Brevi appunti di Fondamenti di Automatica

prof. Stefano Panzieri
Dipartimento di Ingegneria
Università degli Studi "ROMA TRE"

15 marzo 2022

Indice

Indice **2**

1 La Trasfomata di Laplace e la Funzione di Trasferimento **3**

1.1 Introduzione 3
1.2 Una trasformata elementare 5
1.3 Alcune proprietà 8
1.4 Trasformata dell'impulso 15
1.5 Trasformate dei polinomi 17
1.6 Inversione della Trasformata di Laplace . . 19
1.7 Andamento delle antitrasformate nel tempo 23
1.8 Applicazione delle Trasformate di Laplace alle equazioni differenziali 27
1.9 Un esempio: il carrello 36
1.10 Esempi di funzioni di trasferimento 40

Capitolo 1

La Trasfomata di Laplace e la Funzione di Trasferimento

1.1 Introduzione

Lo strumento della Trasformata di Laplace, che prende il nome da Pier-Simon Laplace il quale la utilizzò nell'ambito della teoria delle probabilità in un suo trattato *Théorie analytique des Probabilités* (1812), fu probabilmente introdotta inizialmente da Eulero e divenne molto popolare nell'ambito delle equazioni differenziali grazie a Oliver Heaviside. Si, quello della funzione a gradino, che inventò per calcolare cosa succedesse a un circuito elettrico quando veniva improvvisamente alimentato.

Comunque sia andata, oggi la Trasformata di Laplace la studiamo perché ancora introduce notevoli semplificazioni nell'analisi e la ricerca di soluzione delle equazioni differenziali lineari e ci consente, inoltre, di fare un po' di analisi armonica, ovvero analizzare il comportamento di un sistema quando applichiamo un segnale sinusoidale. Inoltre, nello studio della stabilità di un sistema a controreazione porta a dei risultati molto semplici da utilizzare.

Il presente Capitolo è dedicato alla definizione della Trasformata di Laplace, la presentazione di alcune sue proprietà, e la sua applicazione alle equazioni differenziali lineari. Immaginando che un sistema possa essere descritto con una equazione differenziale lineare vedremo come, utilizzando Laplace, lo stesso possa essere espresso come *funzione di trasferimento*, ovvero un oggetto matematico ottenuto da una particolare trasformata di Laplace.

Definizione

La trasformata di Laplace unilatera, associata a una funzione di variabile reale, come può essere nel nostro caso il tempo, rimane definita dal seguente integrale:

$$\mathcal{L}_{-}\{f(t)\} \doteq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} \ dt \doteq F(s) \qquad (1.1)$$

con $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ ($dove\ f(t) = 0\ per\ t < 0$). Unilatera in quanto uno degli estremi, quello inferiore, è pari a 0^- e d'altro canto, nello studio di sistemi si suppone che la parte interessante e diversa da zero sia presente soltanto per $t > 0$ essendo tutta la storia del sistema, da $-\infty$ a 0 riassunta nella condizione iniziale. Non solo, lo studio della risposta di un sistema a un ingresso normalmente presuppone che quest'ultimo venga applicato a partire da $t = 0$ e sia completamente nullo prima.

Il codominio della Trasformata di Laplace è il piano dei numeri complessi e questo significa che per interpretare correttamente questo operatore bisogna conoscere bene i numeri complessi e le operazioni su di essi.

1.2 Una trasformata elementare

Visto che le soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee sono combinazioni lineari di esponenziali reali o complessi, a questo punto vale la pena studiare la trasformata di Laplace della funzione esponenziale. Sarà una delle pochissime che ci serviranno in questo ambito.

$$\mathcal{L}_-\{e^{pt}\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{p\,t}\, e^{-s\,t}\, dt = \frac{1}{p-s}\left[e^{(p-s)\,t}\right]_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s-p} \tag{1.2}$$

dove per risolvere l'integrale abbiamo supposto che

$$\Re[s] > \Re[p] = \sigma^*$$

e σ^* prende il nome di ascissa di convergenza. Il termine $e^{-s\,t}$ facilita ovviamente la convergenza dell'integrale in quanto un esponenziale il cui argomento abbia parte reale negativa tende a zero più velocemente di qualsiasi polinomio e questo sarà importante quando tenteremo di trasformare dei segnali di ingresso di tipo polinomiale di grado qualsiasi.

Naturalmente il fatto che l'integrale sia sommabile solo in una parte del piano complesso non ci preoccupa più di tanto e quindi scriveremo:

$$\mathcal{L}_-\left\{e^{\,p\,t}\right\} = \frac{1}{s-p} \tag{1.3}$$

Ad esempio consideriamo il segnale e^{-2t}. La sua trasformata è la seguente:

$$e^{-2\,t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}$$

Notiamo che a denominatore è presente un polinomio di grado pari a uno e che la sua radice è proprio -2.

Potremmo quasi dedurre che, data una trasformata di Laplace, la presenza di radici a parte reale negativa al denominatore (che chiameremo poli), è legata al fatto che il segnale di partenza, nel tempo, converge a zero. Come vedremo più avanti, questa osservazione è generalizzabile a polinomi a denominatore di grado qualsiasi.

Trasformate derivate da quella elementare

Dalla trasformata appena vista se ne possono ricavare altre come casi particolari. Ad esempio, sostituendo $p = j\omega$ otteniamo:

$$\mathcal{L}_- \left\{ e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{s - j\omega}$$

Altro caso particolare che possiamo subito calcolare è la trasformata del gradino unitario o funzione di Heaviside:

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_- \left\{ \delta_{-1}(t) \right\} = \frac{1}{s}$$

Ovviamente l'ascissa di convergenza del gradino risulta uguale a 0.

per quel che riguarda le funzioni sin e cos si possono utilizzare le formule di Eulero e quindi ricondurci alla trasformata già analizzata:

$$\mathcal{L}_{-}\left\{\sin\left(\omega\, t\right)\right\} = \mathcal{L}_{-}\left\{\frac{e^{j\omega\, t} - e^{-j\omega\, t}}{2j}\right\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}_{-}\left\{\cos\left(\omega\, t\right)\right\} = \mathcal{L}_{-}\left\{\frac{e^{j\omega\, t} + e^{-j\omega\, t}}{2}\right\} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{1.5}$$

Notiamo che la parte reale delle radici del denominatore, le quali valgono $\pm j\omega$, è nulla. Infatti i segnali in questione non convergono ne divergono.

1.3 Alcune proprietà

Analizziamo adesso alcune semplici proprietà della Trasformata di Laplace. Saranno utili nel resto del libro.

Linearità

La trasformata di Laplace è un operatore lineare. La cosa si deduce dal fatto che alla base c'è un integrale la cui linearità è già stata dimistrata nei corsi di analisi: l'integrale della somma di due funzioni è pari alla somam degli integrali delle due funzioni. In questo caso possiamo scrivere:

$$\mathcal{L}_{-}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} = c_1 \mathcal{L}_{-}\left\{f_1(t)\right\} + c_2 \mathcal{L}_{-}\left\{f_2(t)\right\} \tag{1.6}$$

Coniugazione

Facile da dimostrare è anche la proprietà di coniugazione: basterà scrivere nell'integrale della trasformata s^* invece di s. Per cui:

$$F(s^*) = F^*(s) \tag{1.7}$$

Teorema del valore iniziale

Questo teorema consente di determinare asintoticamente il valore in $t = 0$ di una funzione di classe C^1 e la cui trasformata di Laplace abbia ascissa di convergenza minore di zero. Quindi non può essere usato per funzioni che hanno impulsi nell'origine. Nell'ipotesi che esista finito il

$$\lim_{t \to 0^+} f(t)$$

allora:

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s) \tag{1.8}$$

Teorema del valore finale

Allo stesso modo, solo se l'ascissa di convergenza di $F(s)$ è minore o uguale a zero ed esiste

$$\lim_{t\to\infty} f(t)$$

allora:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^-} sF(s) \tag{1.9}$$

Quest'ultimo risultato è molto utile e verrà molte volte utilizzato nel prosieguo per analizzare il comportamento di un sistema di controllo per $t \to \infty$.

Moltiplicazione per un esponenziale

Cosa succede se moltiplichiamo una funzione per un esponenziale nel tempo e^{at}? Questo risultato, noto anche come traslazione in frequenza quando $a = j\omega$ è un numero immaginario, tornerà utile studiando i segnali campionati.

$$\mathcal{L}_- \left\{ e^{at} f(t) \right\} = \int\limits_{0^-}^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a) \tag{1.10}$$

La dimostrazione è ovvia, basta inserire l'esponenziale nell'integrale che definisce la trasformata e poi effettuare una sostituzione di variabile $s' = s - a$. Alla fine, tornando in s si otterrà il risultato dell'eq. 1.10.

Traslazione nel tempo

Un risultato duale del precedente è dato dalla proprietà di traslazione nel tempo. Notiamo che è meglio premoltiplicare la funzione $f(t)$ per un gradino unitario per evitare che, traslando a destra, rientri nell'integrale della trasformata una quantità diversa da zero. Immaginando che a sia maggiore di zero:

$$\mathcal{L}_- \left\{\delta_{-1}(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s) \tag{1.11}$$

Dimostrazione: dalla definizione si ha

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t-a)f(t-a)e^{-st}dt$$

posto $\tau = t - a$, ovvero $t = \tau + a$ si ottiene:

$$\int_{-a^-}^{\infty} \delta_{-1}(\tau)f(\tau)e^{-s\tau}e^{-sa}d\tau = F(s)e^{-as}$$

L'estremo inferiore è ovviamente minore di zero per cui può essere sostituito, vista la presenza del gradino in zero, con 0^-. ‡

Convoluzione

L'operatore di convoluzione è molto utilizzato nell'ambito dello studio dei sistemi lineari definiti da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Abbiamo già visto, infatti, che l'uscita di un sistema descritto dalla sua risposta impulsiva $h(t)$, e a cui venga applicato un ingresso $u(t)$, è data dalla convoluzione dei due segnali

$$y(t) = h(t) * u(t). \tag{1.12}$$

Nell'ambito della Trasformata di Laplace la convoluzione viene a semplificarsi e si riduce a un semplice prodotto, vediamo come.

Supponiamo che la funzione $g(t)$ sia definita come la convoluzione di due funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$:

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{0^-}^{t} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \tag{1.13}$$

il risultato sarà:

$$\mathcal{L}_- \{g(t)\} = \mathcal{L}_- \{f_1(t)\} \cdot \ \mathcal{L}_- \{f_2(t)\} \tag{1.14}$$

Dimostrazione: supponiamo che $f_1(t) = 0$ per $t < 0$, cosa che abbiamo già detto essere vera nell'ambito dello studio che stiamo facendo. Di conseguenza, potremo riscrivere l'eq. 1.13 estendendo l'estremo superiore:

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{0^-}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

A questo punto facciamo la Trasformata di Laplace di $g(t)$:

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_{t=0^-}^{\infty} \left[\int_{\tau=0^-}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt \\ &= \int_{\tau=0^-}^{\infty} f_2(\tau) \left[\int_{t=0^-}^{\infty} f_1(t-\tau) e^{-st} dt \right] d\tau \\ &= \int_{\tau=0^-}^{\infty} f_2(\tau) \cdot F_1(s) e^{-s\tau} d\tau \\ &= F_1(s) \int_{\tau=0^-}^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) \cdot F_2(s) \end{aligned} \tag{1.15}$$

che dimostra chiaramente l'eq. 1.14‡

Notiamo che, grazie a questa proprietà, la relazione 1.12 diventerà semplicemente:

$$Y(s) = H(s) G(s). \tag{1.16}$$

Derivazione

Vediamo adesso cosa succede quando proviamo a trasformare una funzione derivata rispetto al tempo. Il risultato è il seguente:

$$\mathcal{L}_- \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} = sF(s) - f(0^-) \tag{1.17}$$

Dimostrazione: Notiamo che

$$\frac{d}{dt} \left(f(t) e^{-s\,t} \right) = \frac{df(t)}{dt} e^{-s\,t} - f(t) s e^{-s\,t}$$

e quindi, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_-\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} &= \int_{0^-}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{\,-s\,t}dt = \\ &= \int_{0^-}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(f(t)e^{\,-s\,t}\right)dt + \int_{0^-}^{\infty}f(t)se^{\,-s\,t}dt \\ &= \left[f(t)e^{\,-s\,t}\right]_{0^-}^{\infty} + sF(s) \\ &= -f(0^-) + sF(s) \qquad (1.18)\end{aligned}$$

che dimostra l'eq. 1.17‡

Si possono ottenere, con un procedimento analogo, anche le seguenti proprietà:

$$\mathcal{L}_-\left\{\frac{d^2}{dt^2}\,f(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0^-} \qquad (1.19)$$

$$\mathcal{L}_-\left\{\frac{d^3}{dt^3}\,f(t)\right\} = s^3F(s) - s^2f(0^-) - s\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0^-} - \left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_{t=0^-} \qquad (1.20)$$

Integrazione

Questa è, invece, la trasformata di Laplace di una funzione integrata tra 0^- e t.

$$\mathcal{L}_-\left\{\int_{0^-}^{t}f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s) \qquad (1.21)$$

Dimostrazione: Dalla trasformata della convoluzione

$$\mathcal{L}_-\left\{\int_{0^-}^{t}f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot G(s)$$

se poniamo $g(t) = \delta_{-1}(t)$

$$\mathcal{L}_{-}\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}_{-}\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot\frac{1}{s}$$

‡

1.4 Trasformata dell'impulso

L'impulso matematico di Dirac $\delta_0(t)$ è il "limite" di una distribuzione ad area costante e unitaria e per questo non può essere considerato una vera e propria funzione. L'impulso rimane definito per lo più tramite le sue proprietà, come ad esempio questa che fu data per primo proprio da Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(x)\phi(x)dx = \phi(0) \tag{1.22}$$

Se volessimo definire una distribuzione (successione) di funzioni che abbiano come "limite" l'impulso di Dirac dovremmo ricorrere, ad esempio, a delle funzioni Gaussiane come le seguenti:

$$\delta_0(x) = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{\pi}}e^{-kx^2}$$

Abbiamo però usato la parola limite in maniera impropria, in quanto questa definizione della $\delta_0(x)$ non è propriamente formale. E' invece vero il seguente limite che generalizza l'eq. 1.22:

$$\int_a^b \delta_0(x) f(x) dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2} f(x) dx \qquad (1.23)$$

Adesso, abbiamo già detto che l'uscita di un sistema lineare si può scrivere come convoluzione tra la risposta impulsiva e l'ingresso, ovvero:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

Se in ingresso poniamo un impulso d Dirac $\delta_0(t)$ avremo come uscita:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) \delta_0(t) d\tau = h(t)$$

da cui comprendiamo anche perché $h(t)$ viene chiamata risposta impulsiva.

Se ci chiediamo quale sia la trasformata di Laplace dell'impulso unitario basta sostituirlo nella definizione della Trasformata:

$$\mathcal{L}_- \{\delta_0(t)\} = \int_{0^-}^t \delta_0(\tau) e^{-st} = \left[e^{-st}\right]_{t=0} = 1 \qquad (1.24)$$

1.5 Trasformate dei polinomi

Vediamo adesso di definire la Trasformata di Laplace di una funzione polinomiale. A tale scopo definiamo un termine generico di grado $k-1$ utilizzando ancora il simbolo δ:

$$\delta_{-k}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

per $k = 1, 2, \ldots$ è una funzione di grado $k-1$ di t.

Poiché per $k = 1, 2, ...$

$$\frac{d}{dt}\frac{t^k}{k!} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

sfruttando la proprietà della trasformata dell'integrale

$$\mathcal{L}_- \left\{ \frac{t^k}{(k)!} \right\} = \mathcal{L}_- \left\{ \int \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} dt \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}_- \left\{ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right\} \tag{1.26}$$

Per k=1 a destra nell'eq. 1.26 c'è la trasformata di Laplace della costante $\delta_{-1}(t)$, secondo l'eq. 1.25, che abbiamo già visto essere pari a $1/s$. Per cui, sempre per $k = 1$ la trasformata della rampa lineare δ_{-2}, pari a zero prima di

$t = 0$ e poi pari a t per $t > 0$ varrà $1/s^2$. Riassumendo:

$$\mathcal{L}_- \{\delta_0(t)\} = 1 \qquad \text{(impulso)} \tag{1.27}$$

$$\mathcal{L}_- \{\delta_{-1}(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \text{(gradino)} \tag{1.28}$$

$$\mathcal{L}_- \{\delta_{-2}(t)\} = \frac{1}{s^2} \qquad \text{(rampa)} \tag{1.29}$$

$$\mathcal{L}_- \{\delta_{-3}(t)\} = \frac{1}{s^2} \qquad \text{(rampa parabolica)} \tag{1.30}$$

In generale

$$\mathcal{L}_- \{\delta_{-k}(t)\} = \mathcal{L}_- \left\{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right\} = \frac{1}{s^k} \tag{1.31}$$

oppure

$$\mathcal{L}_- \left\{t^k\right\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

Polinomi per esponenziali

Vediamo cosa succede se moltiplichiamo un polinomio per un esponenziale:

$$\mathcal{L}_- \left\{\frac{t^{(k-1)}e^{pt}}{(k-1)!}\right\} = \frac{1}{(s-p)^k} \tag{1.32}$$

Dimostrazione:

$$\mathcal{L}_{-}\left\{\frac{t^{(k-1)}e^{pt}}{(k-1)!}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{t^{(k-1)}e^{pt}}{(k-1)!}\, e^{-s\,t}\, dt$$
$$= \int_{0^-}^{\infty} \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!}\, e^{-(s-p)\,t}\, dt$$

posto $s - p = \xi$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!}\, e^{-\xi\,t}\, dt = \frac{1}{\xi^k} = \frac{1}{(s-p)^k}$$

‡

1.6 Inversione della Trasformata di Laplace

L'inversione della Trasformata di Laplace è un problema che si pone, ad esempio, nel calcolo dell'uscita di un sistema lineare. Infatti, una volta che si sia trovata l'espressione dell'uscita nel dominio di Laplace, normalmente utilizzando la relazione 1.16, possiamo voler ritornare nel dominio del tempo per calcolarne e graficarne l'andamento.

Ovviamente esiste una formulazione integrale dell'antitrasformata di Laplace, chiamata anche integrale di Bromwich o formula inversa di Mellin, che è data da questo integrale di linea:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s)\, ds \tag{1.33}$$

dove l'integrazione avviene lungo la linea verticale $\Re(s) = \gamma$ nel piano complesso, con γ maggiore della parte reale di tutte le singolarità di $F(S)$. Questo assicura che la linea di contorno sia nella regione di convergenza della Trasformata di Laplace.

Tuttavia, l'applicazione di questo integrale non risulta necessaria nel momento in cui le funzioni da antitrasformare siano formate da un rapporto di polinomi, cosa che succede sempre in ambito sistemi dinamici descritti da una equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti a cui applichiamo come ingresso un qualsiasi polinomio o una funzione sinusoidale.

In effetti, in questo caso è più semplice ricondurre la $Y(s)$ a una somma di frazioni elementari che siano simili alle trasformate già note. In particolare, sappiamo già come antitrasformare le seguenti funzioni razionali fratte:

$$
\begin{aligned}
\text{Termine elementare} &\longrightarrow \text{antitrasformata} \\
1 &\longrightarrow \delta_0(t) \\
\frac{1}{s^k} &\longrightarrow \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} \\
\frac{1}{(s-p)} &\longrightarrow e^{pt} \\
\frac{1}{(s-p)^k} &\longrightarrow \frac{t^{(k-1)e^{pt}}}{(k-1)!} \\
\frac{\omega}{s^2+\omega^2} &\longrightarrow \sin wt \\
\frac{s}{s^2+\omega^2} &\longrightarrow \cos wt \\
\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} &\longrightarrow e^{-at}\sin wt \\
\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2} &\longrightarrow e^{-at}\cos wt
\end{aligned}
$$

dove le ultime due sono state ricavate applicando il teorema della traslazione in s alle due immediatamente precedenti. Come si vede manca ancora qualcosa che ci dia la possibilità di antitrasformare una qualsiasi frazione che a denominatore abbia un termine trinomio con radici complesse e coniugate e a numeratore un qualunque polinomio di primo grado. Notiamo però che combinando linearmente le ultime due con due coefficienti b e c

possiamo scrivere:

$$\frac{bs + c\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = \frac{bs + c\omega}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2} \longrightarrow e^{-at}(b \sin wt + c \cos wt)$$

dove con una opportuna scelta di a, b, c e ω siamo in grado di rappresentare una qualsiasi frazione del tipo

$$\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

ponendo: $b = b_1$, $c\omega = b_0$, $2a = a_1$ e $a^2 + \omega^2 = a_0$.

Decomposizione in poli e residui

A questo punto vediamo come sia possibile analizzare una Trasformata di Laplace espressa come rapporto di polinomi il cui grado sia tale da avere il grado del denominatore più alto di quello del denominatore.

In algebra, la decomposizione poli e residui, o decomposizione in fratti semplici, è la conversione di una funzione razionale fratta in una somma di termini elementari più semplici del tipo

$$\frac{R}{(s-p)}, \frac{R}{(s-p)^n}$$

con p reale o anche numero complesso $p = \sigma + j\omega$.

La decomposizione in poli e residui prevede che i fratti semplici si compongano utilizzando le radici del denominatore (poli) e siano presenti nella forma

$$\frac{R_i}{s - p_i}$$

nel caso di poli semplici p_i, o nella forma

$$\frac{R_1^n}{(s-p_i)} + \frac{R_1^{n-1}}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{R_1^1}{(s-p_i)^n}$$

nel caso di poli p_i di molteplicità pari a n.

Il calcolo dei coefficienti R_i^k (residui) procede secondo questa espressione:

$$R_i^k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s-p_i)^n F(s)]\Big|_{s=p_i} \tag{1.34}$$

che nel caso di poli semplici si riduce a

$$R_i = [(s-p_i)F(s)]\Big|_{s=p_i} \tag{1.35}$$

1.7 Andamento delle antitrasformate nel tempo

Al fine di caratterizzare al meglio gli andamenti delle possibili risposte di un sistema, è conveniente definire alcuni parametri che ci potranno aiutare a comprendere questi andamenti e a confrontare in maniera efficace andamenti differenti. In particolare, considereremo poli reali e poli complessi coniugati di molteplicità pari a uno.

Parametri dei poli reali

Nel caso di trasformate contenenti poli reali semplici del tipo

$$Y_t(s) = \frac{\sum b_i s^i}{(s-p)(\dots)} = \frac{R}{(s-p)} + \dots$$

dove abbiamo supposto che R sia il residuo del polo p, la risposta nel tempo conterrà un termine del tipo

$$y(t) = Re^{pt}$$

che vale nell'origine $y(0) = R$ e la cui derivata, calcolata sempre nell'origine, vale $\dot{y}(0) = Rp$. Questo significa che, ipotizzando $p < 0$, ovvero una dinamica convergente a zero, la tangente in 0, di equazione $y = Rpx + R$ incontrerà l'asse delle ascisse esattamente in $x = -\frac{1}{p}$, come si vede dalal Fig. 1.1. La grandezza $\frac{1}{p}$ viene chiamata normalmente costante di tempo e indicata con τ. Il modo reale convergente con costante di tempo pari a τ dopo 3τ si è ridotto del 95%, quindi la dinamica si è quasi esaurita. Dopo 6τ il valore residuo è circa pari a $0.0025R$, praticamente quasi del tutto estinto.

Figura 1.1: Poli reali

Parametri dei poli complessi e coniugati

Nel caso di trasformate contenente poli complessi e coniugati, e quindi radici del tipo $p = \sigma + j\omega$ e $p^* = \sigma - j\omega$, avremo

$$Y_t(s) = \frac{\sum b_i s^i}{(s^2 + a_1 s + a_0)(\dots)} = \frac{R}{(s-p)} + \frac{R^*}{(s-p^*)} + \dots$$

Dove R e R^* sono i residui, coniugati, dei due poli coniugati.

E' possibile, a questo punto, esprimere i due residui nella notazione polare modulo e fase

$$R = |R|e^{j\varphi},$$
$$R^* = |R|e^{-j\varphi};$$

dove il residuo coniugato è stato scritto come un numero che ha lo stesso modulo e fase cambiata di segno. In questo maniera, scrivendo l'antitrasformata nel modo consueto:

$$\begin{aligned} y(t) &= |R|e^{j\varphi}e^{(\sigma+j\omega)t} + |R|e^{-j\varphi}e^{(\sigma-j\omega)t} \\ &= |R|e^{\sigma t}[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}] \\ &= 2|R|e^{\sigma t}\frac{[e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}]}{2} \\ &= 2|R|e^{\sigma t}\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

che, come già visto, porta a una espressione oscillante con un modulo che può convergere a zero oppure divergere a seconda del segno della parte reale dei poli.

Terminologia

$(s-p)(s-p^*) = s^2 - 2\omega s + (\omega^2+\sigma^2) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$

Dove ω_n è la pulsazione naturale; e ζ è il coefficiente di smorzamento

dove se $\zeta \geq 1$ i poli del sistema sono reali

poi se è proprio uguale a 1 lo smorzamento è massimo e non ci sono oscillazioni

se invece $\zeta < 0$ il sistema diverge

Se poi lo smorzamento è proprio pari a zero ho poli sull'asse immaginario

$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}$

Posso poi determinare, attraverso la regola del segno se le radici sono solo a parte reale negativa, infatti:

Figura 1.2: Poli complessi e coniugati

se c'è una permanenza del segno ho radici negative, altrimenti nel caso in cui c'è variazione del segno ho radici positive

1.8 Applicazione delle Trasformate di Laplace alle equazioni differenziali

Trasformazione di una equazione differenziale lineare di ordine n

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + ... + b_0 u(t)$$

$\mathcal{L}_- \left[\frac{d^n y(t)}{dt^n} \right] = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y(0) - .... - y^{(n-1)}(0) = s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^(k)(0)$ (dove il termine con la sommatoria sono le condizioni iniziali)

quindi: $a_n s^n Y(s) + ... + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) + CI_y^{(n-1)}(s) = b_m s^m U(s) + ... + b_0 U(s) + CI_u^{(m-1)}(s)$

Risolvendo per $Y(s)$ si avrà :

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + ... + b_0}{a_n s^n + ... + a_0} U(s) - \frac{CIy^{(n-1)}(s)}{a_n s^n + ... + a_0} + \frac{CI_u^{(m-1)}(s)}{a_n s^n + ... + a_0}$$

dove il primo termine lo consideriamo come A il secondo come B e il terzo come C

Inoltre notiamo come al denominatore compaiano in tutti gli addendi, questo è il polinomio dell'equazione omogenea.

Definizione dell'evoluzione libera e della risposta forzata

$U(s)\frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i} \longrightarrow A$
$\frac{CI_y}{\sum a_i s^i} \longrightarrow B$
$\frac{CI_u}{\sum a_i s^i} \longrightarrow C$

I termini A e C sono nulli se $u(t) = 0$ quindi B rappresenta l'evoluzione libera del sistema; in particolare C è nullo se $u(t) = 0$ per $t \leq 0$.

Visto che il denominatore di C e di B è lo stesso se converge l'evoluzione libera converge anche C

Il denominatore di A contiene i poli di B più quelli della trasformata dell'ingresso quindi:

- I modi presenti nell'uscita sono quelli propri del sistema più quelli dell'ingresso

- Se i modi del sistema convergono a zero nel lungo periodo rimangono solo quelli dell'ingresso e quindi il sistema è stabile

Quindi intuitivamente possiamo dire che un sistema è stabile se basta azzerare l'ingresso per riportare il sistema a riposo.

Definizione della funzione di trasferimento e di sistema nel senso di Laplace

La funzione di trasferimento del sistema descritto dall'equazione differenziale è:

$$G(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$$

Un sistema è descritto quasi completamente (salvo cancellazioni) dalla sua funzione di trasferimento

L'analisi della $G(s)$ ci permette di determinare facilmente:

- La stabilità asintotica: $R_e\left[p_i\right] < 0$
- Velocità di convergenza: maggiore se $R_e\left[p_i\right]$ minore
- Comportamento oscillatorio $p_i = p_j^*$ complessi

- Valore per $t \longrightarrow \infty$ dell'uscita (regime): $\lim\limits_{s \to 0} sG(s)U(s)$

  spesso $u(t) = \delta_{-1} \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

Trasfomata di Laplace della convoluzione e legame tra la trasformata di Fourier e quella di Laplace

Data:

$$g(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int\limits_{0^-}^{t} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

allora:

$$\mathcal{L}_- \{g(t)\} = \mathcal{L}_- \{f_1(t)\} \cdot \ \mathcal{L}_- \{f_2(t)\}$$

Dimostrazione:

$$G(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} f_2(\tau) \left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(t-\tau) e$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f_2(\tau) \cdot F_1(s) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) \int_{0^-}^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Il valore di $g(t)$ in t' dipende dal passato

Serie di Fourier:

$f(t) = F(t \pm KT)$ periodica di periodo T

$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{R=1}^{\infty} \left[A_k cos \frac{2\pi k}{T} t + B_k sin \frac{2\pi k}{T} t \right]$

- $\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ [valore medio]
- $A_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos\frac{2\pi k}{T}tdt;$
- $B_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin\frac{2\pi k}{T}tdt$

Utilizzando i numeri complessi:

$$f(t) = \frac{\Omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Omega)e^{jk\Omega t}$$

dove:

$$F(k\Omega) = \frac{1}{T} \int\limits_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jk\Omega t}dt$$

con $\Omega = \frac{2\pi}{T}$

La serie è per i segnali periodici, un segnale qualsiasi può essere visto come periodico con periodo infinito

Se $T \longrightarrow \infty$, $\Omega \longrightarrow 0$, $k\pi \longrightarrow \omega$

Allora:

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ma proprio i casi più interessanti creano problemi
Invece di trasformare f(t) trasformiamo:

$$\delta_{-1}(t) f(t) e^{-\sigma t}$$

Pongo $s = \sigma + j\omega$
e avrà :

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

Quindi:

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$\underline{LAPLACE}$

Vediamo quindi che esiste una diretta corrispondenza tra la serie di Fourier e la tra trasformata di Laplace.

Definizione della risposta impulsiva come antitrasformata della funzione di trasferimento

Data:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Assumiamo $U(s) = 1 \longrightarrow u(t) = \delta(t)$ Impulso

$y(t) = g(t)$ RISPOSTA IMPULSIVA

Possiamo dire che l'impulso ha area unitaria quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)dt = 1$$

Ma anche con la convoluzione : $y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t)g(t-\tau)d\tau = g(t)$

Inoltre se $u(t) = \delta_{-1}(t)$ $U(s) = \frac{1}{s}$ *Gradino*

$Y(s) = \frac{G(s)}{s}$

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = g_{-1}(t)$$

Questa è la risposta indiciale cioè l'integrale della risposta impulsiva

Modi propri di un sistema

L'antitrasformata di:

$$G(s) = \frac{\sum b_i s^i}{\sum a_i s^i}$$

è composta, o meglio, è combinazione lineare di:

- Esponenziali: e^{at} , $e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$
- Polinomi del tempo: t^0 (che è una costante), t, $\frac{t^2}{2}$, $\frac{t^3}{3!}$
- Polinomi(t) per esponenziali: te^{at}
- Eventualmente impulsi nell'origine al limite della causalità : $\delta_0(t)$

Questi sono i *modi naturali* del sistema, dove il loro numero è pari all'ordine dell'equazione differenziale(le sinusoidi contano 2)

Le caratteristiche del sistema si riflettono sulla posizione dei poli sul piano s ($Re[s], Im[s]$), infatti la convergenza dipende dalla loro parte reale che dovrà essere minore di 0.

Definizione di stabilità asintotica

Si può parlare di stabilità asintotica se $Re[p_i] < 0$

Nel caso del polo semplice $\longrightarrow \lim_{t\to\infty} e^{p_i t} \longrightarrow 0$;

nel caso del polo doppio $\longrightarrow \lim_{t\to\infty} te^{p_i t} \longrightarrow 0$ comunque

Ma cosa succede se $Re[p_i] = 0$?

Se semplice, l'evoluzione libera contiene una costante quindi il sistema è stabile ma non asintoticamente. Se invece è multiplo, contiene una rampa, una parabola quindi instabile. Per poli immaginari puri, si hanno sinusoidi nel caso di poli semplici o divergenti polinomialmente nel caso di poli multipli.

Definizione di regime transitorio e di regime permanente

Dato un sistema stabile la risposta forzata può essere composta dal periodo di tempo prima dell'estinzione dei modi naturali del sistema dove l'uscita si assesta detto <u>REGIME TRANSITORIO</u>, mentre il periodo di tempo che lo segue dove rimane solo la parte con i poli dell'ingresso è detto <u>REGIME PERMANENTE</u>.

Risposta al permanente di un sistema asintoticamente stabile

1.9 Un esempio: il carrello

Facciamo un esempio meccanico e proviamo a scrivere un modello matematico (il sistema) immaginando un ingresso da applicare e calcolando l'andamento nel tempo dell'uscita.

Come modello prendiamo un carrellino di massa M che si muova su un piano orizzontale con un attrito viscoso pari a D spinto da una forza $f_e(t)$. Immaginiamo pure che la grandezza di uscita, quella a cui questa volta siamo interessati, sia la sua velocità $v(t)$.

Come forza scegliamo una forza costante applicata a partire da $t = 0$:

$$f_e(t) = \delta_{-1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_e(s) = \frac{1}{s}.$$

L'equazione di equilibrio che governa il sistema è la seguente:

$$M\dot{v}(t) = f_e(t) - Dv(t) \tag{1.36}$$

Trasformando l'equazione differenziale 1.36, dove il puntino indica la derivazione rispetto al tempo, abbiamo:

$$M[sV(s) - v(0)] = F_e(s) - DV(s)$$

dove abbiamo immaginato che il carrello possa avere una condizione iniziale, ovvero una velocità iniziale diversa da zero. Se poi la velocità iniziale fosse zero, $v(0) = 0$, si avrebbe più semplicemente:

$$[sM + D]\, V(s) = F_e(s)$$

da cui, ricavando $V(s)$:

$$V(s) = \frac{1}{Ms + D} F_e(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s}. \tag{1.37}$$

dove abbiamo posto anche $M = 1$ e $D = 1$.

Possiamo subito chiederci a quale valore tenda la velocità per $t \to \infty$ e applicando il Teorema del valore finale otterremo

$$\lim_{s \to 0} s \frac{1}{s+1}\frac{1}{s} = 1.$$

A questo punto possiamo applicare la decoposizione in poli e residui per calcolare l'antitrasformata e quindi l'andamento dell'uscita:

$$V(s) = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

con

$$R_1 = (s+1)\frac{1}{(s+1)s}\bigg|_{s=-1} = -1$$

$$R_2 = s\frac{1}{(s+1)s}\bigg|_{s=0} = 1$$

Figura 1.3: Evoluzione libera e forzata

quindi antitrasformando otterremo:

$$v(t) = \mathcal{L}_{-}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] =$$
$$\mathcal{L}_{-}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}_{-}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}\right] = \delta_{-1}(t) + e^{-t}$$

In sostanza abbiamo risolto un'equazione differenziale tramite un'equazione algebrica.

Se poi poniamo una condizione iniziale diversa da zero $v(0) = 0.5$

$$V(s) = \frac{1}{Ms + D}F_e(s) + \frac{v(0)}{Ms + D} = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s} + \frac{0.5}{s+1}$$

e 'antitrasformata dell'evoluzione libera, indichiamola con $v_l(t)$ varrà

$$v_l(t)0.5e^{-t}.$$

In Fig. 1.3 troviamo la rappresentazione dei vari termini. Il primo termine($\frac{1}{s+1}\frac{1}{s}$) lo abbiamo indicato con A e rappresenta la risposta forzata cioè l'uscita causata dall'applicazione dell'ingresso; il secondo termine($\frac{0.5}{s+1}$), indichato con B è l'evoluzione libera, cioè l'uscita del sistema

Figura 1.4: Andamento della velocità del carrellino

a partire da una condizione iniziale diversa da zero. Notiamo che l'unico polo della risposta libera coincide con il polo di $\frac{1}{(s+1)}$ che è la parte della risposta forzata dovuta solo al sistema.

Se supponessimo che dopo 5 secondi la forza applicata torni a 0 potremmo studiare cosa succede in almeno due modi: il primo consiste nello studiare la risposta completa all'ingresso: $\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-5)$; il secondo è invece quello di immaginare il sistema in una condizione iniziale differente, quella raggiunta con l'applicazione del primo gradino, e da li considerare l'evoluzione libera del sistema.

Si ottiene comunque il risultato in Fig. 1.4

Notiamo che ponendo $u(t) = 0$ a partire da una condizione iniziale diversa da zero il sistema torna nella condizione di riposo $v(t) = 0$. Possiamo dedurne che il sistema sia asintoticamente stabile.

1.10 Esempi di funzioni di trasferimento

- Risposte tipiche: impulsiva e indiciale

  La risposta impulsiva è di scarso interesse pratico perché gli impulsi non esistono fisicamente ma è importante perché consente di vedere tutti e soli i modi del sistema.

  Infatti le risposte canoniche si ricavano integrando quella impulsiva.

  La risposta al gradino, detta anche risposta indiciale, si ottiene integrando quella impulsiva; mentre la risposta alla rampa si ottiene integrando quella indiciale.

  Tra l'altro è proprio sulla risposta al gradino che si definiscono le specifiche di progetto nel dominio del tempo.

- Sistemi del primo ordine: il carrellino (FdT+C.I.)

  Date le condizioni per cui il sistema si trova a riposo $My^{\cdot\cdot} + Dy. = f(t)$ $y(0) = 0$, $y^{\cdot}(0) = 0$

  e considerando $D = M = 1$ $f_a = Dx^{\cdot}$

  $Y(s)\,[Ms^2 + Fs] = F(s)$; $f(t) = \delta_{-1}(t)$

$$Y(s) = \frac{1}{s(Ms+D)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(Ms+D)}$$

avrà un doppio polo nell'origine quindi:

$$\frac{R_1^{(1)}}{s} + \frac{R_1^{(2)}}{s^2} + \frac{R_2}{s+1}$$

Ora vado ad effettuare il calcolo dei residui:

- $R_1^{(1)} = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left[s^2 \frac{1}{(s+1)s^2}\right] = \lim_{s\to 0} -\frac{1}{(s+1)^2} = -1$
- $R_1^{(2)} = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} = 1$
- $R_2 = \lim_{s\to -1} (s+1)\frac{1}{s^2(s+1)} = 1$

Quindi:

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

e

$$y(t) = \delta_{-1}(t)\left[-1 + t + e^{-t}\right]$$

Vediamo quindi che il sistema non è asintoticamente stabile e quindi il transitorio non si annulla!!

- Sistemi del secondo ordine: massa-molla-smorzatore
  Date:

  $f(t) = \delta_1(t)$ e date le stesse condizioni per cui il sistema si trova a riposo:

$y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$

In questo caso invece consideriamo: $M = 1$, $D = 2$, $K = 101$

$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$

$Ms^2Y(s) + DsY(s) + KY(s) = F(s)$

Risolviamo quindi per Y(s) ottenendo così :

$$Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 101}\frac{1}{s} = \frac{N}{D}$$

con $p_1 = 0$, $p_2 = -1 - 10j$, $p_3 = p_2^*$

Anche in questo caso calcoliamo i residui:

$R_1 = \lim_{s\to 0} s\frac{N}{D} = \frac{1}{101} \longrightarrow \frac{1}{101}\delta_{-1}(t)$

$R_2 = \lim_{s\to -1-10j}(s + 1 + 10j)\frac{N}{D} = -\frac{1}{202} - \frac{j}{2020}$

$R_3 = R_2^*$

$\frac{R_2}{s+1+10j} + \frac{R_3}{s+1-10j} = -\frac{s+2}{101(s^2+2s+101)}$

Ora dobbiamo antitrasformare: $-\frac{s+2}{101(s^2+2s+101)}$

I poli sono complessi quindi usiamo:

$e^{-\sigma t}\sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+2\sigma s+(\sigma^2+\omega^2)}$

$e^{-\sigma t}\cos(\omega t) \longrightarrow \frac{s+\sigma}{s^2+2\sigma s+(\sigma^2+\omega^2)}$

da cui $\sigma = 1$ $\omega = 10$ e possiamo risolvere:

$A(s+\sigma)+B\omega=-(s+2)\ A=1,\ B=0.1$

E quindi l'antitrasformata sarà:

$$(-e^{-t}\cos 10t-\frac{e^{-t}}{10}\sin 10t)$$

Quindi avrò :

$$y(t)=\frac{1}{101}\left[\delta_{-1}(t)-(e^{-t}\cos 10t-\frac{e^{-t}}{10}\sin 10t)\right]$$

dove $\delta_{-1}(t)$ è simile all'ingresso ed il termine $(e^{-t}\cos 10t-\frac{e^{-t}}{10}\sin 10t)$ è il transitorio legato all'ingresso.

- Se il sistema è asintoticamente stabile in uscita ci ritroviamo l'ingresso

- Coincidenza di poli sull'asse immaginario

  Nel paragrafo 3.6.2 abbiamo parlato dei parametri dei poli complessi e coniugati e abbiamo introdotto il coefficiente di smorzamento(ζ).

  Dopo di che ci siamo soffermati cosa succedeva al sistema nel caso che ζ fosse <0 oppure ≥ 1; vedendo poi che nel caso in cui fosse stato proprio pari a 0 siamo in presenza di poli sull'asse immaginario.