L17: Autovalori e autovettori (31)

Argomenti lezione:

- Introduzione
- Autovalori e autovettori
- Polinomio caratteristico
- Molteplicità di un autovalore
- Autovalori e autovettori di matrici

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

Obiettivo: Individuare sotto quali specifiche condizioni un endomorfismo di uno spazio vettoriale si può rappresentare per mezzo di una *matrice diagonale*.

Concetti che introdurremo oggi:

- Autovalori e autovettori
- Polinomio caratteristico
- Molteplicità di un autovalore
- Autovalori e autovettori di matrici

Autovalori e Autovettori

Autovalori e autovettori

Esempio: Sia f l'endomorfismo di $R^2[x]$ definito da

$f(a + bx) := 2b + (-a + 3b)x$

Rispetto alla base canonica ($p_1(x) := 1$ e $p_2(x) := x$) di $R^2[x]$ questo endomorfismo si rappresenta con la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se però consideriamo la base di $R^2[x]$ formata dai due polinomi $p_1(x) := 1 + x$ e $p_2(x) := 2 + x$, vediamo che si ha:

$\boldsymbol{f(p_1(x))} = 2 + 2x = \mathbf{2}\,\boldsymbol{p_1(x)} + 0\,p_2(x)$

$\boldsymbol{f(p_2(x))} = 2 + x = 0\,p_1(x) + \mathbf{1}\,\boldsymbol{p_2(x)}$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata da $p_1(x)$ e $p_2(x)$ è la matrice diagonale A':

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f(p_1(x))$ e $f(p_2(x))$ sono multipli di $p_1(x)$ e $p_2(x)$!

Autovalori e autovettori

Definizione: Un endomorfismo $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita si dice **diagonalizzabile** se esiste (almeno) una base di V rispetto a cui f si rappresenta con una *matrice diagonale*.

Teorema: Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Data una base di V formata da $e_1, e_2, \ldots, e_n$, la **matrice rappresentativa** di f rispetto a tale base è ***diagonale*** se e solo se $f(e_i)$ è un multiplo di e_i per $1 \le i \le n$, ovvero se e solo se esistono scalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che $\boldsymbol{f(e_i) = \lambda_i e_i}$ per $1 \le i \le n$.

Matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata da $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Autovalori e autovettori

Definizione: Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V, $\boldsymbol{v} \neq 0$ si dice **autovettore** di f con **autovalore $\boldsymbol{\lambda}$** se si ha: $f(v) = \lambda\, v$.

Quesito: Lo stesso vettore $v \neq 0$ può essere un autovettore di f rispetto a due autovalori diversi?

No! Infatti: sia v autovettore di f sia rispetto a due autovalori λ e μ.
Vogliamo mostrare che $\lambda = \mu$. Sappiamo che: $f(v) = \lambda\, v$; $f(v) = \mu\, v$.
Allora $\lambda\, v = \mu\, v$, cioè $(\lambda - \mu)\, v = 0$. Poiché $v \neq 0$ abbiamo $\lambda - \mu = 0$.

Osservazione: Nella definizione abbiamo richiesto che $v \neq 0$.
Infatti se $v = 0$ si ha $f(0) = 0$ per qualunque numero reale λ .
Dunque se nella definizione non avessimo richiesto $v \neq 0$,
ogni numero reale λ sarebbe autovalore di f !

marcella.sama@uniroma3.it

Autovalori e autovettori

Esercizio: Sia dato l'endomorfismo di R^3 definito da

$f(x, y, z) := (2x + 2y + z,\ y,\ 0)$

Stabilire per ciascuno dei seguenti vettori se è un autovettore di f.

In caso affermativo determinare l'autovalore corrispondente.

$v_1 := (1, 0, 0)$ => $f(v_1) = f(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$ **OK** => $f(v_1) = 2\, v_1$

$v_2 := (0, 1, 0)$ => $f(v_2) = f(0, 1, 0) = (2, 1, 0)$ **NO multiplo di v_2**

$v_3 := (1, 0, -2)$ => $f(v_3) = f(1, 0, -2) = (0, 0, 0)$ **OK** => $f(v_3) = 0\, v_3$

$v_4 := (0, 0, 0)$ => non è un autovettore perchè, per definizione, un autovettore è diverso dal vettore nullo.

Autovalori e autovettori

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettor. V e sia λ un autovalore di f. L'insieme $\boldsymbol{E(\lambda)} := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ è un *sottospazio* vettoriale di V, detto **autospazio** di f relativo a λ .

Def.: $E(\lambda)$ è formato dagli **autovettori** di f relativi all'autovalore λ e dal vettore nullo.

[Notiamo che, per definizione di autovettore $v \neq 0$, un autospazio non può mai essere costituito dal solo vettore nullo.]

Autovalori e autovettori

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettor. V e sia λ un autovalore di f. L'insieme $\boldsymbol{E(\lambda)} := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ è un *sottospazio* vettoriale di V, detto **autospazio** di f relativo a λ.

Dimostrazione: $E(\lambda)$ è non vuoto perché contiene il vettore nullo.

Se v_1 e v_2 sono vettori di $E(\lambda)$ allora anche la loro somma $\in$ a $E(\lambda)$?

Sappiamo che $f(v_1) = \lambda v_1$ e $f(v_2) = \lambda v_2$ e dobbiamo mostrare che $f(v_1 + v_2) = \lambda (v_1 + v_2)$.

Infatti: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda (v_1 + v_2)$.

Inoltre, dobbiamo mostrare che se v è un vettore di $E(\lambda)$ mentre k è uno scalare, allora anche il prodotto $k\,v$ appartiene a $E(\lambda)$.

Sappiamo che $f(v) = \lambda v$. Dobbiamo mostrare che $f(k\,v) = \lambda (k\,v)$.

Infatti: $f(k\,v) = k\,f(v) = k\,\lambda\,v = \lambda (k\,v)$.

Polinomio caratteristico

marcella.sama@uniroma3.it

Polinomio caratteristico

Esempio: Sia $f : R^4[x] \to R^4[x]$ l'endomorfismo che associa
al polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
il polinomio $(a_0 + a_1) + (a_1 - a_2 + a_3)\, x + (a_0 + 2a_1 - a_2)\, x^2 + a_3 x^3$.
Consideriamo la base canonica di $R^4[x]$ formata dai polinomi
$p_1(x) := 1, \quad p_2(x) := x, \quad p_3(x) := x^2, \quad p_4(x) := x^3.$
Rispetto a tale base l'endomorfismo f si rappresenta con la matrice:

$$A := \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{array}$$

Vogliamo ora determinare polinomi non nulli del tipo
$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
tali che $f(p(x)) = \lambda\, p(x)$
per qualche $\lambda \in R$.

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Vogliamo determinare polinomi non nulli del tipo $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ tali che $f(p(x)) = \lambda\, p(x)$ per qualche $\lambda \in R$.

=> $p(x)$ è un autovettore se e solo se $p(x) \neq 0$ ed esiste $\lambda \in R$ tale che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = \lambda a_0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = \lambda a_1 \\ a_0 + 2a_1 - a_2 = \lambda a_2 \\ a_3 = \lambda a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a_0 + a_1 = 0 \\ (1-\lambda)a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + (-1-\lambda)a_2 = 0 \\ (1-\lambda)a_3 = 0 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Vogliamo determinare polinomi non nulli del tipo $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ tali che $f(p(x)) = \lambda\, p(x)$ per qualche $\lambda \in R$.

=> $p(x)$ è un autovettore se e solo se $p(x) \neq 0$ ed esiste $\lambda \in R$ tale che:

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a_0 + a_1 = 0 \\ (1-\lambda)a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + (-1-\lambda)a_2 = 0 \\ (1-\lambda)a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Vogliamo determinare polinomi non nulli del tipo $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ tali che $f(p(x)) = \lambda\, p(x)$ per qualche $\lambda \in R$.

=> $p(x)$ è un autovettore se e solo se $p(x) \neq 0$ ed esiste $\lambda \in R$ tale che:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\lambda = x}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\det(A - xI) = 0}$$

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Vogliamo determinare polinomi non nulli del tipo $p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ tali che $f(p(x)) = \lambda\, p(x)$ per qualche $\lambda \in R$.

=> $p(x)$ è un autovettore se e solo se $p(x) \neq 0$ ed esiste $\lambda \in R$ tale che:

$$\Rightarrow \quad (A-\lambda I)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\lambda = x]{} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\det(A - xI) = 0}$$

Osservazioni:

- Il sistema, essendo omogeneo, è sempre risolubile.
- $\det(A - \lambda I) \neq 0$: il sistema (Crameriano) ha solo la soluz. banale.
- Stiamo cercando autovettori, ovvero vettori non nulli. Dunque ci interessano soluzioni non banali di questo sistema omogeneo.
- $\det(A - \lambda I) = 0$: rk A è minore del numero delle incognite e, quindi, esistono infinite soluzioni (incluse quelle non banali).

marcella.sama@uniroma3.it

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Vogliamo determinare polinomi non nulli del tipo $p(x) := a_0+a_1 x +a_2 x^2 +a_3 x^3$ tali che $f(p(x)) = \lambda\, p(x)$ per qualche $\lambda \in R$.

=> $p(x)$ è un autovettore se e solo se $p(x) \neq 0$ ed esiste $\lambda \in R$ tale che:

$$\Rightarrow \quad (A-\lambda I)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xRightarrow[\lambda = x]{} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\det(A - xI) = 0}$$

Osservazioni:

- $\det(A-\lambda I) = 0$: rk A è minore del numero delle incognite e, quindi, esistono infinite soluzioni (incluse quelle non banali).
- se $\lambda = 1$ si ha $\det(A - 1I) = 0$, il sistema ha soluzioni non banali, cioè 1 è autovalore di f
- se $\lambda = 2$ si ha $\det(A - 2I) \neq 0$, il sistema ha solamente la soluzione banale, cioè 2 non è autovalore di f

Polinomio caratteristico

<u>Teorema</u>: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V . Sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto a un'altra base di V. Allora si ha: $det\,(A' - xI\,) = det\,(A - xI\,)$.

[Il teorema ci dice che gli autovalori di f <u>non</u> dipendono A !
cioè dalla base di V scelta per rappresentare f .]

Polinomio caratteristico

Teorema: Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto a un'altra base di V. Allora si ha: $det\,(A' - xI) = det\,(A - xI)$.

Dimostrazione:

Sappiamo che esiste una matrice invertibile M tale che $A' = M^{-1} AM$

$$\begin{aligned}
det\,(A' - xI) &= det\,(M^{-1} AM - xI) && [A' = M^{-1} AM] \\
&= det\,(M^{-1} AM - M^{-1}(xI)\,M) && [I = M^{-1} I\, M] \\
&= det\,(M^{-1}(A - xI)\,M) && [\textit{prop. delle matrici}] \\
&= det\, M^{-1}\, det\,(A - xI)\, det\, M && [det\,(A\,B) = detA\; detB] \\
&= det\,(A - xI) && [det\, M^{-1} = (det\, M)^{-1}]
\end{aligned}$$

Polinomio caratteristico

Definizione: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n e sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V . Chiamiamo **polinomio caratteristico** di f il polinomio $\boldsymbol{p_f(x) := det\,(A - xI\,)}$ di grado n nell'incognita x.

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita. Allora gli autovalori di f sono le ***radici* del polinomio caratteristico** di f.

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a una base di V. Se λ è un autovalore di f, allora si ha:

$$\boldsymbol{dim\ E(\lambda) = n - rk\,(A - \lambda\, I\,)}$$

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Determiniamo autovalori e relativi autospazi.

Il polinomio caratteristico $p_f(x) := det\,(A - xI\,)$ è:

$$p_f(x) := \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Calcoliamo le radici del polinomio caratt. $p_f(x)$

Ad esempio, sviluppiamo questo determinante rispetto all'ultima riga:

$$p_f(x) = (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 1 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (1-x)(-x^3+x^2-x) \\ &= -x(1-x)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

Calcoliamo il discriminante ($\Delta = b^2 - 4\,a\,c$) di $x^2 - x + 1$:
$a = 1$; $b = -1$; $c = 1$ segue $\Delta = 1 - 4 < 0$ quindi no radici reali

Le radici di questo polinomio (ovvero gli autovalori di f) sono 0 e 1.

Polinomio caratteristico

Esempio (seguito): Determiniamo autovalori e relativi autospazi.

Il polinomio caratteristico $p_f(x) := det\,(A - xI\,)$ è:

$$p_f(x) := \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Le radici di $p_f(x)$ (gli autovalori di f) sono 0 e **1**.

$$(A-1I)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2t \\ a_1 = 0 \\ a_2 = t \\ a_3 = t \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 1 è :

$$E(1) = \{2t + tx^2 + tx^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \dim E(1) = 1$$

Quindi $2 + x^2 + x^3$ costituisce una base di $E(1)$

Polinomio caratteristico

<u>Esempio (seguito)</u>: Determiniamo autovalori e relativi autospazi.

Il polinomio caratteristico $p_f(x) := det\,(A - xI\,)$ è:

$$p_f(x) := \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

Le radici di $p_f(x)$ (gli autovalori di f) sono **0** e 1.

$$(A - 0I)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = -t \\ a_1 = t \\ a_2 = t \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 0 è :

$$E(0) = \{-t + tx + tx^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \dim E(0) = 1$$

Quindi $-1 + x + x^2$ costituisce una base di $E(0)$

Polinomio caratteristico

Procedura: Per determinare l'autospazio $E(\lambda)$ occorre innanzitutto risolvere il sistema lineare omogeneo associato alla matrice $A - \lambda I$. Poi, bisogna prendere i vettori che hanno queste soluzioni come componenti rispetto alla base considerata.

Osservazioni pratiche:
Per definizione, un autospazio $E(\lambda)$ contiene vettori diversi dal vettore nullo. Se risolvendo il sistema omogeneo necessario alla determinazione di $E(\lambda)$ troviamo solo la soluzione banale, allora questo significa che abbiamo sbagliato a risolvere il sistema oppure che il valore λ non è un autovalore (e quindi abbiamo sbagliato a calcolare il polinomio caratteristico o a determinare le sue radici).

marcella.sama@uniroma3.it

Molteplicità di un autovalore

<u>Teorema</u>: Sia $p(x)$ un polinomio nell'incognita x. Il numero reale a è **radice** del polinomio $p(x)$ se e solo se $x - a$ *divide* $p(x)$.

<u>Definizione</u>: Sia a una radice di un polinomio $p(x)$. Allora a è radice di $p(x)$ con **molteplicità** m se $p(x) = (x - a)^m k(x)$ con $k(a) \neq 0$.

In altri termini, a ha molteplicità m se:

$(x - a)^m$ <u>divide</u> $p(x)$, mentre $(x - a)^{m+1}$ <u>non divide</u> $p(x)$.

<u>Esempio</u>:

$$p(x) := 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow p(x) = (x-1)(2x^4 + 4x^3 - 2x - 4)$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow p(x) = (x-1)^2(2x^3 + 6x^2 + 6x + 4)$$

$\Rightarrow$ La radice 1 ha molteplicità 2.

marcella.sama@uniroma3.it

Molteplicità di un autovalore

Teorema: Se un polinomio $p(x)$ di grado n ha le radici distinte

$a_1, a_2, \ldots, a_r$ di molteplicità rispettive $m_1, m_2, \ldots, m_r$

allora $m_1 + m_2 + \ldots + m_r \leq n$

Esempio (seguito): $p(x) = (x-1)^2(2x^3 + 6x^2 + 6x + 4)$

Cerchiamo i divisori di $\boxed{2}\, x^3 + 6x^2 + 6x + \boxed{4}$

$4/2 = 2$ quindi i possibili divisori sono: $1, -1, 2, -2$

Notiamo che $2x^3 + 6x^2 + 6x + 4$ si annulla per $x = -2$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 6x^2 + 6x + 4 & x + 2 \\ \hline
-2x^3 - 4x^2 \quad\quad\quad\quad & 2x^2 + 2x + 2 \\ \hline
2x^2 + 6x + 4 & \\
-2x^2 - 4x \quad\; & \\ \hline
2x + 4 & \\
-2x - 4 &
\end{array}
$$

oppure tramite Ruffini :

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 6 & 6 & 4 \\ \hline
-2 & & -4 & -4 & -4 \\ \hline
 & 2 & 2 & 2 & 0
\end{array}
$$

$2x^2 + 2x + 2$

Molteplicità di un autovalore

<u>Teorema</u>: Se un polinomio $p(x)$ di grado n ha le radici distinte $a_1, a_2, \ldots, a_r$ di molteplicità rispettive $m_1, m_2, \ldots, m_r$ allora $m_1 + m_2 + \ldots + m_r \leq n$

<u>Esempio (seguito)</u>: $p(x) = (x-1)^2(2x^3 + 6x^2 + 6x + 4)$

$$p(x) = (x-1)^2(x+2)(2x^2 + 2x + 2)$$

Calcoliamo il discriminante ($\Delta = b^2 - 4\,a\,c$) di $2x^2 + 2\,x + 2$:
$a = 2$; $b = 2$; $c = 2$ segue $\Delta = 8 - 16 < 0$ quindi no radici reali

$p(x)$ ha la radice 1 di molteplicità 2 e la radice -2 di molteplicità 1

La somma delle molteplicità è 3 che è inferiore al grado di $p(x)$

$$p(x) := 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

marcella.sama@uniroma3.it

Molteplicità di un autovalore

<u>Definizione</u>: Un polinomio $p(x)$ di grado n si dice **totalmente riducibile** se si può scrivere come *prodotto di polinomi di I grado*.

<u>Teorema</u>: Sia $p(x)$ un polinomio di grado n e siano $a_1, a_2, \ldots, a_r$ le radici distinte di $p(x)$ aventi molteplicità rispettive $m_1, m_2, \ldots, m_r$.
Il polinomio $p(x)$ è <u>totalmente riducibile</u> se e solo se
$m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

<u>Definizione</u>: Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f.
Definiamo $m_f(\lambda) = m$
se λ ha molteplicità m come radice del polinomio caratteristico di f.

Molteplicità di un autovalore

<u>Definizione</u>: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f.

Definiamo $m_f(\lambda) = m$

se λ ha molteplicità m come radice del polinomio caratteristico di f.

<u>Teorema</u>: Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di un endomorfismo f di uno spazio vettoriale di dimensione n ,

si ha: $m_f(\lambda_1) + m_f(\lambda_2) + \ldots + m_f(\lambda_r) \leq n$.

In particolare f ha <u>al più</u> n autovalori distinti.

Il polinomio caratteristico di f è **totalmente** riducibile se e solo se $m_f(\lambda_1) + m_f(\lambda_2) + \ldots + m_f(\lambda_r) = n$.

Molteplicità di un autovalore

<u>Teorema</u>: Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia λ un autovalore di f.

Si ha: $\mathbf{1 \leq \boldsymbol{dim\ E(\lambda)} \leq \boldsymbol{m_f}(\boldsymbol{\lambda})}$.

Molteplicità di un autovalore

Esempio: Consideriamo l'endomorfismo di R^5 la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare gli autovalori di f e le dimensioni dei relativi autospazi.

$$p_f(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$p_f(x) = (3-x)\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (3-x)(x^4 - 4x^3 + 4x^2) \\ &= (3-x)x^2(x^2 - 4x + 4) \\ &= (3-x)x^2(x-2)^2 \end{aligned}$$

Molteplicità di un autovalore

Esempio: Consideriamo l'endomorfismo di R^5 la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare gli autovalori di f e le dimensioni dei relativi autospazi.

$$\boxed{p_f(x) = (3-x)x^2(x-2)^2}$$

Autovalori: 3 di molteplicità 1, 0 di molteplicità 2, 2 di molteplicità 2

$1 \leq \dim E(3) \leq m_f(3) = 1$, pertanto $\dim E(3) = 1$;

$\mathbf{1} \leq \dim E(0) \leq m_f(0) = \mathbf{2}$

$$\dim E(0) = 5 - \mathrm{rk}(A - 0I) = 5 - \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{2}$$

Molteplicità di un autovalore

Esempio: Consideriamo l'endomorfismo di R^5 la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è la matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare gli autovalori di f e le dimensioni dei relativi autospazi.

$$\boxed{p_f(x) = (3-x)x^2(x-2)^2}$$

Autovalori: 3 di molteplicità 1, 0 di molteplicità 2, 2 di molteplicità 2

$1 \leq \dim E(3) \leq m_f(3) = 1$, pertanto $\dim E(3) = 1$;

$1 \leq \dim E(0) \leq m_f(0) = 2$; $\mathbf{1} \leq \dim E(2) \leq m_f(2) = \mathbf{2}$

$$\dim E(2) = 5 - \mathrm{rk}(A - 2I) = 5 - \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{1}$$

Molteplicità di un autovalore

Il calcolo degli autovalori con le rispettive molteplicità può essere in alcuni casi semplificato:

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita. Supponiamo che esista una base per V rispetto a cui f si rappresenta con una matrice triangolare A. Gli autovalori di f sono gli elementi lungo la diagonale principale di A: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale principale di A.

[Dato che $(A - xI)$ è una matrice triangolare: il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi lungo la sua diagonale principale.]

marcella.sama@uniroma3.it

Molteplicità di un autovalore

Il calcolo degli autovalori con le rispettive molteplicità può essere in alcuni casi semplificato:

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita. Supponiamo che esista una base per V rispetto a cui f si rappresenta con una matrice triangolare A. Gli autovalori di f sono gli elementi lungo la diagonale principale di A: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è uguale al numero di volte che compare sulla diagonale principale di A.

Osservazione: Se λ è un autovalore di molteplicità 1 di un endomorfismo f allora $dim\ E(\lambda) = 1$.
Un autovalore di molteplicità 1 viene detto **semplice**.

Autovalori e autovettori di matrici

Esempio: Sia f l'endomorfismo di $R^2[x]$ definito da

$f(a + bx) := 2b + (-a + 3b)x$

Rispetto alla base canonica di $R^2[x]$ questo endomorfismo si rappresenta con la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$p_1(x) := 1 + x$ e $p_2(x) := 2 + x$ sono autovettori di f. Infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Il secondo vettore è due volte il primo

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Il secondo vettore è una volta il primo

Autovalori e autovettori di matrici

<u>Esempio</u>: Sia f l'endomorfismo di $R^2\,[x]$ definito da

$f\,(a + bx) := 2b + (-\,a + 3b)\,x$

Rispetto alla base canonica di $R^2\,[x]$ questo endomorfismo si rappresenta con la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$p_1(x) := 1 + x$ e $p_2(x) := 2 + x$ sono <u>autovettori</u> di f. Infatti:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo che la matrice A è *diagonalizzabile* se A è *simile* a una matrice diagonale (cioè se esiste M invertibile tale che $M^{-1}\,A\,M$ è diagonale)

Autovalori e autovettori di matrici

<u>Generalizziamo le proprietà</u>:

• Un **autovettore** di A con **autovalore** λ è un vettore colonna v non nullo tale che $A\, v = \lambda\, v$.

• L'**autospazio** $E(\lambda)$ è l'insieme dei vettori colonna v tali che $Av = \lambda v$.

• Il **polinomio caratteristico** di A è $p_A(x) := det\,(A - xI\,)$.

• La **molteplicità** $m_A(\lambda)$ di un autovalore λ è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico di A.

• Per ogni autovalore λ di una matrice A si ha $1 \leq dim\ E(\lambda) \leq m_A(\lambda)$.

• Un autovalore λ *è* detto **semplice** se la sua molteplicità è uguale a 1: la dimensione dell'autospazio relativo a un autovalore semplice è 1.

• Gli autovalori di una <u>matrice triangolare</u> A sono gli elementi lungo la diagonale principale: la molteplicità algebrica di ciascuno di essi è pari <u>al numero di volte</u> che compare sulla diagonale principale di A.

Autovalori e autovettori di matrici

Esercizio: Siano dati la matrice A e il vettore v :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori di k il vettore v è autovettore di A, e relativamente a quale autovalore.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2+2k \\ 10 \end{pmatrix} = \boldsymbol{w}$$

Il vettore w è multiplo di v se e solo se $2 + 2k = 5$, ovvero se $k = 3/2$.

Dunque v è autovettore di A se e solo se $k = 3/2$.

In tal caso v è autovettore relativamente all'autovalore 5.