L11: Intersezione e somma di sottospazi (18)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Introduzione
- Intersezione di sottospazi vettoriali
- Somma di sottospazi vettoriali
- Esercizi su somma e intersezione

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

Dati due sottospazi vettoriali E e F di uno spazio vettoriale V, vedremo che:

- L'intersezione di E e F è un sottospazio vettoriale;
- L'unione di E e F <u>non</u> è sempre un sottospazio vettoriale.

Introdurremo allora la somma di due sottospazi vettoriali, ovvero "il più piccolo" sottospazio vettoriale contenente E e F.

Studieremo poi la *formula di Grassmann* per il calcolo della dimensione dell'intersezione di E e F o della somma di E e F.

Intersezione di sottospazi vettoriali

marcella.sama@uniroma3.it

Intersezione di sottospazi vettoriali

Teorema: L'intersezione $E \cap F$ di due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V .

Osservazione 1: $E \cap F$ di due sottospazi vettoriali E e F è un sottospazio vettoriale sia di E che di F.

Osservazione 2: Se E e F sono due sottospazi di dim. finita, allora anche $E \cap F$ ha dimensione finita.

Inoltre, si ha:

$$dim\,(E \cap F) \leq dim\, E$$

$$dim\,(E \cap F) \leq dim\, F$$

Intersezione di sottospazi vettoriali

<u>Esercizio</u>: Consideriamo i seguenti sottospazi E e F di $M(2, 2, R)$:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} b & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Determinare $E \cap F$

Sia A una generica matrice dello spazio vettoriale $M(2, 2, R)$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A appartiene a E solo se $a_{22} = 0$ e $a_{12} = a_{21}$

A appartiene a F solo se $a_{22} = 0$ e $a_{11} = a_{21}$

$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

Intersezione di sottospazi vettoriali

Esercizio: Determinare $E \cap F$. Consideriamo in R^5:

E generato da e_1:=(1,4,0,0,0), e_2:=(1,0,0,1,1), e_3:=(1,1,0,–1,2);

F generato da f_1 := (2,1,1,4,0), f_2 := (–1,1,–1,0,–2).

$$\boldsymbol{v} = h_1(1,4,0,0,0) + h_2(1,0,0,1,1) + h_3(1,1,0,-1,2)$$
$$\boldsymbol{v} = (h_1 + h_2 + h_3, 4h_1 + h_3, 0, h_2 - h_3, h_2 + 2h_3)$$

$$\boldsymbol{v} = k_1(2,1,1,4,0) + k_2(-1,1,-1,0,-2)$$
$$\boldsymbol{v} = (2k_1 - k_2, k_1 + k_2, k_1 - k_2, 4k_1, -2k_2)$$

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 2k_1 - k_2 \\ 4h_1 + h_3 = k_1 + k_2 \\ 0 = k_1 - k_2 \\ h_2 - h_3 = 4k_1 \\ h_2 + 2h_3 = -2k_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1 = l \\ h_2 = 2l \\ h_3 = -2l \\ k_1 = l \\ k_2 = l \end{cases}$$

$\boldsymbol{v} := (l, 2l, 0, 4l, -2l)$

$E \cap F$ è l'insieme dei multipli del vettore (1, 2, 0, 4, –2).

***dim* ($E \cap F$) = 1**

Somma di sottospazi vettoriali

marcella.sama@uniroma3.it

Somma di sottospazi vettoriali

Esempio: Consideriamo i sottospazi $T^R(2)$ e $T_R(2)$ di $M(n, n, R)$.
L'insieme $T^R(2) \cup T_R(2)$ sono le matrici triangolari di ordine 2.
Sommando due matrici triangolari ne otteniamo una triangolare?

No, ecco un contro-esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo due matrici triangolari la cui somma non è triangolare!
Quindi non è detto che l'unione di due sottospazi sia un sottospazio.

Definizione: Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V la somma $E + F$ è il sottoinsieme di V formato da tutte le somme del tipo $u + v$ con $u \in E$ e $v \in F$.

Somma di sottospazi vettoriali

Definizione: Dati due sottospazi E e F di uno spazio vettoriale V la somma $E + F$ è il sottoinsieme di V formato da tutte le somme del tipo $u + v$ con $u \in E$ e $v \in F$.

Osservazione: La somma di due sottospazi $E + F$ contiene E e F.

Dimostrazione: Ogni vettore u di E è anche un vettore di $E + F$: la somma di u (che appartiene ad E) con 0 (che appartiene a F).

Teorema: La somma $E + F$ di due sottospazi vettoriali E e F di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.
Se U è un sottospazio vettoriale di V contenente sia E sia F, allora U contiene $E + F$.

Somma di sottospazi vettoriali

Esercizio: Siano E e F sottospazi vettoriali di uno spazio V.
Supponiamo che e_1, e_2, e_3 formano una base di E ($dim\ E = 3$) e che i vettori f_1, f_2 formano una base di F ($dim\ F = 2$).

Osserviamo che un vettore w di V appartiene a $E + F$ se si può esprimere come somma di un vettore u di E e di un vettore v di F.

$u = h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3$ per opportuni h_1, h_2, h_3 in R

$v = k_1 f_1 + k_2 f_2$ per opportuni k_1, k_2 in R

$\boldsymbol{w = u + v} = h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_3 e_3 + k_1 f_1 + k_2 f_2$

Dunque i vettori e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 **generano** $\boldsymbol{E + F}$.
Possiamo allora affermare che $\boldsymbol{dim(E + F) \leq 5}$.

Somma di sottospazi vettoriali

<u>Teorema</u>: Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di un qualsiasi spazio vettoriale V. Segue $E+F$ ha <u>dimensione finita</u>.

In particolare, se $e_1, e_2, \ldots, e_p$ formano una base di E e $f_1, f_2, \ldots, f_q$ formano una base di F, allora i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q$ <u>generano</u> $E + F$ (ma <u>non</u> formano necessariamente <u>una base</u> di $E+F$).

<u>Teorema</u>: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita avente una base formata dai vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Siano E e F due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita.
Siano $e_1, e_2, \ldots, e_p$ una base di E e $f_1, f_2, \ldots, f_q$ una base di F.
Allora $\boldsymbol{dim(E+F) = rk\, A}$ dove A è la matrice avente come <u>colonne</u> le componenti di $e_1, e_2, \ldots, e_p, f_1, f_2, \ldots, f_q$ rispetto alla base $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Somma di sottospazi vettoriali

<u>Esercizio</u>: Determinare $dim(E + F)$. Consideriamo in R^5:

E generato da e_1:=(1,4,0,0,0), e_2:=(1,0,0,1,1), e_3:=(1,1,0,–1,2);

F generato da f_1 := (2,1,1,4,0), f_2 := (–1,1,–1,0,–2).

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & f_1 & f_2 \end{array} \end{array}$$

rispetto alla base canonica

Questa matrice ha rango 4.

Pertanto $dim(E + F) = 4$.

Somma e intersezione di sottospazi

Teorema (**Formula di Grassmann**): Siano E e F due sottospazi vettoriali di dimensione finita di un qualsiasi spazio vettoriale V. Si dimostra che: $\boldsymbol{dim(E + F) + dim(E \cap F) = dim\ E + dim\ F}$

Esempio: Consideriamo in R^5:

E generato da e_1:=(1,4,0,0,0), e_2:=(1,0,0,1,1), e_3:=(1,1,0,–1,2);

F generato da f_1 := (2,1,1,4,0), f_2 := (–1,1,–1,0,–2).

Abbiamo già calcolato che $dim(E \cap F) = 1$ e che $dim(E + F) = 4$

Alternativamente possiamo osservare che $dim\ E = 3$ e $dim\ F = 2$

Poi, ad esempio, possiamo prendere $dim(E \cap F) = 1$ e ricavare

$dim(E + F) = dim\ E + dim\ F - dim(E \cap F) = 3 + 2 - 1 = 4$

marcella.sama@uniroma3.it

Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio: Sia V uno spazio vettoriale avente come base e_1, e_2, e_3, e_4

Siano dati i vettori:

$$\begin{aligned} v_1 &:= 2e_2 + e_4, \\ v_2 &:= 3e_2 + e_3 + 2e_4, \\ v_3 &:= e_1 + 2e_2 + e_4, \\ v_4 &:= 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{aligned}$$

Sia E il sottospazio avente come base v_1 e v_2 (che sono linear. indip.)

Sia F il sottospazio avente come base v_3 e v_4 (che sono linear. indip.)

Obiettivo:

Vogliamo determinare una base per $E + F$ e una base per $E \cap F$

Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio: Sia V uno spazio vettoriale avente come base e_1, e_2 , e_3, e_4

Siano dati i vettori:

$$v_1 := 2e_2 + e_4,$$
$$v_2 := 3e_2 + e_3 + 2e_4,$$
$$v_3 := e_1 + 2e_2 + e_4,$$
$$v_4 := 3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

Cerchiamo una base di $E + F$

Abbiamo che i vettori v_1, v_2 , v_3, v_4 sono generatori di $E + F$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \end{matrix}$$

- $det\ A = 0$
- Il minore di A in rosso ha $det \neq 0$
- $E + F$ ha una base formata dai vettori v_1, v_2 , v_3
- $\boldsymbol{dim(E + F) = 3}$

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Sia V uno spazio vettoriale avente come base e_1, e_2, e_3, e_4

Siano dati i vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 := 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_2 := 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_3 := \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_4 := 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$$

Cerchiamo una base di $E \cap F$

$dim(E \cap F) = 1$

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Un vettore $v \in E$ se e solo se $v = h_1 v_1 + h_2 v_2$ per h_1 e $h_2 \in R$

Un vettore $v \in F$ se e solo se $v = k_1 v_3 + k_2 v_4$ per k_1 e $k_2 \in R$

Da cui v appartiene a $E \cap F$ se e solo se $h_1 v_1 + h_2 v_2 = k_1 v_3 + k_2 v_4$

$$h_1 v_1 + h_2 v_2 - \boldsymbol{k_1} v_3 - \boldsymbol{k_2} v_4 = 0$$

Ponendo $h_3 = -k_1$ e $h_4 = -k_2$, si ha: $h_1 v_1 + h_2 v_2 + \boldsymbol{h_3} v_3 + \boldsymbol{h_4} v_4 = 0$

Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio: Sia V uno spazio vettoriale avente come base e_1, e_2, e_3, e_4

Siano dati i vettori:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &:= 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_2 &:= 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_3 &:= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_4 &:= 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4 \end{aligned}$$

Cerchiamo una base di $E \cap F$

$dim(E \cap F) = 1$

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Un vettore $v \in E$ se e solo se $v = h_1 v_1 + h_2 v_2$ per h_1 e $h_2 \in R$

Un vettore $v \in F$ se e solo se $v = k_1 v_3 + k_2 v_4$ per k_1 e $k_2 \in R$

Da cui v appartiene a $E \cap F$ se e solo se $h_1 v_1 + h_2 v_2 = k_1 v_3 + k_2 v_4$

Ponendo $h_3 = -k_1$ e $h_4 = -k_2$, si ha: $h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + h_4 v_4 = 0$

Sostituendo v_1, v_2, v_3, v_4 e riordinando per e_1, e_2, e_3, e_4 si ottiene:

$$(h_3 + 3h_4)\boldsymbol{e}_1 + (2h_1 + 3h_2 + 2h_3 + h_4)\boldsymbol{e}_2 + (h_2 + h_4)\boldsymbol{e}_3 + (h_1 + 2h_2 + h_3 + h_4)e_4 = \boldsymbol{0}$$

Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio: Sia V uno spazio vettoriale avente come base e_1, e_2, e_3, e_4

Siano dati i vettori:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &:= 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_2 &:= 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_3 &:= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{v}_4 &:= 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4 \end{aligned}$$

Cerchiamo una base di $E \cap F$

$dim(E \cap F) = 1$

$$(h_3+3h_4)\boldsymbol{e}_1+(2h_1+3h_2+2h_3+h_4)\boldsymbol{e}_2+(h_2+h_4)\boldsymbol{e}_3+(h_1+2h_2+h_3+h_4)e_4 = \mathbf{0}$$

La combinazione lineare di e_1, e_2, e_3, e_4 (che sono linear. indipend.) è nulla se e solo se i coefficienti sono tutti nulli, ovvero il sistema:

$$\begin{cases} h_3 + 3h_4 = 0 \\ 2h_1 + 3h_2 + 2h_3 + h_4 = 0 \\ h_2 + h_4 = 0 \\ h_1 + 2h_2 + h_3 + h_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk\, A = 3$

le soluzioni del sistema dipendono da **un** parametro

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Sia V uno spazio vettoriale avente come base e_1, e_2, e_3, e_4

Siano dati i vettori:

$$\boldsymbol{v}_1 := 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_2 := 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_3 := \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4,$$
$$\boldsymbol{v}_4 := 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$$

Cerchiamo una base di $E \cap F$

$dim(E \cap F) = 1$

$$(h_3+3h_4)\boldsymbol{e}_1+(2h_1+3h_2+2h_3+h_4)\boldsymbol{e}_2+(h_2+h_4)\boldsymbol{e}_3+(h_1+2h_2+h_3+h_4)e_4 = \boldsymbol{0}$$

La combinazione lineare di e_1, e_2, e_3, e_4 (che sono linear. indipend.) è nulla se e solo se i coefficienti sono tutti nulli, ovvero il sistema:

$$\begin{cases} h_3 + 3h_4 = 0 \\ 2h_1 + 3h_2 + 2h_3 + h_4 = 0 \\ h_2 + h_4 = 0 \\ h_1 + 2h_2 + h_3 + h_4 = 0 \end{cases}$$

$$(h_1, h_2, h_3, h_4) = (4t, -t, -3t, t)$$

$$\boldsymbol{v} = 4t\boldsymbol{v}_1 - t\boldsymbol{v}_2 =$$
$$= 4t(2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4) - t(3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + 2\boldsymbol{e}_4)$$

$\boldsymbol{v} = 5t\boldsymbol{e}_2 - t\boldsymbol{e}_3 + 2t\boldsymbol{e}_4$ **base di $E \cap F$**

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Si considerino i seguenti sottospazi E e F di $M(2, 2, R)$:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A appartiene a $E + F$?

A appartiene a $E + F$ se e solo se esistono una matrice M in E e una matrice N in F tali che $A = M + N$.

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad M + N = \begin{pmatrix} a + a' & b + a' \\ b + a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N := \begin{pmatrix} a' & a' \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad a + a' = 1, \boxed{b + a' = 1, \, b + a' = 0} \text{ e } b' = 0$$

sono in contraddizione

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Si considerino i seguenti sottospazi E e F di $M(2, 2, R)$:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A appartiene a $E + F$?

A appartiene a $E + F$ se e solo se esistono una matrice M in E e una matrice N in F tali che $A = M + N$.

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad M + N = \begin{pmatrix} a + a' & b + a' \\ b + a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N := \begin{pmatrix} a' & a' \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

$a + a' = 1,\ b + a' = 1,\ b + a' = 0$ e $b' = 0$

Segue che la matrice A <u>non</u> appartiene a $E + F$

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Si considerino i seguenti sottospazi E e F di $M(2, 2, R)$:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B appartiene a $E + F$?

B appartiene a $E + F$ se e solo se esistono una matrice M in E e una matrice N in F tali che $B = M + N$.

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad M + N = \begin{pmatrix} a + a' & b + a' \\ b + a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N := \begin{pmatrix} a' & a' \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad a + a' = 3,\ b + a' = 2,\ b + a' = 2 \text{ e } b' = 1$$

Il sistema (di 4 equazioni) risultante è risolubile

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Si considerino i seguenti sottospazi E e F di $M(2, 2, R)$:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B appartiene a $E + F$?

B appartiene a $E + F$ se e solo se esistono una matrice M in E e una matrice N in F tali che $B = M + N$.

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad M + N = \begin{pmatrix} a + a' & b + a' \\ b + a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N := \begin{pmatrix} a' & a' \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad a + a' = 3,\ b + a' = 2,\ b + a' = 2 \text{ e } b' = 1$$

Segue che la matrice B appartiene a $E + F$

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Si considerino i seguenti sottospazi E e F di R^4 :

$$E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0\},$$
$$F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

Stabilire se i vettori **(1, 3, 1, 0)** e (1, 0, 1, –2) appartengono a $E + F$.

Dato un generico vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) di E, si ha $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Segue possiamo riscrivere questo vettore: $(x_1, x_2, -x_1, -x_2)$.

Analogamente, si ha il generico vettore di F : $(y_1, -y_1, y_3, -y_3)$.

$$(1, 3, 1, 0) = (x_1, x_2, -x_1, -x_2) + (y_1, -y_1, y_3, -y_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 1 \\ x_2 - y_1 = 3 \\ -x_1 + y_3 = 1 \\ -x_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che il sistema <u>non</u> è risolubile.

Segue (1,3,1,0) <u>non</u> appartiene a $E + F$.

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Si considerino i seguenti sottospazi E e F di R^4 :

$$E := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0\},$$

$$F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}.$$

Stabilire se i vettori (1, 3, 1, 0) e **(1, 0, 1, –2)** appartengono a $E + F$.

Dato un generico vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) di E, si ha $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

Segue possiamo riscrivere questo vettore: $(x_1, x_2, -x_1, -x_2)$.

Analogamente, si ha il generico vettore di F : $(y_1, -y_1, y_3, -y_3)$.

$$(1, 0, 1, -2) = (x_1, x_2, -x_1, -x_2) + (y_1, -y_1, y_3, -y_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 1 \\ x_2 - y_1 = 0 \\ -x_1 + y_3 = 1 \\ -x_2 - y_3 = -2 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che stavolta il sistema è risolubile.

Segue (1,0,1, –2) appartiene a $E + F$.

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Sia U il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $u_1 := (2, 1, 3, 1)$, $u_2 := (1, 0, 2, 0)$, $u_3 := (4, 2, 6, 2)$

Sia V il sottospazio generato da $v_1 := (1, 0, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1, -1)$, $v_3 := (2, 1, 3, 0)$, $v_4 := (1, -1, 0, 0)$.

Determinare **una base per *U*** e la sua dimensione, una base per V e la sua dimensione. Determinare poi una base per $U \cap V$ e $U + V$.

$$A := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \end{array} \xRightarrow[\text{Gauss}]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di R^4

- $dim\ U = 2$
- una base di U è data dai vettori u_1 e u_2

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Sia U il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $u_1 := (2, 1, 3, 1)$, $u_2 := (1, 0, 2, 0)$, $u_3 := (4, 2, 6, 2)$

Sia V il sottospazio generato da $v_1 := (1, 0, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1, -1)$, $v_3 := (2, 1, 3, 0)$, $v_4 := (1, -1, 0, 0)$.

Determinare una base per U e la sua dimensione, **una base per V** e la sua dimensione. Determinare poi una base per $U \cap V$ e $U + V$.

$$B := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & \;\; v_2 & \;\; v_3 & \;\; v_4 \end{matrix} \end{array} \xRightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di R^4

- $dim\ V = 3$
- una base di V è data dai vettori v_1, v_2 e v_4

Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio: Sia U il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $u_1 := (2, 1, 3, 1)$, $u_2 := (1, 0, 2, 0)$, $u_3 := (4, 2, 6, 2)$

Sia V il sottospazio generato da $v_1 := (1, 0, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1, -1)$, $v_3 := (2, 1, 3, 0)$, $v_4 := (1, -1, 0, 0)$.

Determinare una base per U e la sua dimensione, una base per V e la sua dimensione. Determinare poi **una base per $U \cap V$** e $U + V$.

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{u}_1 + h_2\boldsymbol{u}_2 = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_4$$

$$h_1(2,1,3,1) + h_2(1,0,2,0) = k_1(1,0,2,1) + k_2(1,1,1,-1) + k_3(1,-1,0,0)$$

$$(2h_1 + h_2, h_1, 3h_1 + 2h_2, h_1) = (k_1 + k_2 + k_3, k_2 - k_3, 2k_1 + k_2, k_1 - k_2)$$

$$\begin{cases} 2h_1 + h_2 - k_1 - k_2 - k_3 = 0 \\ h_1 - k_2 + k_3 = 0 \\ 3h_1 + 2h_2 - 2k_1 - k_2 = 0 \\ h_1 - k_1 + k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} h_1 = t,\ h_2 = t,\ k_1 = 2t, \\ k_2 = t,\ k_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{t(2,1,3,1) + t(1,0,2,0) = t(3,1,5,1)}$$

Somma e intersezione di sottospazi

Esercizio: Sia U il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $u_1 := (2, 1, 3, 1)$, $u_2 := (1, 0, 2, 0)$, $u_3 := (4, 2, 6, 2)$

Sia V il sottospazio generato da $v_1 := (1, 0, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1, -1)$, $v_3 := (2, 1, 3, 0)$, $v_4 := (1, -1, 0, 0)$.

Determinare una base per U e la sua dimensione, una base per V e la sua dimensione. Determinare poi **una base per $U \cap V$** e $U + V$.

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{u}_1 + h_2\boldsymbol{u}_2 = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_4$$

$$\boxed{t(2,1,3,1) + t(1,0,2,0) = t(3,1,5,1)} \qquad dim(U \cap V) = 1$$

(3, 1, 5, 1) costituisce una base di $U \cap V$

Somma e intersezione di sottospazi

<u>Esercizio</u>: Sia U il sottospazio vettoriale di R^4 generato dai vettori $u_1 := (2, 1, 3, 1)$, $u_2 := (1, 0, 2, 0)$, $u_3 := (4, 2, 6, 2)$

Sia V il sottospazio generato da $v_1 := (1, 0, 2, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1, -1)$, $v_3 := (2, 1, 3, 0)$, $v_4 := (1, -1, 0, 0)$.

Determinare una base per U e la sua dimensione, una base per V e la sua dimensione. Determinare poi **una base per** $U \cap V$ e $\boldsymbol{U + V}$.

$$\boldsymbol{v} = h_1\boldsymbol{u}_1 + h_2\boldsymbol{u}_2 = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_4$$

$$\boxed{t(2,1,3,1) + t(1,0,2,0) = t(3,1,5,1)} \qquad dim(U \cap V) = 1$$

$$dim(U + V) = dim\ U + dim\ V - dim\ (U \cap V) = 2 + 3 - 1 = 4$$

Segue che $U + V = R^4$

Allora una base per $U + V$ è, ad esempio, la base canonica di R^4.