L8: Spazi vettoriali sui reali (11-14)

Argomenti lezione:

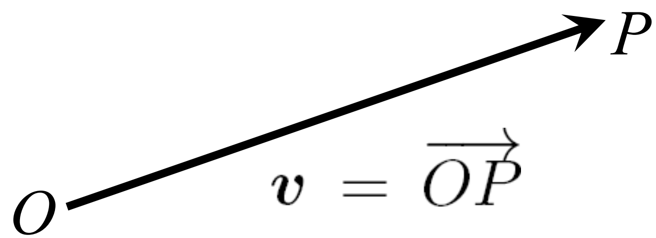
- Introduzione
- Gli spazi vettoriali
- Proprietà degli spazi vettoriali
- Sottospazi vettoriali

marcella.sama@uniroma3.it

Vettori del piano

Consideriamo un piano e fissiamo su esso una distanza con unità di misura U_1U_2. Fissiamo poi una volta per tutte un punto O del piano, che chiamiamo **origine**.

Definizioni: Dato comunque un punto P, chiamiamo **vettore applicato** in O di **vertice** P la coppia di punti O e P.
Indichiamo questo vettore con il simbolo $\overrightarrow{OP}$.
Diremo anche che il vettore $\overrightarrow{OP}$ ha come origine il punto O.



Il simbolo $V^2(O)$ indica l'insieme dei vettori applicati in O.
Il vettore OO viene chiamato vettore nullo e indicato con il simbolo 0. Abbiamo quindi $0 = OO$.

Vettori dello spazio

In maniera analoga, l'insieme dei vettori dello spazio con origine in O viene definito con il simbolo $V^3(O)$.

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

Iniziamo lo studio degli **spazi vettoriali sui reali**:

L'insieme delle matrici $\boldsymbol{M}\ (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{R})$ con le operazioni di addizione tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per uno scalare;

L'insieme dei vettori $\boldsymbol{V^2(O)}$ o $\boldsymbol{V^3(O)}$ con le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare.

Spazi Vettoriali

Gli spazi vettoriali: Esempio

Consideriamo l'insieme ***M* (*p*, *q*, *R*)** delle matrici a coefficienti reali aventi *p* righe e *q* colonne. Abbiamo già visto le seguenti proprietà:

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e $C \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$. *Pr. associativa della somma*

2. $A+B = B+A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$. *Pr. commutativa della somma*

3. Esiste una matrice 0 tale che $A+0 = A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$. *Esistenza dello zero*

4. Per ogni matrice $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ esiste una matrice $-A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ tale che $A+(-A) = 0$. *Esistenza dell'opposto*

5. $1A = A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$.

6. $h(k(A)) = (hk)A$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

7. $(h+k)A = hA + kA$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.

8. $h(A+B) = hA + hB$ per ogni $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ e per ogni $h \in \mathbb{R}$. $\triangle$

marcella.sama@uniroma3.it

Gli spazi vettoriali

Definizione di **spazio vettoriale sui reali**:

Sia dato un insieme non vuoto V, i cui elementi sono **vettori**.
Chiamiamo, invece, **scalari** i numeri reali in R.

In V sia definita un'**operazione binaria interna**, che data una coppia ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$) in V associ un altro vettore in V (**addizione** $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$).

In V sia definita un'**operazione binaria esterna**, che data una coppia (k, $\boldsymbol{v}$) con vettore v in V e scalare k in R associ un altro vettore in V (**moltiplicazione** $k\boldsymbol{v}$).

$v + w$ è il **vettore somma**, mentre kv è il **prodotto scalare vettore**.

marcella.sama@uniroma3.it

Gli spazi vettoriali

L'insieme *V* viene detto **spazio vettoriale** su *R* se sono verificate:

1. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$, $\boldsymbol{v}\in V$ e $\boldsymbol{w}\in V$.
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$, $\boldsymbol{v}\in V$.
3. $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$. **vettore nullo**
4. $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$. **vettore opposto**
5. $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$.
6. $h(k(\boldsymbol{u}))=(hk)\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$ e $h\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$.
7. $(h+k)\boldsymbol{u}=h\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$ e $h\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$.
8. $h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=h\boldsymbol{u}+h\boldsymbol{v}$ per ogni $\boldsymbol{u}\in V$, $\boldsymbol{v}\in V$ e $h\in\mathbb{R}$.

Esempi di spazi vettoriali

Con le 8 operazioni appena definite si definiscono spazi vettoriali:

- $M(p, q, R)$, $V^2(O)$ e $V^3(O)$;
- L'insieme R in cui i numeri reali rivestono il ruolo sia di vettori che di scalari;
- L'insieme delle n-uple di numeri reali (n è un numero naturale):

$$\mathbb{R}^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ per } 1 \leq i \leq n\}.$$

$\mathbb{R}^n$ può essere facilmente identificato con l'insieme $\mathrm{M}(1, n, \mathbb{R})$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$

$$k(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

- L'insieme $R[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'incognita x (le 8 operazioni appena viste si applicano all'addizione tra polinomi e alla moltiplicazione di uno scalare per un polinomio).

Esempi di spazi vettoriali

Contro-esempio:

Consideriamo R^2 con le operazioni cosi definite:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$k(a_1, a_2) := (0, ka_2).$$

- Le proprietà (1, 2, 3, 4) che coinvolgono solo l'operazione di addizione sono tutte verificate;

1. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ e $\boldsymbol{w} \in V$.
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$.
3. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$. **vettore nullo**
4. $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in V$. **vettore opposto**

Esempi di spazi vettoriali

Contro-esempio:

Consideriamo R^2 con le operazioni cosi definite:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$k(a_1, a_2) := (0, ka_2).$$

• Le proprietà (1, 2, 3, 4) che coinvolgono solo l'operazione di addizione sono tutte verificate;

• La proprietà 5 non è sempre verificata per il seguente motivo:
se $k = 1$ e $a_1 \neq 0$, si ha che $1(a_1, a_2) \neq (0, a_2)$.
Pertanto R^2 con queste operazioni **non** è uno spazio vettoriale.

$$5.\ \ 1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in V.$$

Proprietà degli Spazi Vettoriali

Proprietà degli spazi vettoriali

Legge di cancellazione della somma: Siano u, v, w vettori di uno spazio vettoriale V, $\boldsymbol{u + v = u + w}$ **se e solo se** $\boldsymbol{v = w}$

Come casi particolari abbiamo:

- $u + v = u$ se e solo se $v = 0$
- $u + v = w$ se e solo se $v = w - u$

Dimostrazione:

Se $v = w$ allora vale l'uguaglianza $u + v = u + w$.

Viceversa, se $u + v = u + w$ allora col vettore $-u$ otteniamo:

$-u + (u + v) = -u + (u + w)$

Per la proprietà associativa: $(-u + u) + v = (-u + u) + w$

Cioè $0 + v = 0 + w$. Vale a dire $v = w$.

Proprietà degli spazi vettoriali

<u>Teorema</u>: In uno spazio vettoriale V valgono le proprietà:

$$1.\ 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \ \textit{per ogni}\ \boldsymbol{v} \in V;$$

$$2.\ h\mathbf{0} = \mathbf{0} \ \textit{per ogni}\ h \in \mathbb{R}.$$

<u>Dimostrazione</u>:

1. Utilizzando le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale abbiamo: $0\ v = (0 + 0)\ v = 0\ v + 0\ v$

Dalla legge di cancellazione segue allora che $0\ v = 0$.

2. Calcolando il prodotto di uno scalare h per il vettore nullo, abbiamo: $h\ 0 = h\ (0 + 0) = h\ 0 + h\ 0$

Dalla legge di cancellazione segue allora che $h\ 0 = 0$.

Proprietà degli spazi vettoriali

Teorema: Sia v un vettore di uno spazio vettoriale V, e sia h in R.

Se $h\, v = 0$ allora $h = 0$ oppure $v = 0$.

Dimostrazione:

Sappiamo che $h\, v = 0$.

Dobbiamo mostrare che $h = 0$ oppure $v = 0$.

Se $h = 0$ abbiamo finito, se $h \neq 0$ mostriamo che $v = 0$.
Moltiplichiamo per h^{-1} entrambi i membri di $h\, v = 0$ e otteniamo:

$h^{-1} (h\, v) = h^{-1}\, 0$

$h^{-1} (\, h\, v) = (h^{-1}\, h)\, v = 1\, v = v$

$h^{-1}\, 0 = 0$

Pertanto $v = 0$.

Proprietà degli spazi vettoriali

Teorema: Se v è un vettore di uno spazio vettoriale V, allora vale l'uguaglianza $(-1)\, v = -v$.

Dimostrazione:

Dobbiamo mostrare che $(-1)\, v$ è l'opposto del vettore v.

Dobbiamo cioè mostrare che $v + (-1)\, v = 0$.

Allora: $v + (-1)\, v = 1v + (-1)\, v = (1 + (-1))\, v = 0\, v = 0$.

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

Obiettivo: Identificare se un sottoinsieme non vuoto *E* di uno spazio vettoriale *V* è esso stesso uno spazio vettoriale.

Metodologia:

- prima dobbiamo stabilire se abbiamo delle operazioni in *E*;
- poi dobbiamo verificare se queste operazioni soddisfano le proprietà che definiscono uno spazio vettoriale.

Definizione:

Un sottoinsieme non vuoto *E* di uno spazio vettoriale *V* si dice **sottospazio** vettoriale di *V* se:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E \text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in E$$

$$k\boldsymbol{u} \in E \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in E.$$

Sottospazi vettoriali

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottoinsieme di M (2, 2, R) formato dalle matrici che hanno **almeno un elemento nullo**. Per esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Domanda</u>: Stabilire se E è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni che possiamo indurre dallo spazio vettoriale M (2, 2, R).

<u>Contro-esempio</u>:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Segue che $A + B$ non è necessariamente una matrice di E !

Da cui E <u>non</u> è uno spazio vettoriale rispetto a M (2, 2, R).

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Sia E il sottoinsieme di M (2, 2, R) formato dalle matrici che hanno **tutti gli elementi interi**. Per esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Domanda: Stabilire se E è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni che possiamo indurre dallo spazio vettoriale M (2, 2, R).

Contro-esempio:

Se moltiplichiamo la matrice di A per uno scalare pari ad $k = ½$ non otteniamo una matrice di E !

Segue che $k\,A$ non è necessariamente una matrice di E !

Da cui E non è uno spazio vettoriale rispetto a M (2, 2, R).

Sottospazi vettoriali

Definizione:

Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V si dice **sottospazio** vettoriale di V se:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E \text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in E$$

$$k\boldsymbol{u} \in E \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in E.$$

Domanda:

Il sottospazio E è uno spazio vettoriale?

Per rispondere alla domanda dobbiamo verificare tutte le proprietà.

Sottospazi vettoriali

Definizione:

Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V si dice **sottospazio** vettoriale di V se:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E \text{ per ogni } \boldsymbol{u} \in E, \boldsymbol{v} \in E$$

$$k\boldsymbol{u} \in E \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in E.$$

Domanda:

Il sottospazio E è uno spazio vettoriale?

Per rispondere alla domanda dobbiamo verificare tutte le proprietà.

In particolare dobbiamo chiederci se nel sottoinsieme E di V:

- Esiste l'elemento neutro: il vettore 0 in V appartiene anche a E ?
- Esiste l'elemento opposto: il vettore $-u$ in V appartiene anche a E ?

Sottospazi vettoriali

Teorema: Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V, allora 0 è in E e, per ogni vettore u di E, il vettore $-u$ è in E.

Da cui E è esso stesso uno spazio vettoriale.

Dimostrazione:

• Vogliamo mostrare che 0 è in E.

Sappiamo che se k è un numero reale e se v è un vettore di E, allora si ha che $k\,v$ appartiene a E. In particolare, ciò è vero se $k = 0$.

Dunque: $0\,v$ è in E, ma $0\,v = 0$, e quindi il vettore 0 è in E.

• Vogliamo mostrare che se u è un vettore di E, allora $-u$ è in E.

Sappiamo che $k\,u$ appartiene al sottospazio E qualunque sia k.

In particolare, $(-1)\,u$ appartiene a E.

Poiché $(-1)\,u = -u$ allora il vettore $-u$ è in E.

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

Teorema: Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V, allora 0 è in E e, per ogni vettore u di E, il vettore $-u$ è in E.
Da cui E è esso stesso uno spazio vettoriale.

Osservazione: Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore 0, allora E non è un sottospazio vettoriale di V !

Segue che dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V per mostrare che E è uno spazio vettoriale dobbiamo innanzitutto verificare se il vettore 0 appartiene al sottoinsieme E !

Sottospazi vettoriali

Segue che dato un sottoinsieme *E* di uno spazio vettoriale *V* per mostrare che *E* è uno spazio vettoriale dobbiamo innanzitutto verificare se il vettore 0 appartiene al sottoinsieme *E* !

Esercizio: Sia *E* il sottoinsieme di *M* (2, 2, *R*) formato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di *a* e *b* in *R*.

Domanda: *E* è un sottospazio vettoriale di *M* (2, 2, *R*) ?

Notiamo che il sottoinsieme *E* non contiene la matrice nulla.

Dunque *E* non è un sottospazio vettoriale.

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Sia E il sottoinsieme di $M\,(2, 2, R)$ formato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in R. E è un sottospazio vettoriale di $M\,(2, 2, R)$?

Chiaramente il sottoinsieme E è non vuoto, perché contiene, ad esempio, la matrice nulla.

Osservazione: Se $a = b$ la matrice ha determinante nullo, e quindi non è invertibile. Ciò non implica nulla riguardo la matrice opposta!

Verifichiamo se E è un sottospazio.

Sottospazi vettoriali

<u>Esercizio</u>: Sia E il sottoinsieme di $M\,(2, 2, R)$ formato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in R. E è un sottospazio vettoriale di $M\,(2, 2, R)$?

Chiaramente il sottoinsieme E è non vuoto, perchè contiene, ad esempio, la matrice nulla. Verifichiamo se E è un sottospazio.

Prese due matrici in E: $M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ $N := \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

$$M + N = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$(M + N)$ appartiene a E <u>se e solo se</u> $a_3 := a_1 + a_2$ e $b_3 := b_1 + b_2$.

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Sia E il sottoinsieme di $M(2, 2, R)$ formato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in R. E è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, R)$?

Chiaramente il sottoinsieme E è non vuoto, perchè contiene, ad esempio, la matrice nulla. Verifichiamo se E è un sottospazio.

Analogamente, presa una matrice M in E: $M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$

$$kM = \begin{pmatrix} ka_1 & ka_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 & a_4 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

$(k\,M)$ appartiene a E se e solo se $a_4 := k\,a_1$ e $b_4 := k\,b_1$.

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Sia E il sottoinsieme di M (2, 2, R) formato dalle matrici:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

al variare di a e b in R. E è un sottospazio vettoriale di M (2, 2, R) ?

Chiaramente il sottoinsieme E è non vuoto, perchè contiene, ad esempio, la matrice nulla. Verifichiamo se E è un sottospazio.

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Riassumendo:

($M + N$) appartiene a E se e solo se $a_3 := a_1 + a_2$ e $b_3 := b_1 + b_2$.

($k\, M$) appartiene a E se e solo se $a_4 := k\, a_1$ e $b_4 := k\, b_1$.

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Consideriamo lo spazio vettoriale $M(n, n, R)$ delle matrici quadrate di ordine n. Vediamo alcuni esempi di suoi sottospazi:

• **il sottoinsieme $T^R(n)$ delle matrici triangolari superiori;**

Infatti:

1. Tale sottospazio è non vuoto, perché la matrice nulla è una particolare matrice triangolare superiore;

2. La somma di due matrici triangolari superiori è una matrice triangolare superiore;

3. Moltiplicando una matrice triangolare superiore per uno scalare si ottiene una matrice triangolare superiore.

Dunque $T^R(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(n, n, R)$.

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Consideriamo lo spazio vettoriale $M\ (n, n, R)$ delle matrici quadrate di ordine n. Vediamo alcuni esempi di suoi sottospazi:

- il sottoinsieme $T^R(n)$ delle matrici triangolari superiori;
- **il sottoinsieme $\boldsymbol{T_R(n)}$ delle matrici triangolari inferiori;**

Si verifica analogamente a $T^R(n)$.

Sottospazi vettoriali

<u>Esercizio</u>: Consideriamo lo spazio vettoriale $M(n, n, R)$ delle matrici quadrate di ordine n. Vediamo alcuni esempi di suoi sottospazi:

- il sottoinsieme $T^R(n)$ delle matrici triangolari superiori;
- il sottoinsieme $T_R(n)$ delle matrici triangolari inferiori;
- **il sottoinsieme $S(n, R)$ delle matrici simmetriche;**

1. Se A e B sono in $S(n, R)$, allora $A+B$ appartiene a $S(n, R)$?
Sappiamo che ${}^tA = A$ e ${}^tB = B$. Dimostriamo che ${}^t(A + B) = A+B$.
Si ha ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = A + B$.

2. Se A appartiene a $S(n, R)$ e k è uno scalare, allora $k\,A$ è in $S(n, R)$?
Sappiamo che ${}^tA = A$. Dobbiamo mostrare che ${}^t(k\,A) = k\,A$.
Si ha ${}^t(k\,A) = k\;{}^tA = k\,A$.

Sottospazi vettoriali

Esercizio: Consideriamo lo spazio vettoriale $M\ (n, n, R)$ delle matrici quadrate di ordine n. Vediamo alcuni esempi di suoi sottospazi:

- il sottoinsieme $T^R(n)$ delle matrici triangolari superiori;
- il sottoinsieme $T_R(n)$ delle matrici triangolari inferiori;
- il sottoinsieme $S(n, R)$ delle matrici simmetriche;
- **il sottoinsieme $A(n, R)$ delle matrici antisimmetriche (vale a dire delle matrici A tali che ${}^tA = -A$);**

Si verifica analogamente a $S(n, R)$.

Sottospazi vettoriali

Consideriamo ora un sistema S di p equazioni lineari in q incognite.

S può essere scritto nella forma matriciale $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, dove:

- la matrice dei coefficienti A appartiene a $M(p, q, R)$;
- la matrice colonna dei termini noti B appartiene a $M(p, 1, R)$;
- la matrice colonna delle incognite X appartiene a $M(q, 1, R)$;
- le soluzioni di S formano un sottoinsieme Sol(S) di $M(q, 1, R)$.

Domanda: **Sol(S) è un sottospazio di $M(q, 1, R)$?**

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

Consideriamo ora un sistema S di p equazioni lineari in q incognite.

S può essere scritto nella forma matriciale $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, dove:

- la matrice dei coefficienti A appartiene a $M(p, q, R)$;
- la matrice colonna dei termini noti B appartiene a $M(p, 1, R)$;
- la matrice colonna delle incognite X appartiene a $M(q, 1, R)$;
- le soluzioni di S formano un sottoinsieme Sol(S) di $M(q, 1, R)$.

Domanda: **Sol(S) è un sottospazio di $M(q, 1, R)$?**

La matrice nulla appartiene a Sol(S) se e solo se $A\ 0 = B = 0$!

Definizione: Un sistema S di equazioni lineari si dice **omogeneo** se i termini noti di tutte le equazioni del sistema S sono nulli ($B = 0$).

Sottospazi vettoriali

Definizione: I seguenti sottospazi vengono detti **sottospazi banali**:

- Il sottoinsieme $\{0\}$ (vettore nullo) dello spazio vettoriale V ;
- Lo spazio vettoriale contenente tutto V (ovvero V stesso) .

Osservazione 1:

Un sistema lineare omogeneo $S : AX = 0$ è sempre risolubile.

Infatti $rk\ A = rk\ A'$.

Sottospazi vettoriali

Definizione: I seguenti sottospazi vengono detti **sottospazi banali**:

- Il sottoinsieme $\{0\}$ (vettore nullo) dello spazio vettoriale V ;
- Lo spazio vettoriale contenente tutto V (ovvero V stesso) .

Osservazione 1:

Un sistema lineare omogeneo $S : AX = 0$ è sempre risolubile.

$AX = 0$ ammette (almeno) la soluzione $\boldsymbol{X = 0}$, detta **soluzione banale**.

N.B. Un sistema omogeneo può avere altre soluzioni oltre alla banale.

Osservazione 2:

Un sistema *S'* non omogeneo non contiene la soluzione banale.

Infatti $S' : A\,X = B \neq 0$.

Sottospazi vettoriali

Definizione: I seguenti sottospazi vengono detti **sottospazi banali**:

- Il sottoinsieme $\{0\}$ (vettore nullo) dello spazio vettoriale V ;
- Lo spazio vettoriale contenente tutto V (ovvero V stesso) .

Osservazione 1:

Un sistema lineare omogeneo $S : AX = 0$ è sempre risolubile.

$AX = 0$ ammette (almeno) la soluzione $\boldsymbol{X = 0}$, detta **soluzione banale**.

N.B. Un sistema omogeneo può avere altre soluzioni oltre alla banale.

Osservazione 2:

Un sistema *S'* non omogeneo non contiene la soluzione banale.

L'insieme delle soluzioni di S' non è quindi un sottospazio vettoriale!

marcella.sama@uniroma3.it

Sottospazi vettoriali

<u>Teorema</u>:

Sia S: $AX=0$ un sistema lineare omogeneo di p equazioni in q incognite.

L'insieme Sol(S) è un sottospazio vettoriale di $M(q, 1, R)$.

<u>Dimostrazione</u>:

- Sol(S) $\neq \emptyset$ perché contiene la matrice nulla.
- Siano ora X_1 e X_2 due elementi di Sol(S).

  Dobbiamo dimostrare che $X_1 + X_2$ appartiene a Sol(S).

  X_1 e X_2 sono due soluzioni di S, quindi $A X_1 = 0$ e $A X_2 = 0$.

  Abbiamo che $A (X_1 + X_2) = A X_1 + A X_2 = 0 + 0 = 0$.
- Dobbiamo dimostrare che $A (k X_1) = 0$.

  Abbiamo che $A(k X_1) = k (A X_1) = k\, 0 = 0$.

Sottospazi vettoriali

Esercizio:

Dimostrare che un sistema omogeneo $S : AX = 0$ ammette soluzioni non banali se e solo se il $rk\ A$ è minore del numero delle incognite.

Soluzione:

Il sistema S ammette soluzioni non banali se ha più di una soluzione.

Sappiamo che le soluzioni di un sistema risolubile di matrice A dipendono da $q - rk\ A$ parametri, dove q è il numero delle incognite.

Quindi il sistema S ha più di una soluzione se e solo se $q - rk\ A > 0$.

Esercizi

Esercizio: Sia E il sottoinsieme di $M(2, 2, R)$ formato dalle seguenti matrici, al variare di a in R: $\begin{pmatrix} a & a \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$

Stabilire se E è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, R)$.

- E è non vuoto.
- Consideriamo due matrici M e N, calcoliamo la loro somma:

$$M := \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_1^2 & 0 \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} a_2 & a_2 \\ a_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M + N = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_1^2 + a_2^2 & 0 \end{pmatrix} \quad M + N = \begin{pmatrix} a_3 & a_3 \\ a_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dovremmo avere: $a_3 = a_1 + a_2$; $a_3^2 = a_1^2 + a_2^2$

In generale non è vero: se $a_1 = a_2 = 1$ allora $a_3 = 2$ ma $a_3^2 \neq 2$!

Dunque E non è un sottospazio vettoriale di $M(2, 2, R)$.