'}$$

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{OP}$$



Combinazione lineare di vettori

Dati comunque n vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} 0v_i = 0$$

<u>Dimostrazione</u>:

Per definizione, abbiamo $0v = 0$ per ogni vettore v.

Pertanto $0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$

L'ultima uguaglianza si ottiene applicando ripetutamente la proprietà $0 + 0 = 0$, caso particolare di $v + 0 = v$ con $v = 0$.

Vettori linearmente indipendenti

Sia nel piano che nello spazio, si ha la seguente definizione.

Dati n vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, essi si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ <u>coefficienti non tutti nulli</u> tali che $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$

Dati n vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, essi si dicono **linearmente <u>in</u>dipendenti** se l'uguaglianza $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$

è verificata <u>solamente</u> nel caso in cui $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

L'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo

è la combinazione lineare con <u>tutti i coefficienti nulli</u>.

Vettori linearmente indipendenti

Analizziamo il significato geometrico di indipendenza lineare.

Teorema:

Un vettore v_1 è linearmente dipendente se e solo se $v_1 = 0$.

Dimostrazione:

Supponiamo che $v_1 = 0$: Allora $1v_1 = 0$ è una combinazione lineare di v_1 con coefficiente non nullo uguale al vettore nullo. Dunque, per definizione, v_1 è linearmente dipendente.

Viceversa, supponiamo che v_1 sia linearmente dipendente. Allora, per definizione, esiste $h \neq 0$ tale che $h\, v_1 = 0$. Moltiplicando ambo i membri per h^{-1} si ha: $h^{-1}\, h\, v_1 = h^{-1}\, 0$. D'altra parte $h^{-1}\, h\, v_1 = 1v_1 = v_1$ e $h^{-1}\, 0 = 0$. Dunque $v_1 = 0$.

Vettori linearmente indipendenti

Analizziamo il significato geometrico di indipendenza lineare.

Teorema:

Dato un vettore del piano (o dello spazio) $v := \overrightarrow{OA}$ linearmente indipendente. Sia r la retta passante per O e A.

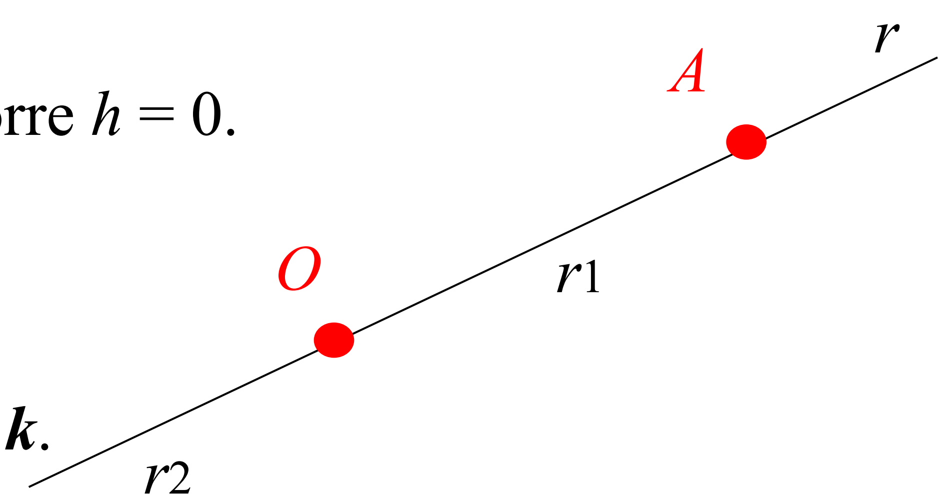
Dato un punto qualsiasi P della retta r, esiste un solo scalare h in R tale che $\overrightarrow{OP} = h\,\overrightarrow{OA}$.

Dimostrazione:

Se $P = O$ allora $\overrightarrow{OP} = 0$: basta porre $h = 0$.

Se $P \neq$ O, sia d(P,O) = k d(A,O):

- Se P in $r1$, $\overrightarrow{OP} = k\,\overrightarrow{OA}$, $h = k$.
- Se P in $r2$, $\overrightarrow{OP} = -\,k\,\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{h = -k}$.

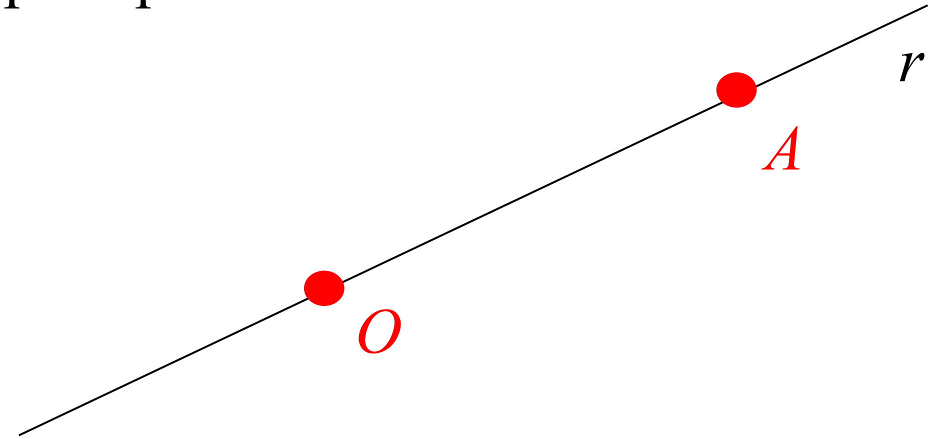


Vettori linearmente indipendenti

Analizziamo il significato geometrico di indipendenza lineare.

Segue il teorema:

Dato un vettore del piano (o dello spazio) $v := \overrightarrow{OA}$ linearmente indipendente. L'insieme delle *combinazioni lineari* di v, cioè l'insieme dei vettori hv al variare di h in R, è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ tali che il punto $\boldsymbol{P}$ appartenga alla retta r passante per i punti distinti O e A.



Vettori linearmente indipendenti

Teorema: Due vettori $v_1 := \overrightarrow{OP_1}$ e $v_2 := \overrightarrow{OP_2}$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti O, P_1 e P_2 sono allineati.

Dimostrazione:

Supponiamo che O, P_1 e P_2 sono allineati. Abbiamo due casi:

- Se $P_1 = O$ allora $v_1 = 0$. Pertanto $1v_1 + 0v_2 = 0$.

Dunque v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti.

- Se $P_1 \neq O$ allora i punti P_1 e O individuano una retta r.

Poiché O, P_1 e P_2 sono allineati il punto P_2 appartiene a r.

Grazie al teorema precedente, esiste un h in R tale che $v_2 = h\, v_1$.

Allora abbiamo: $h\, v_1 + (\mathbf{-1})\, v_2 = 0$.

Dunque v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti.

Vettori linearmente indipendenti

Teorema: Due vettori $v_1 := \overrightarrow{OP_1}$ e $v_2 := \overrightarrow{OP_2}$ sono linearmente dipendenti se e solo se i punti O, P_1 e P_2 sono allineati.

Dimostrazione:

Viceversa supponiamo che v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti.

Sappiamo che esistono due numeri reali h e k non entrambi nulli tali che: $h\, v_1 + k\, v_2 = 0$. Ad esempio, $k \neq 0$.

Moltiplicando per k^{-1} si ha: $k^{-1} h\, v_1 + v_2 = 0$

Dunque: $v_2 = - k^{-1} h\, v_1$.

Essendo v_2 multiplo di v_1, il termine P_2 di v_2 appartiene a r.

Pertanto esiste una retta r che contiene i punti O, P_1 e P_2.

Vettori linearmente indipendenti

Teorema: Dati comunque 2 vettori linearmente indipendenti di $V^2(O)$, ogni vettore di $V^2(O)$ è loro combinazione lineare.

In altre parole: se $v_1 := \overrightarrow{OP}_1$ e $v_2 := \overrightarrow{OP}_2$ sono vettori di $V^2(O)$ linearmente indipendenti, allora per ogni $v := \overrightarrow{OP}$ in $V^2(O)$, esistono h_1 in R e h_2 in R tali che: $v = h_1\, v_1 + h_2\, v_2$.

Vettori linearmente indipendenti

<u>Teorema</u>: Dati comunque 2 vettori <u>linearmente indipendenti</u> di $V^2(O)$, ogni vettore di $V^2(O)$ è loro combinazione lineare.

<u>Dimostrazione</u>: Poniamo $v_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $v_2 := \overrightarrow{OP_2}$, $v := \overrightarrow{OP}$.

Poiché i vettori v_1 e v_2 sono linearmente <u>in</u>dipendenti,

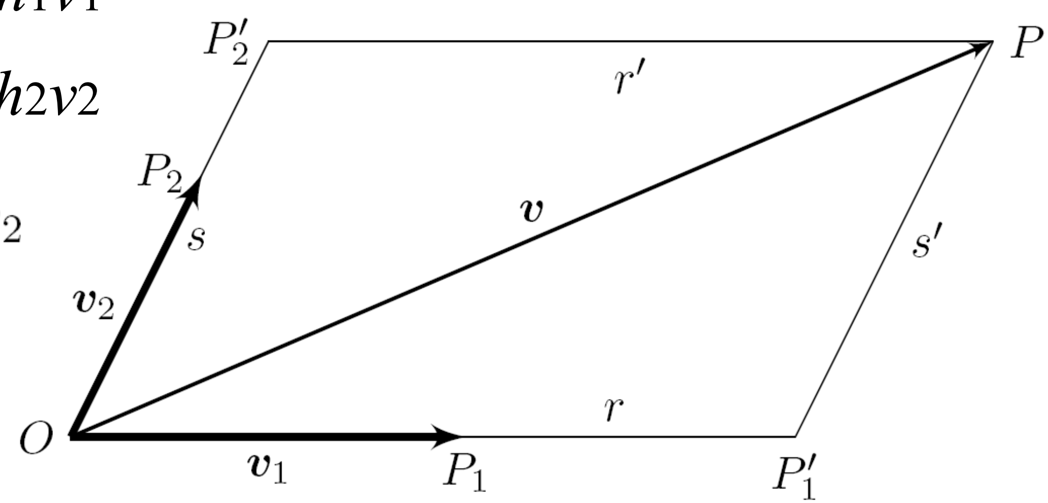
i tre punti O, P_1 e P_2 <u>non</u> sono allineati (vedi teorema precedente).

$OP'_1\ PP'_2$ è un parallelogramma.

Esiste h_1 in R tale che $OP'_1 = h_1v_1$

Esiste h_2 in R tale che $OP'_2 = h_2v_2$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'_1} + \overrightarrow{OP'_2} = h_1\boldsymbol{v}_1 + h_2\boldsymbol{v}_2$$



Vettori linearmente indipendenti

<u>Teorema</u>: Dati comunque 3 vettori di $V^2(O)$, essi sono linearmente dipendenti.

<u>Dimostrazione</u>:

Siano v_1, v_2 e v_3 i tre vettori. Distinguiamo due casi:

• Supponiamo v_1 e v_2 sono <u>linearmente dipendenti</u>.

Allora esistono h_1 e h_2 <u>non entrambi nulli</u> tali che $h_1v_1 + h_2v_2 = 0$.

Segue $h_1v_1 + h_2v_2 + 0v_3 = 0$ e i tre vettori sono lin. dipendenti;

• Supponiamo v_1 e v_2 sono <u>linearmente indipendenti</u>.

Allora esistono due numeri reali h_1 e h_2 tali che $v_3 = h_1v_1 + h_2v_2$

Segue $h_1v_1 + h_2v_2 + (\mathbf{-1})v_3 = 0$ e i tre vettori sono lin. dipendenti.

marcella.sama@uniroma3.it

Vettori linearmente indipendenti

<u>Teorema</u>: Dati comunque n vettori di $V^2(O)$ con $n \geq 3$, essi sono linearmente dipendenti.

<u>Dimostrazione</u>:

Dobbiamo dimostrare che in $V^2(O)$ non esistono più di due vettori che siano tra loro linearmente indipendenti.

Sappiamo che 3 vettori in $V^2(O)$ sono tra loro lin. dipendenti.

Esistono quindi h_1, h_2 e h_3 <u>non tutti nulli</u> tali che:

$h_1v_1 + h_2v_2 + h_3v_3 = 0$

Ora siano dati n vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n$, con $n > 3$.

Allora si ha: $h_1v_1 + h_2v_2 + h_3v_3 + \mathbf{0}v_4 + \mathbf{0}v_5 + \ldots + \mathbf{0}v_n = 0$.

Pertanto gli n vettori sono linearmente dipendenti.

Vettori linearmente indipendenti

Nel caso di <u>vettori dello spazio</u> si dimostrano i seguenti teoremi:

<u>Teorema</u>: Siano $v_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $v_2 := \overrightarrow{OP_2}$ due vettori di $V^3(O)$ <u>linearmente indipendenti</u>. L'insieme delle loro combinazioni lineari è formato da tutti e soli i vettori $\overrightarrow{OP}$ tali che il punto P <u>appartenga al piano passante per i punti non allineati</u> O, P_1 e P_2.

<u>Teorema</u>: Tre vettori $v_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $v_2 := \overrightarrow{OP_2}$ e $v_3 := \overrightarrow{OP_3}$ di $V^3(O)$ sono <u>linearmente dipendenti</u> se e solo se i punti O, P_1, P_2 e P_3 sono <u>complanari</u>.

Vettori linearmente indipendenti

Nel caso di vettori dello spazio si dimostrano i seguenti teoremi:

Teorema: Dati tre vettori linearmente indipendenti di $V^3(O)$, ogni vettore di $V^3(O)$ è loro combinazione lineare.

In altre parole: se $v_1 := \overrightarrow{OP_1}$, $v_2 := \overrightarrow{OP_2}$ e $v_3 := \overrightarrow{OP_3}$ sono vettori di $V^3(O)$ linearmente indipendenti, allora per ogni $v := \overrightarrow{OP}$ in $V^3(O)$, esistono h_1 in R, h_2 in R e h_3 in R tali che:

$v = h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3$.

Teorema: Dati comunque $n \geq 4$ vettori di $V^3(O)$, essi sono linearmente dipendenti.