L5: Metodo di Gauss (9-10)

Argomenti lezione:

- Introduzione
- Metodo di Gauss
- Calcolo del determinante con Gauss
- Calcolo del rango con Gauss
- Matrice Inversa con Gauss – Jordan

Gauss: Introduzione

Problema affrontato: Determinazione di eventuali soluzioni di sistemi di p equazioni in q incognite

Approccio visto finora: Metodo di Rouché-Capelli

Idea di Rouché-Capelli: Determinare le soluzioni di un sistema parametrizzato basato su n equazioni ed n incognite in cui la matrice dei coefficienti è invertibile. Si utilizza il metodo di Cramer basato sul calcolo del determinante di matrici di ordine n.

Gauss: Introduzione

Limiti del metodo visto finora: Il numero di operazioni necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine n aumenta molto velocemente al crescere di n.

Applicazioni pratiche: Risolvere sistemi con alcune decine di equazioni e incognite. Metodo di Rouché-Capelli è poco efficiente.

Metodo alternativo per un sistema di p equazioni in q incognite:

Metodo di Gauss: *rimpiazzare* il sistema di cui si cercano le eventuali soluzioni con un sistema avente le stesse soluzioni per il quale sia abbastanza agevole la loro determinazione.

Gauss: Esempio 1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \qquad\qquad 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Determiniamo x_4 dalla quarta equazione: $x_4 = 0$

Determiniamo x_3 dalla terza equazione: $x_3 = 1 / 4$

Determiniamo x_2 dalla seconda equazione: $x_2 = 1 / 6$

Determiniamo x_1 dalla prima equazione: $x_1 = - 1 / 12$

Unica soluzione di S: $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, 0\right)$

Gauss: Esempio 2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\ \ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Ricaviamo dalla terza equazione: $x_3 = 2 - x_4$

Sostituiamo x_3 nella seconda equazione: $x_2 = -1$

Sostituiamo x_2 e x_3 nella prima equazione: $x_1 = 1$

Assegniamo a x_4 il valore di un parametro h

Soluzioni del sistema S: $(1, -1, 2 - h, h)$

Gauss: Esempio 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - x_3 \qquad\quad = -2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo: $x_2 = 2 - x_3$

Sostituendo x_2 nella prima equazione: $x_1 = -1 + 2x_3 - x_4$

Assegniamo a x_3 il valore di un parametro h_1
e assegniamo a x_4 il valore di un parametro h_2

Soluzioni del sistema S:

$$(-1 + 2h_1 - h_2, 2 - h_1, h_1, h_2)$$

Gauss: Esempi 1, 2, 3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \qquad 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ \qquad\quad - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - x_3 \qquad = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss: Esempi 1, 2, 3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ \qquad\qquad 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad - 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\quad - x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - x_2 - x_3 \qquad = -2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1

x_2

x_3

x_4

Gauss: Esempi 1, 2, 3

Sono tutte **matrici a scalini** :

quattro scalini di <u>altezza 1</u>

(nessun parametro)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

tre scalini di <u>altezza 1</u>

(1 parametro: $x_4 = h_1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

due scalini di <u>altezza 1</u>

(2 parametri: $x_3 = h_1$; $x_4 = h_2$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss: Metodo

Il metodo di Gauss per la determinazione delle <u>eventuali</u> soluzioni di un sistema *S* consiste nel trasformare il sistema *S* in un sistema *S’* ad esso equivalente avente la matrice dei coefficienti a scalini.

Ecco alcune matrici a scalini (● è un num. ≠ 0; * num. qualsiasi):

Sistema con unica Soluzione (se esiste)

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \end{pmatrix} \end{array}$$

Sistema parametrico ($x_4 = h_1$)

Sistema parametrico ($x_2 = h_1$)

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & x_2 & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \boldsymbol{x_1} & & & \boldsymbol{x_4} \end{array} \end{array}$$

Sistema parametrico ($\boldsymbol{x_1 = h_1}$; $\boldsymbol{x_4 = h_2}$)

Gauss: Metodo

<u>Attenzione</u>:

ogni matrice quadrata a scalini è una matrice triangolare

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

Gauss: Metodo

Attenzione:

ogni matrice quadrata a scalini è una matrice triangolare, **però**:
non tutte le matrici triangolari sono matrici a scalini di altezza 1 !

Contro-esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Non è una matrice a scalini come le precedenti:
perché ha uno scalino di altezza 2 !

Gauss: Metodo

<u>Esempio (4)</u>:

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \boxed{x} + 5y = 6 \end{cases} \quad -1\,(\,x + 2y = 4\,)$$

$$S': \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \boxed{\quad 3y = 2} \end{cases}$$

Gauss: Metodo

Esempio (4):

$$S:\ \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S':\ \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \qquad 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il sistema *S* ha una sola soluzione:

$$\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Gauss: Metodo

<u>Esempio (5)</u>:

$$S: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \boxed{2x} + 4y = 1 \end{cases} \quad -2\,(\,x + 2y = 1\,)$$

$$S': \begin{cases} x + 2y = 1 \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}$$

Gauss: Metodo

Esempio (5):

$$S: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$S': \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{|cc} 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Questo sistema non ha soluzioni

sama@ing.uniroma3.it

Gauss: Metodo

Il metodo di Gauss fa uso delle seguenti tipologie di operazioni per trovare un sistema equivalente la cui matrice sia a scalini :

• Se in un sistema *S* <u>sommiamo a una equazione un'altra equazione del sistema moltiplicata per una costante</u>, otteniamo un sistema *S'* equivalente al sistema *S*.

• Se in un sistema *S* <u>moltiplichiamo un'equazione per una costante non nulla</u>, otteniamo un sistema *S'* equivalente ad *S*.

• Se in un sistema *S* <u>scambiamo tra loro due equazioni</u>, otteniamo un sistema *S'* equivalente ad *S*.

Gauss: Metodo

Esercizio (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \boxed{x} + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$-\,(\,x + y + z = 1\,)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0 \quad -1 \quad 0} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \boxed{-\,y = 0} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Gauss: Metodo

Esercizio (1):

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ x \qquad +z=1 \\ x+y \qquad =2 \end{cases} \qquad -(x+y+z=1)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad -y \qquad =0 \\ \boxed{x}+\boxed{y} \qquad =2 \end{cases} \qquad -(x+y+z=1)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ \boxed{0 \quad 0} & & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad -y \qquad =0 \\ \boxed{\qquad -z=1} \end{cases}$$

Gauss: Metodo

Esercizio (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad\;\; + z = 1 \\ x + y \quad\;\; = 2 \end{cases} \quad -(\, x + y + z = 1 \,)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad - y \quad\;\; = 0 \\ x + y \quad\;\; = 2 \end{cases} \quad -(\, x + y + z = 1 \,)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad - y \quad\;\; = 0 \\ \quad\quad\;\; - z = 1 \end{cases}$$

Il sistema *S* ha una sola soluzione:

$$(2, 0, -1)$$

sama@ing.uniroma3.it

Gauss: Metodo

Esercizio (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S:\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \boxed{2x_1} + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \boxed{3x_1} + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ \boxed{5x_1} + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ - x_2 - x_3 = -2 \\ - x_2 - x_3 = -2 \\ - 2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Gauss: Metodo

Esercizio (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \qquad S: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ -x_2 - x_3 = -2 \\ -2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

− 1

− 2

Gauss: Metodo

Esercizio (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ - x_2 - x_3 = -2 \\ - x_2 - x_3 = -2 \\ - 2x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ - x_2 - x_3 = -2 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$(-1 + 2h_2 - h_1, 2 - h_2, h_2, h_1)$$

Gauss: Metodo

Esercizio (2) - NOTE:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Ho due colonne uguali, già so che non ho una sola soluzione

Inoltre se moltiplico per -2 la prima colonna e la sommo alla seconda, ottengo la terza

Operazioni elementari

Due matrici A e A' si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da una all'altra per mezzo di operazioni del tipo:

- Sommare alla riga i-esima della matrice la riga j-esima moltiplicata per un numero reale k, con $i \neq j$.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ \boxed{2} & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

– 2 (prima riga)

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Operazioni elementari

Due matrici A e A' si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da una all'altra per mezzo di operazioni del tipo:

- Sommare alla riga i-esima della matrice la riga j-esima moltiplicata per un numero reale k, con $i \neq j$.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**.

Esempio:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

scambio di righe

$$A'' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Operazioni elementari

Due matrici A e A' **equivalenti per riga** soddisfano le proprietà:

Proprietà riflessiva Ogni matrice A è equivalente per riga a se stessa. (Infatti per passare da A ad A non è necessaria nessuna operazione.)

Proprietà simmetrica Se una matrice A è equivalente per riga a una matrice A' allora A' è equivalente ad A.
(Basta infatti ripercorre a ritroso ciascuna operazione elementare.)

Proprietà transitiva Se una matrice A è equivalente per riga a una matrice A' e se A' è equivalente per riga a una matrice A'' allora A è equivalente a A''.
(Se passiamo da A ad A' e poi da A' ad A'' siamo passati da A ad A''.)

Calcolo del determinante

Abbiamo dimostrato in precedenza la seguente proprietà:
Siano A e B due matrici quadrate di ordine n che si ottengono una dall'altra scambiando fra loro due righe.
Allora $det\ A = -\ det\ B$.

Si può inoltre dimostrare che:
Sia A una matrice quadrata e sia A' la matrice ottenuta da A sommando alla riga i-esima la riga j-esima moltiplicata per k.
Allora $det\ A' = det\ A$.

Calcolo del determinante

Segue la seguente proprietà:

Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, analizziamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A'.

Tra le operazioni elementari ci saranno:

- un certo numero di operazioni di somma a una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore (il determinante non cambia);
- un certo numero m di operazioni di scambio di righe.

Per lo scambio di righe ($m > 0$), si ha:

$$\det A' = (-1)^m \det A$$

Se non si ha scambio di righe ($m = 0$), allora $\det A' = \det A$.

Calcolo del determinante

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A, operiamo nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A, e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \end{pmatrix} -1 \quad A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m = 1$$

Calcolo del determinante

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata *A*, operiamo nel seguente modo:

2. Calcoliamo il determinante di *A'* semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale (dato che una matrice quadrata a scalini è triangolare superiore). Notare che *det A'* = 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A' = 5$$

Calcolo del determinante

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata A, operiamo nel seguente modo:

3. Si ha quindi: $\det A = (-1)^m \det A'$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \end{pmatrix} \; -1 \quad A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m = 1$

det A' = 5

$$\det A = -\det A' = -5$$

Calcolo del determinante

Esercizio (1):

$$\det A = (-1)^m \det A'$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{5} & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$m = 1 \qquad\qquad m = 2$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 5 \end{pmatrix} - \text{(seconda riga)} \qquad A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{det\ A = det\ A' = 0}$$

Calcolo del rango

<u>Teorema</u>: Se A e A' sono matrici <u>equivalenti per riga</u>, allora esse hanno ranghi uguali. In formule si ha: $rk\, A' = rk\, A$.
(Notare che le matrici A e A' possono anche essere non quadrate)

Ci conviene trasformare A in A' tramite operazioni elementari, e poi calcolare il rango di A' (ovvero di una matrice a scalini) ?

<u>Teorema</u>: Il rango di una <u>matrice a scalini</u> è uguale al numero degli scalini (cioè il numero di righe non nulle) della matrice.

Calcolo del rango

Teorema: Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero degli scalini (cioè il numero di righe non nulle) della matrice.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha 3 scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo il minore di A formato dalle righe non nulle di A e dalle tre colonne contenenti gli scalini

Calcolo del rango

Teorema: Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero degli scalini (cioè il numero di righe non nulle) della matrice.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha 3 scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare superiore, con $\det \neq 0$. Da cui: $rk\ A \geq 3$

Ogni minore di A di ordine 4 deve avere una riga tutta di 0 e ha pertanto determinante nullo. **Segue che $rk\ A = 3$.**

Calcolo del rango

Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

Calcolo del rango

Data una matrice *A*, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini *A’* equivalente per righe ad *A*.

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \quad -2} A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolo del rango

Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A.

<u>Esempio</u>:

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; 2 \quad -1 \qquad A'' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo del rango

Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con il metodo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A.

<u>Esempio</u>:

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad A''' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo del rango

Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

2. Contiamo il numero di scalini di A' . Siano n . Si ha allora:

$rk\, A = rk\, A' = n$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad A''' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk\, A = rk\, A''' = 3$$

Calcolo del rango

Esercizio:

-2 -3 -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

-2 -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -8 & -13 \\ 0 & -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

rk = 4

det = 36

Risolvere il sistema

Esercizio (2):

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \boxed{x_1} + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

scambio di righe

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Risolvere il sistema

Esercizio (2):

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \boxed{-x_1} + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

1 (prima equ.)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \boxed{4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2} \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Risolvere il sistema

Esercizio (2):

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 - x_4 = -2 \\ -x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Risolvere il sistema

Esercizio (2):

$$\begin{cases} \quad\;\; x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad\;\; 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\;\; -x_3 - x_4 = -2 \\ \quad\;\; \boxed{-x_3} - x_4 = -2 \end{cases}$$

–1 (terza equ.)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\;\; -x_3 - x_4 = -2 \\ \boxed{\quad\;\; 0 = 0} \end{cases}$$

Risolvere il sistema

Esercizio (2):

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ - x_3 - x_4 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\boxed{(1, -1, 2-h, h)}$$

Rango e determinante

Esercizio (3):

2. Contiamo il numero di scalini di *A'* . Siano *n* .
Si ha allora: *rk A = rk A' = n*

$-3/2 \quad 2 \quad -4$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

-8

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A'' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2/25$

$$A''' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{25} \end{pmatrix}$$

A''' ha 4 scalini

rk A = rk A''' = 4 ***det A = -48***

Matrice Inversa

Anche l'inversa di una matrice può essere calcolata sfruttando il metodo di eliminazione di Gauss.

$$[A|I] \Rightarrow [I|A^{-1}]$$

1. Si scrive una matrice a blocchi $n \times 2n$ $[A|I]$;
2. Si opera Gauss fino ad ottenere nel primo blocco I;
3. La matrice nel secondo blocco è A^{-1}.

Matrice Inversa

$$[A|I] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & \gamma'_{11} & \gamma'_{12} & \cdots & \gamma'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & \gamma'_{21} & \gamma'_{22} & \cdots & \gamma'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & \gamma'_{n1} & \gamma'_{n2} & \cdots & \gamma'_{nn} \end{array}\right)$$

Matrice Inversa

$$[A|I] = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & \color{red}{a'_{12}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a'_{1n}} & \gamma'_{11} & \gamma'_{12} & \cdots & \gamma'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a'_{2n}} & \gamma'_{21} & \gamma'_{22} & \cdots & \gamma'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \color{red}{\vdots} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & \gamma'_{n1} & \gamma'_{n2} & \cdots & \gamma'_{nn} \end{array}\right)$$

Matrice Inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}} & \gamma''_{11} & \gamma''_{12} & \cdots & \gamma''_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & & \gamma''_{21} & \gamma''_{22} & \cdots & \gamma''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & \gamma'_{n1} & \gamma'_{n2} & \cdots & \gamma'_{nn} \end{array}\right)$$

$$-\frac{a'_{in}}{a'_{nn}}$$

$$\gamma''_{ij} = \gamma'_{ij} - \frac{\gamma'_{nj}a'_{2n}}{a'_{nn}}$$

Matrice Inversa

$$-\frac{a'_{12}}{a'_{22}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
a'_{11} & \boxed{a'_{12}} & \cdots & 0 & \gamma_{11}^{\prime\prime\cdots\prime} & \gamma_{12}^{\prime\prime\cdots\prime} & \cdots & \gamma_{1n}^{\prime\prime\cdots\prime} \\
0 & a'_{22} & \cdots & 0 & \gamma_{21}^{\prime\prime\cdots\prime} & \gamma_{22}^{\prime\prime\cdots\prime} & \cdots & \gamma_{2n}^{\prime\prime\cdots\prime} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & \gamma'_{n1} & \gamma'_{n2} & \cdots & \gamma'_{nn}
\end{array}\right)$$

Matrice Inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{11}^{''\cdots'} & \gamma_{12}^{''\cdots'} & \cdots & \gamma_{1n}^{''\cdots'} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 & \gamma_{21}^{''\cdots'} & \gamma_{22}^{''\cdots'} & \cdots & \gamma_{2n}^{''\cdots'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & \gamma'_{n1} & \gamma'_{n2} & \cdots & \gamma'_{nn} \end{array}\right)$$

Matrice Inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{11}^{''\cdots'} & \gamma_{12}^{''\cdots'} & \cdots & \gamma_{1n}^{''\cdots'} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & 0 & \gamma_{21}^{''\cdots'} & \gamma_{22}^{''\cdots'} & \cdots & \gamma_{2n}^{''\cdots'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\gamma'_{1n}}{a'_{nn}} & \frac{\gamma'_{2n}}{a'_{nn}} & \cdots & \frac{\gamma'_{nn}}{a'_{nn}} \end{array}\right)$$

Matrice Inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\gamma_{11}'^{\cdots\prime}}{a_{11}'} & \frac{\gamma_{12}'^{\cdots\prime}}{a_{11}'} & \cdots & \frac{\gamma_{1n}'^{\cdots\prime}}{a_{11}'} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{\gamma_{21}'^{\cdots\prime}}{a_{22}'} & \frac{\gamma_{22}'^{\cdots\prime}}{a_{22}'} & \cdots & \frac{\gamma_{2n}'^{\cdots\prime}}{a_{22}'} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\gamma_{1n}'}{a_{nn}'} & \frac{\gamma_{2n}'}{a_{nn}'} & \cdots & \frac{\gamma_{nn}'}{a_{nn}'}
\end{array}\right)$$

Matrice Inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{11}^{\prime\dots\prime}}{a'_{11}} & \frac{\gamma_{12}^{\prime\dots\prime}}{a'_{11}} & \cdots & \frac{\gamma_{1n}^{\prime\dots\prime}}{a'_{11}} \\ \frac{\gamma_{21}^{\prime\dots\prime}}{a'_{22}} & \frac{\gamma_{22}^{\prime\dots\prime}}{a'_{22}} & \cdots & \frac{\gamma_{2n}^{\prime\dots\prime}}{a'_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\gamma'_{1n}}{a'_{nn}} & \frac{\gamma'_{2n}}{a'_{nn}} & \cdots & \frac{\gamma'_{nn}}{a'_{nn}} \end{pmatrix}$$

Matrice Inversa

<u>Esempio:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice Inversa

Esempio:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Divido la seconda riga per 2

Matrice Inversa

Esempio:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice Inversa

<u>Esercizio:</u>

$$A = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -\ 4 \\ -\ 2 \\ +2 \\ \end{array} \end{array}$$

Matrice Inversa

<u>Esercizio:</u>

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -4 \\ -2 \\ +2 \\ \end{array}$$

Matrice Inversa

Esercizio:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \; -2$$

Matrice Inversa

Esercizio:

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Matrice Inversa

Esercizio:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{-3} & 0 & -2 & 1 & 6 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{3} & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matrice Inversa

Esercizio:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{-3} & 0 & -2 & 1 & 6 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & -4 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

det A = 0

A non è invertibile