L1: Matrici (2-4)

Argomenti lezione:

- Definizione di Matrice
- Matrici particolari
- Operazioni tra matrici

sama@ing.uniroma3.it

Definizione di matrice

Matrici

Def.: Una matrice a coefficienti reali a p righe e q colonne è una tabella di numeri reali disposti su p righe e q colonne

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

I numeri p e q vengono detti **dimensioni** della matrice di tipo (p, q), ovvero della matrice con p righe e q colonne

Matrici

Def.: Una matrice a coefficienti reali a p righe e q colonne è una tabella di numeri reali disposti su p righe e q colonne

$$A := \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & j\text{-esima colonna} & & \phantom{a_{1q}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} & i\text{-esima riga} \end{array}$$

Elemento (o **coefficiente**) di posto (i, j) della matrice A è il numero reale sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna di A

Matrici

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 3, \quad a_{12} = \sqrt{2}, \quad a_{13} = -5,$$

$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 1$$

Matrici

<u>Esercizio di base</u>:

Determinare la matrice A di tipo (2, 2) tale che $a_{ij} := i + j$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1+1 & 1+2 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} 2+1 & 2+2 \end{array} \end{array}$$

Matrici

Definizioni:

$$\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$$

l'insieme delle matrici a coefficienti reali di tipo (*p, q*)

$$A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$$

una matrice a coefficienti reali a *p* righe e *q* colonne

$$\mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$$

l'insieme delle matrici **quadrate di ordine *n*** a coefficienti reali

In una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n, gli elementi a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} si dicono elementi della **diagonale principale**

Matrici particolari

Matrici

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice A è una matrice quadrata di ordine 3

Gli elementi sulla diagonale principale sono 2, 3, 6

Inoltre tutti gli elementi di A che si trovano sotto la diagonale principale, cioè gli elementi $a21$, $a31$, $a32$ sono nulli.

Per questa ragione la matrice A si chiama **triangolare superiore**

Matrici

Definizioni:

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono nulli.

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è triangolare superiore se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrici

Definizioni:

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ di ordine n si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale sono nulli.

Una matrice quadrata $A = (a_{ij})$ è triangolare superiore se e solo se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$

Insieme matrici triangolari superiori di ordine n a coefficienti reali:

$$\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) := \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i > j\}$$

Matrici

Insieme matrici triangolari superiori di ordine n a coefficienti reali:

$$\mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) := \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i > j\}$$

Osservazione: la definizione di matrice triangolare superiore non implica che $a_{ij} \neq 0$ per ogni $i \leq j$

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrici

Insieme matrici triangolari inferiori di ordine *n* a coefficienti reali:

$$\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) := \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i < j\}$$

$\Rightarrow$ tutti gli elementi che si trovano al di sopra della diagonale = 0

Esempio:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici

<u>Esercizio di base (1)</u>: Determinare la matrice quadrata $A := (a_{ij})$ di ordine 3 tale che $a_{ij} := \max(0, i-j)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)$$

Matrici

<u>Esercizio di base (2)</u>: Determinare la matrice quadrata $A := (a_{ij})$ di ordine n tale che $a_{ij} := \max(0, i-j)$ appartiene a $\mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$

Dobbiamo dimostrare che A è una matrice triangolare inferiore, ovvero se $j > i$, allora $a_{ij} = 0$. Sia quindi $j > i$.

Ricordiamo che abbiamo $a_{ij} = \max(i-j, 0)$.

Ma $i - j < 0$, perché $j > i$, da cui $a_{ij} = 0$.

Matrici

Definizione: Una matrice quadrata avente nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale si dice **diagonale**.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Insieme delle matrici diagonali di ordine *n* a coefficienti reali:

$$\mathrm{D}(n, \mathbb{R}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ per ogni } i \neq j\}$$

Matrici

<u>Definizione</u>: Una matrice quadrata si dice **simmetrica** se i suoi elementi in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale sono uguali.

<u>Esempio</u>:

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Insieme delle matrici simmetriche di ordine *n* a coefficienti reali:

$$\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$$

Matrici

Esercizio di base:

Dimostrare che ogni matrice diagonale è simmetrica, ovvero:

$$\mathrm{D}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{S}(n, \mathbb{R})$$

Data una matrice $A:=(a_{ij})$ diagonale, si ha che $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Dobbiamo dimostrare che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici i e j.

Se $i = j$, ciò è ovvio.

Se $i \neq j$, allora $a_{ij} = 0 = a_{ji}$ (per la definizione di matrice diagonale).

sama@ing.uniroma3.it

Matrici

<u>Esercizio di base (1)</u>: Determinare se la matrice quadrata $A := (a_{ij})$ di ordine 3 tale che $a_{ij} := i + j$ è simmetrica.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) = \{A = \left(a_{ij}\right) \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$$

Matrici

Esercizio di base (2): Determinare se la matrice quadrata $A := (a_{ij})$ di ordine n tale che $a_{ij} := i + j$ è simmetrica.

Dimostriamo che si ha $a_{ij} = a_{ji}$ qualunque siano i e j .
Poichè, per definizione, abbiamo $a_{ij} = i + j$,
otteniamo: $a_{ij} = i + j = j + i = a_{ji}$ *(proprietà commutativa della somma)*

Risposta: **Sì!**

Matrice trasposta

Definizione: Data una matrice $A := (a_{ij})$ a p righe e q colonne, si dice **matrice trasposta** di A la matrice a q righe e p colonne avente come elemento di posto (j, i) l'elemento di posto (i, j) di A

$$^{t}A := b_{ji} \text{ con } b_{ji} := a_{ij}$$

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$^{t}A := B := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Proprietà della matrice trasposta

<u>Esempio</u>: Calcolare la matrice trasporta di *A*

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(3)$$

$$^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boxed{^tA \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(3)}$$

Proprietà della matrice trasposta

<u>Esercizio di base</u>: Dimostrare la seguente affermazione

$$A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^{t}A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$$

Abbiamo che $A := (a_{ij}) \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$

Questo significa che se $i > j$ allora $a_{ij} = 0$.

Sia $B := (b_{ji}) = {}^{t}A$ da cui $b_{ji} = a_{ij}$

Dobbiamo dimostrare che $B \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$

quindi dimostrare che, se $i > j$ allora $b_{ji} = 0$.

Sia allora $i > j$. Abbiamo $b_{ji} = a_{ij} = 0$,

vale a dire $B \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$

Proprietà della matrice trasposta

Esercizio di base: Dimostrare la seguente affermazione

$$A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^tA \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$$

Dimostriamo il viceversa, ovvero:
supponendo che se $B = {}^tA \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$ allora $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$

$B = {}^tA = (b_{ji}) \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$, ovvero $b_{ji} = 0$ per ogni $i > j$
abbiamo $a_{ij} = b_{ji}$, quindi $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$,
vale a dire $A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$

Proprietà della matrice trasposta

<u>Esercizio di base</u>: Dimostrare la seguente affermazione

$$A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^{t}A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$$

Analogamente si dimostra la seguente affermazione:

$$A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^{t}A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$$

Inoltre si può dimostrare che:

- ogni matrice simmetrica coincide con la sua trasposta

<u>Esempio</u>:

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \boxed{{}^{t}C = C}$$

Proprietà della matrice trasposta

<u>Esercizio di base</u>: Dimostrare la seguente affermazione

$$A \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^tA \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n)$$

Analogamente si dimostra la seguente affermazione:

$$A \in \mathrm{T}_{\mathbb{R}}(n) \text{ se e solo se } {}^tA \in \mathrm{T}^{\mathbb{R}}(n)$$

Inoltre si può dimostrare che:

- ogni matrice simmetrica coincide con la sua trasposta
- una matrice quadrata è simmetrica se e solo se coincide con la propria trasposta, ovvero:

$$\mathrm{S}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$$

Proprietà della matrice trasposta

<u>Esempio</u>: Calcolare la matrice trasporta di A e la trasposta di ${}^tA$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

In generale, data una qualsiasi matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ si può dimostrare che ${}^t({}^tA) = A$

Operazioni tra matrici

Matrice somma

<u>Obiettivo</u>: Date matrici A e B $\in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$
definiamo una matrice $A + B$ $\in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$
N.B. L'operazione di addizione tra matrici verifica proprietà analoghe alle usuali proprietà dell'addizione tra numeri reali.

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+0 & 1+1 \\ 1+7 & 3+4 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrice somma

Definizione: Date due matrici $A := (a_{ij})$ e $B := (b_{ij})$ entrambe di tipo (p, q), chiamiamo *matrice somma* $A + B$ di tipo (p, q) il cui elemento di posto (i, j) è dato dalla somma degli elementi di posto (i, j) delle matrici A e B, ovvero:

$$A + B := (c_{ij}) \quad \text{con} \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

Osservazione: Si possono sommare solamente matrici che hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne, cioè matrici dello stesso tipo.

Matrice somma

Proposizione *L'addizione tra matrici di* $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ *soddisfa le proprietà:*

1. *Proprietà associativa.*

   $(A+B)+C = A+(B+C)$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $C \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$.

2. *Proprietà commutativa.*

   $A+B = B+A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$.

3. *Esistenza dello zero.*

   $A+0 = A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$

   0 è chiamata la **matrice nulla**, in questo caso è di tipo (*p, q*)

4. *Esistenza dell'opposto.*

   $A+(-A) = 0$

   -*A* è chiamata la **matrice opposta** di *A*

Matrice somma

4. Esistenza dell'opposto.

$A + (-A) = 0$ - A è chiamata la **matrice opposta** di A

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice somma

Legge di semplificazione per l'addizione matriciale:

Proposizione *Date tre matrici* A, B *e* C *di* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *si ha:*

$$se\ A + C = B + C\ \ allora\ A = B.$$

<u>Dimostrazione</u>:

Partiamo dal fatto che $A + C = B + C$

poi $A + C + (- C) = B + C + (- C)$

poichè si ha $C + (-C) = 0$

allora $A + 0 = B + 0$

e sfruttando la proprietà della matrice nulla segue $A = B$

Matrice somma

Proposizione *Date due matrici A e B in $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ si ha:*

$$ {}^tA + {}^tB = {}^t(A+B). $$

<u>Esempio</u>:

$$ A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 13 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix} $$

Moltiplicazione per uno scalare

Definizione: Data una matrice $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$
e un numero reale k, indichiamo con kA la matrice di tipo (p, q) avente come elementi quelli della matrice A moltiplicati per k.
Studiamo le proprietà della moltiplicazione per uno scalare.

Esempio:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$-5A = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 \\ 25 & -35 & -45 \\ 0 & -5 & 35 \end{pmatrix}$$

Moltiplicazione per uno scalare

Proposizione

1. $h(kA) = (h \cdot k)A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$;

2. $(h + k)A = hA + kA$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$;

3. $h(A + B) = hA + hB$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$;

4. $1A = A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$;

5. $(-1)A = -A$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$;

6. $0A = 0$ *per ogni* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$.

NOTA: Nella 6, lo 0 a sinistra è un numero, lo 0 a destra è una matrice di tipo (p,q)

Matrice prodotto

Definizione Siano $A := (a_{ik}) \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ e $B := (b_{kj}) \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$. La **matrice prodotto** è la matrice $A \cdot B := \left(c_{ij}\right) \in \mathrm{M}(p, r, \mathbb{R})$ dove:

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj}. \qquad \triangle$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qj} & \dots & b_{qr} \end{pmatrix}$$

Il numero delle (q) colonne di A deve essere uguale al numero delle (q) righe di B

Il prodotto $A \bullet B$ è una matrice a p righe (come A) e r colonne (come B)

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>:

$$\underset{4\times 2}{A} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 3}{B} := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{4\times 3}{AB} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+0\cdot 0 & 2\cdot 2+0\cdot 4 & 2\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 8\cdot 3+7\cdot 0 & 8\cdot 2+7\cdot 4 & 8\cdot 1+7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 4 & 1\cdot 1+0\cdot(-1) \\ 1\cdot 3+3\cdot 0 & 1\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 1+3\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici *A* e *B*

Non è possibile fare il prodotto di *B* e *A*

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} \boxed{2 & 0} \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3 \\ 0\end{matrix}} & \begin{matrix}2 \\ 4\end{matrix} & \begin{matrix}1 \\ -1\end{matrix} \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{2\cdot 3 + 0 \cdot 0} & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 8\cdot 3 + 7\cdot 0 & 8\cdot 2 + 7\cdot 4 & 8\cdot 1 + 7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot 4 & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \boxed{8 \quad 7} \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ \boxed{8\cdot 3 + 7\cdot 0} & 8\cdot 2 + 7\cdot 4 & 8\cdot 1 + 7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot 4 & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici A e B

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 8 \cdot 3 + 7 \cdot 0 & 8 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 8 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \\ \boxed{1 \cdot 3 + 0 \cdot 0} & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici ***A*** **e** ***B***

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 8\cdot 3 + 7\cdot 0 & 8\cdot 2 + 7\cdot 4 & 8\cdot 1 + 7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ \boxed{1\cdot 3 + 3\cdot 0} & 1\cdot 2 + 3\cdot 4 & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici A e B

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ \boxed{1 \quad 0} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} & 1 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 8 \cdot 3 + 7 \cdot 0 & 8 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 8 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & \boxed{1 \cdot 2 + 0 \cdot 4} & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici *A* e *B*

Matrice prodotto

Esempio: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ \boxed{1 \quad 3} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 8\cdot 3 + 7\cdot 0 & 8\cdot 2 + 7\cdot 4 & 8\cdot 1 + 7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot 4 & \boxed{1\cdot 1 + 3\cdot(-1)} \end{pmatrix}$$

prodotto righe per colonne delle matrici *A* e *B*

Matrice prodotto

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + 0\cdot 4 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 8\cdot 3 + 7\cdot 0 & 8\cdot 2 + 7\cdot 4 & 8\cdot 1 + 7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 3 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 3\cdot 4 & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 24 & 44 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

4 righe e
3 colonne

Matrice prodotto

Esercizio di base: $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolare $AI =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 1 \\ 4\cdot 1+5\cdot 0+6\cdot 0 & 4\cdot 0+5\cdot 1+6\cdot 0 & 4\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

Matrice prodotto

Esercizio di base: $\underset{2x3}{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\underset{3x3}{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Determinare quali dei seguenti prodotti sono definiti:

AB SI, perché il numero delle colonne di A (3) è uguale al numero delle righe di B (3).

BA NO, perché il numero delle colonne di B (3) non è uguale al numero delle righe di A (2).

AA NO, non è una matrice quadrata

BB SI, è una matrice quadrata (3, 3) => $\begin{pmatrix} 9 & -8 & -11 \\ -9 & 51 & -10 \\ -1 & -13 & 17 \end{pmatrix}$

Proprietà della moltiplicazione

L'operazione di moltiplicazione tra matrici verifica **alcune** proprietà analoghe all'operazione di moltiplicazione tra numeri

Vale la proprietà associativa della moltiplicazione di matrici:

Date tre matrici $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *e* $C \in \mathrm{M}(r, s, \mathbb{R})$

$$(AB)C = A(BC).$$

Attenzione:

AB è una matrice di tipo (p, r) e $(AB)C$ è di tipo (p, s).

BC è una matrice di tipo (q, s) e $A(BC)$ è di tipo (p, s).

Dunque $(AB)C$ e $A(BC)$ sono matrici dello stesso tipo.

Proprietà della moltiplicazione

L'operazione di moltiplicazione tra matrici verifica **alcune** proprietà analoghe all'operazione di moltiplicazione tra numeri

Valgono le proprietà distributive delle operazioni matriciali:

1. *Date* A *e* B *in* $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ *e* C *in* $\mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$ *si ha:*

$$(A+B)C = AC + BC.$$

2. *Data* A *in* $\mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ *e* B *e* C *in* $\mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$ *si ha:*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Proprietà della moltiplicazione

L'operazione di moltiplicazione tra matrici verifica **alcune** proprietà analoghe all'operazione di moltiplicazione tra numeri

Proposizione *Date le matrici* A *in* $\mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$, B *in* $\mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$ *e un reale* h *si ha:*

$$h(AB) = (hA)B = A(hB).$$

Proprietà della moltiplicazione

Proposizione *Date le matrici* $A \in \mathrm{M}(p,q,\mathbb{R})$ *e* $B \in \mathrm{M}(q,r,\mathbb{R})$

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 3 & 3 \\ 4 & 44 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Proprietà della moltiplicazione

Proposizione *Date le matrici* $A \in \mathrm{M}(p, q, \mathbb{R})$ *e* $B \in \mathrm{M}(q, r, \mathbb{R})$

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

<u>Esempio</u>:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$^tB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 3 & 3 \\ 4 & 44 & 2 & \boxed{14} \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$^tA = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà della moltiplicazione

Altre proprietà della moltiplicazione tra numeri reali **non** sono valide nel caso delle matrici.

Non vale la proprietà commutativa. Per esempio, se A e B sono due matrici tali che sia definito il prodotto AB, allora:

- il prodotto BA potrebbe non essere definito;
- il prodotto BA potrebbe essere definito ma avere dimensioni diverse da AB;

=> Per poter fare entrambi i prodotti AB e BA deve essere A di tipo (p, q) e B di tipo (q, p). Da cui, si ha AB di tipo (p, p) e BA di tipo (q, q). Ha le stesse dimensioni solo se si ha: $p = q$.

Proprietà della moltiplicazione

Altre proprietà della moltiplicazione tra numeri reali **non** sono valide nel caso delle matrici.

Non vale la proprietà commutativa. Per esempio, se A e B sono due matrici tali che sia definito il prodotto AB, allora:

- il prodotto BA potrebbe non essere definito;
- il prodotto BA potrebbe essere definito ma avere dimensioni diverse da AB;
- il prodotto BA potrebbe essere definito e avere le stesse dimensioni di AB (sono due matrici quadrate dello stesso ordine), ma non è detto che i prodotti AB e BA sono uguali.

Proprietà della moltiplicazione

Altre proprietà della moltiplicazione tra numeri reali **non** sono valide nel caso delle matrici.

Non vale la proprietà commutativa. Per esempio, se *A* e *B* sono due matrici tali che sia definito il prodotto *AB*, allora:

- il prodotto *BA* potrebbe essere definito e avere le stesse dimensioni di *AB* (sono due matrici quadrate dello stesso ordine), ma non è detto che i prodotti *AB* e *BA* sono uguali.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contro-Esempio:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà della moltiplicazione

Altre proprietà della moltiplicazione tra numeri reali **non** sono valide nel caso delle matrici.

Non vale la proprietà commutativa. Per esempio, se A e B sono due matrici tali che sia definito il prodotto AB, allora:

- il prodotto BA potrebbe essere definito e avere le stesse dimensioni di AB (sono due matrici quadrate dello stesso ordine), ma non è detto che i prodotti AB e BA sono uguali.

=> Ciò non implica che, date comunque A e B, si ha sempre $AB \neq BA$.

Definizione: Date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine, A e B **commutano** o **permutano** se si ha $AB = BA$.

Proprietà della moltiplicazione

Definizione: Date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine, A e B **commutano** o **permutano** se si ha $AB = BA$.

Esempio: Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine. Stabilire se è vero o falso che qualunque siano A e B si ha:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$$

Da cui è vero se e solo se $AB = BA$, ovvero A e B commutano!

Proprietà della moltiplicazione

Altre proprietà della moltiplicazione tra numeri reali **non** sono valide nel caso delle matrici.

Un'altra proprietà che **non** vale è il principio di annullamento del prodotto: se A e B sono due matrici tali che $AB = 0$ non è detto che almeno una delle matrici A e B sia nulla.

Esempio: $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = 0$$

Proprietà della moltiplicazione

Altre proprietà della moltiplicazione tra numeri reali **non** sono valide nel caso delle matrici.

Non vale la <u>legge di semplificazione del prodotto</u>:
se A, B e C sono matrici tali che $AC = BC$ e $C \neq 0$,
non è detto che A sia uguale alla matrice B.

<u>Esempio</u>: $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} AB = 0 \\ 0B = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad AB = 0B \qquad A \neq 0$$

Matrici e sistemi

<u>Esempio</u>: Consideriamo il sistema *S*

$$S\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti di *S*

Matrici e sistemi

<u>Esempio</u>: Consideriamo il sistema *S*

$$S\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ **matrice colonna delle incognite di *S***

Matrici e sistemi

<u>Esempio</u>: Consideriamo il sistema *S*

$$S\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matrice colonna dei termini noti di *S*

Matrici e sistemi

Esempio: Consideriamo il sistema S

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_1 := \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A\bar{X}_1 = B$$

Matrici e sistemi

<u>Esempio</u>: Consideriamo il sistema *S*

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S\colon \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_2 := \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq B$$

Matrici e sistemi

Dato un sistema di *p* equazioni in *q* incognite:

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

Allora possiamo scrivere il sistema *S* nella forma : $A\,X = B$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

N.B. Risolvere il sistema *S* è equivalente a determinare (se esistono) **tutte** le matrici $\underline{X}$ tali che $A\,\underline{X} = B$.

Matrici e sistemi

<u>Esempio (1)</u>: Data la matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare tutte le matrici $X \in \mathrm{M}(2, 2, R)$ tali che $AX = 0$.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$AX = 0$ se e solo se:

$$\begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ciò avviene se e solo se

$a = b = c = d = 0$,

cioè se e solo se X è la matrice nulla.