Campo Gravitazionale

CdS Ingegneria Informatica
A.A. 2019/20

Moto dei pianeti

Meccanica diventa disciplina coerente dopo un'accurata e attendibile descrizione del moto dei pianeti**:** moto in assenza di attriti studiabile per lungo tempo -> metodo scientifico facilmente applicabile:
Comprensione del moto -> previsione del moto -> verifica sperimentale.

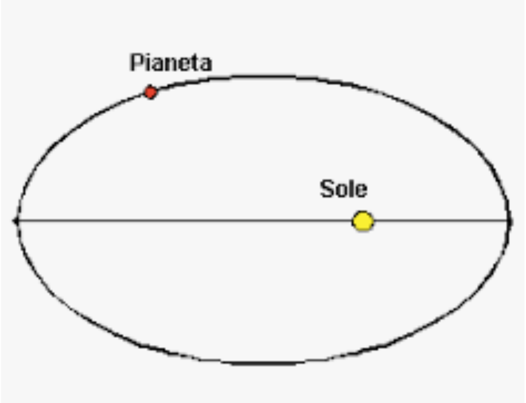
Principali risultati grazie a :

- Tycho Brahe (1546-1601): misura di precisione delle posizioni dei pianeti

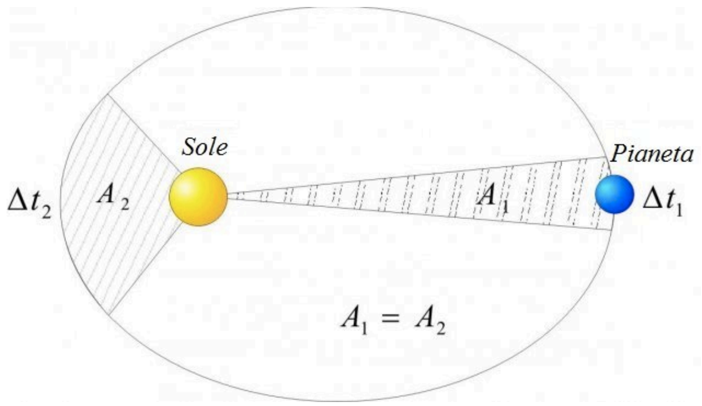
- Johannes Kepler (1571-1630): formulazione leggi empiriche sui moti dei pianeti a partire dai dati di Brahe

Leggi di Keplero

1. I pianeti descrivono orbite piane, ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

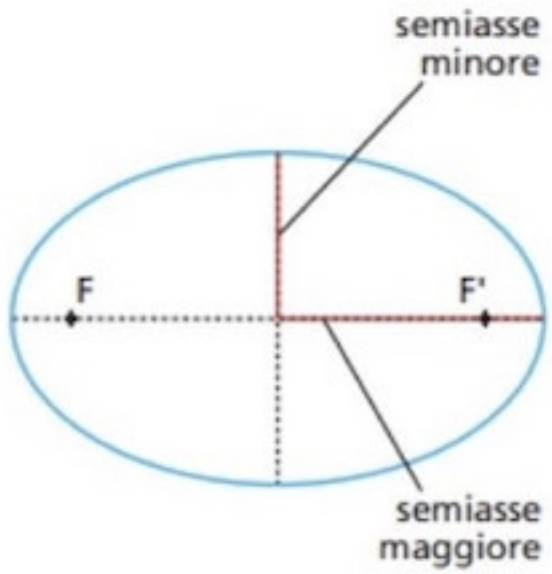


2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.



3. I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore dell'orbita.

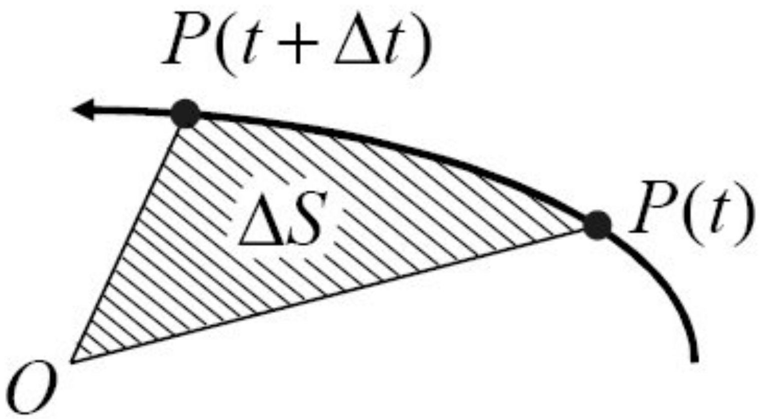
$$\frac{a^2}{T^3} = costante$$

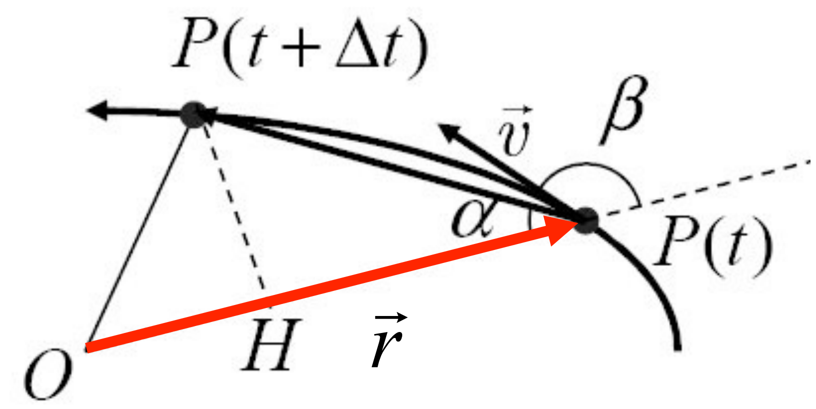


Gravitazione universale

- Cosa fa girare i pianeti?
- Moto può avvenire anche in assenza di forza (principio di inerzia), ma serve una “spinta” centripeta per mantenere il corpo in traiettoria curva.
- Newton: pianeti si muovono sottoposti alla forza di gravità che è la stessa che fa cadere i corpi a Terra.
- Che forma ha questa forza?

Velocità areolare





$$A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta S \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{1}{2} \left| P(t) - O \right| \left| P(t+\Delta t) - P(t) \right| \left| sen\alpha \right|$$

$$\alpha \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \pi - \beta$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \left| P(t) - O \right| \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right| \left| sen(\pi - \beta) \right|$$

$$[A(t)] = [rv] =$$

$$[L^2 T^{-1}]$$

$$\rightarrow (m^2 / s)$$

$$\boxed{A(t) = \frac{1}{2} \left| P(t) - O \right| \left| \vec{v}(t) \right| \left| sen\beta \right|}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{2} \left(P - O \right) \wedge \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v}}$$

Gravitazione universale

1ª legge di Keplero: il moto avviene su un piano.

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{2}(P-O)\wedge\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{r}\wedge\vec{v}}$$

Velocità areolare

2ª legge di Keplero: la velocità areolare è costante in modulo.

$$\vec{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \cos\tan te$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{v} + \vec{r}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{1}{2}(\vec{v}\wedge\vec{v} + \vec{r}\wedge\vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{r}\wedge\vec{a} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}\,//\,\vec{a}} \Rightarrow \vec{a} = k(\vec{r})\vec{r}$$

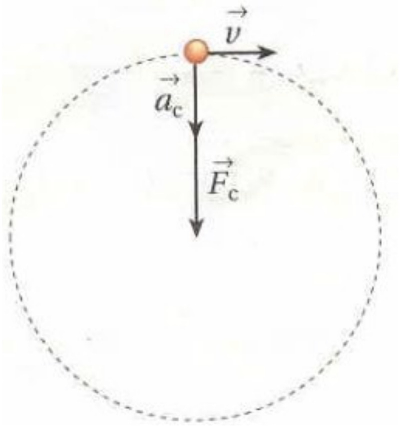
2º principio dinamica $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = mk(\vec{r})\vec{r}}$

Campo centrale a simmetria sferica

Gravitazione universale

3ª legge di Keplero: $\frac{a^2}{T^3} = costante$

Moto dei pianeti può essere schematizzato come moto circolare uniforme



$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n = \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\vec{F}_{centripeta} = m\vec{a}_c = m\frac{v^2}{R}\hat{u}_n = m\omega^2 R\hat{u}_n = m\frac{4\pi^2}{T^2}R\hat{u}_n$$

$$T^2 = kR^3 \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_{centripeta} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R\hat{u}_n = m\frac{4\pi^2}{kR^3}R\hat{u}_n = -m\frac{4\pi^2}{kR^2}\hat{u}_r$$

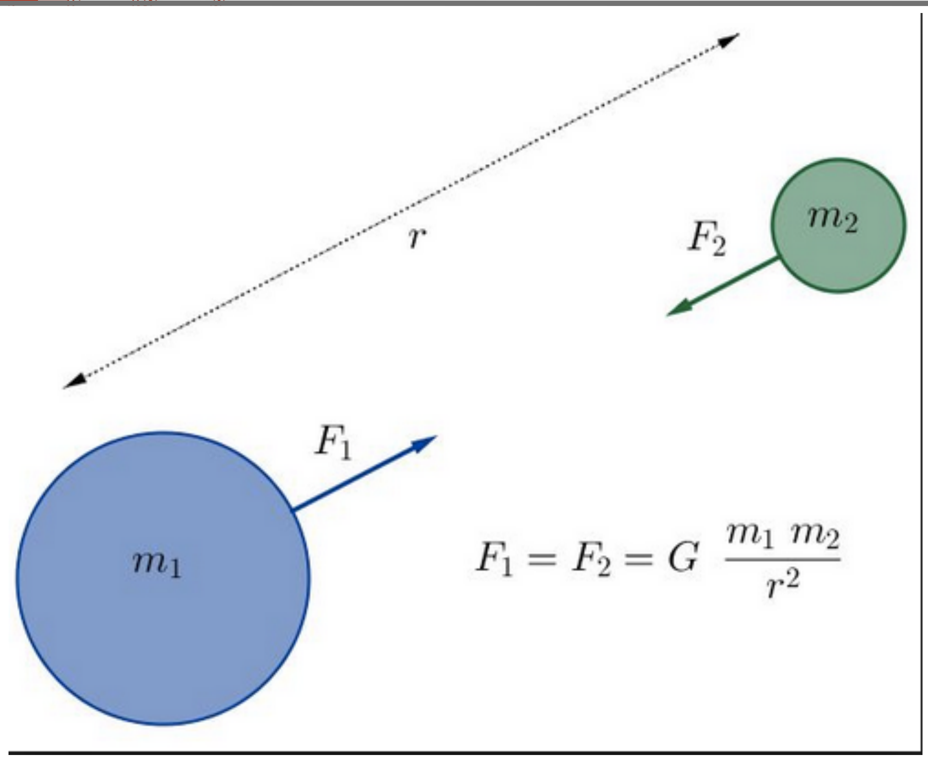
Stessa struttura di quanto ipotizzato dalla 2ª legge

Dallo studio dei moti celesti: $GM = \frac{4\pi^2}{k}$ con M=massa attorno a cui ruota m

$$\boxed{G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}}$$

Costante di gravitazione universale

Legge di gravitazione universale



Un qualsiasi punto materiale P_1 di massa m_1 esercita su un qualunque altro punto materiale P_2 di massa m_2 una forza gravitazionale F_{12} diretta secondo la congiungente di P_1 con P_2, sempre attrattiva, in modulo direttamente proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra P_1 e P_2.

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}} \quad \text{con} \quad \hat{r} = P_2 - P_1$$

- Per il terzo principio della dinamica se P_1 esercita una forza $\overrightarrow{F}_{12}$ su P_2 allora P_2 esercita una forza $\overrightarrow{F}_{21}$ su P_1 uguale e contraria

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- Sul sistema agiscono due forze di risultante nulla ma applicate in punti di applicazione diversi -> il moto è uno solo

- La forza gravitazionale è conservativa poiché è un campo centrale a simmetria sferica -> esiste un potenziale gravitazionale

Energia potenziale gravitazionale

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$ Campo conservativo

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{12}\cdot d\vec{s} = U(B) - U(A) = V(A) - V(B)$$

$$V(A) = -L_{0A} = -\int_0^A \vec{F}_{12}\cdot d\vec{s} = -\int_0^A -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = Gm_1 m_2\int_0^A \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{s} = Gm_1 m_2\int_0^A \frac{dr}{r^2} =$$

$$= Gm_1 m_2\left[-\frac{1}{r}\right]_0^A = Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_o}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{r_A} + G\frac{m_1 m_2}{r_0}$$

Costante arbitraria

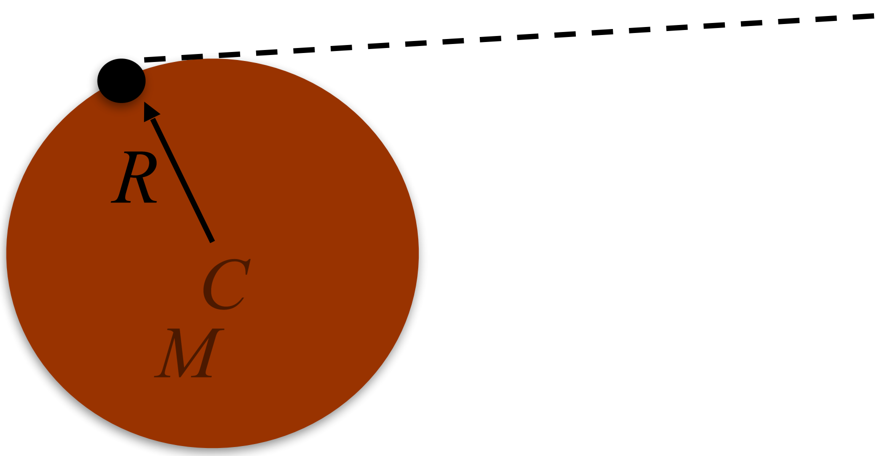
Scelgo $r_0 \to \infty \Rightarrow V(\infty) = -G\frac{m_1 m_2}{r_0} = 0$

$$\boxed{V(A) = -G\frac{m_1 m_2}{r_A}}$$

Energia potenziale gravitazionale

Velocità di fuga

***Velocità di fuga**: velocità minima che occorre imprimere ad un corpo per far si che si allontani da un altro corpo senza ricadervi.*



Corpo in R si allontana in modo che arrivi all'infinito con velocità nulla

Conservazione dell'energia meccanica

$$E(R) = E(\infty)$$

$$\frac{1}{2} m v^2_{fuga} - G\frac{mM}{R} = 0 \Rightarrow \boxed{v_{fuga} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} R \simeq 6.40\times 10^6\, m \\ M \simeq 5.97\times 10^{24}\, Kg \\ \mathrm{G} \simeq 6.67\times 10^{-11}\, m^3 Kg^{-1} s^{-2} \end{array}\right\} v_f \simeq 11.16\times 10^3\, m s^{-1}$$