VETTORI

CdS Ingegneria Informatica
A.A. 2019/20

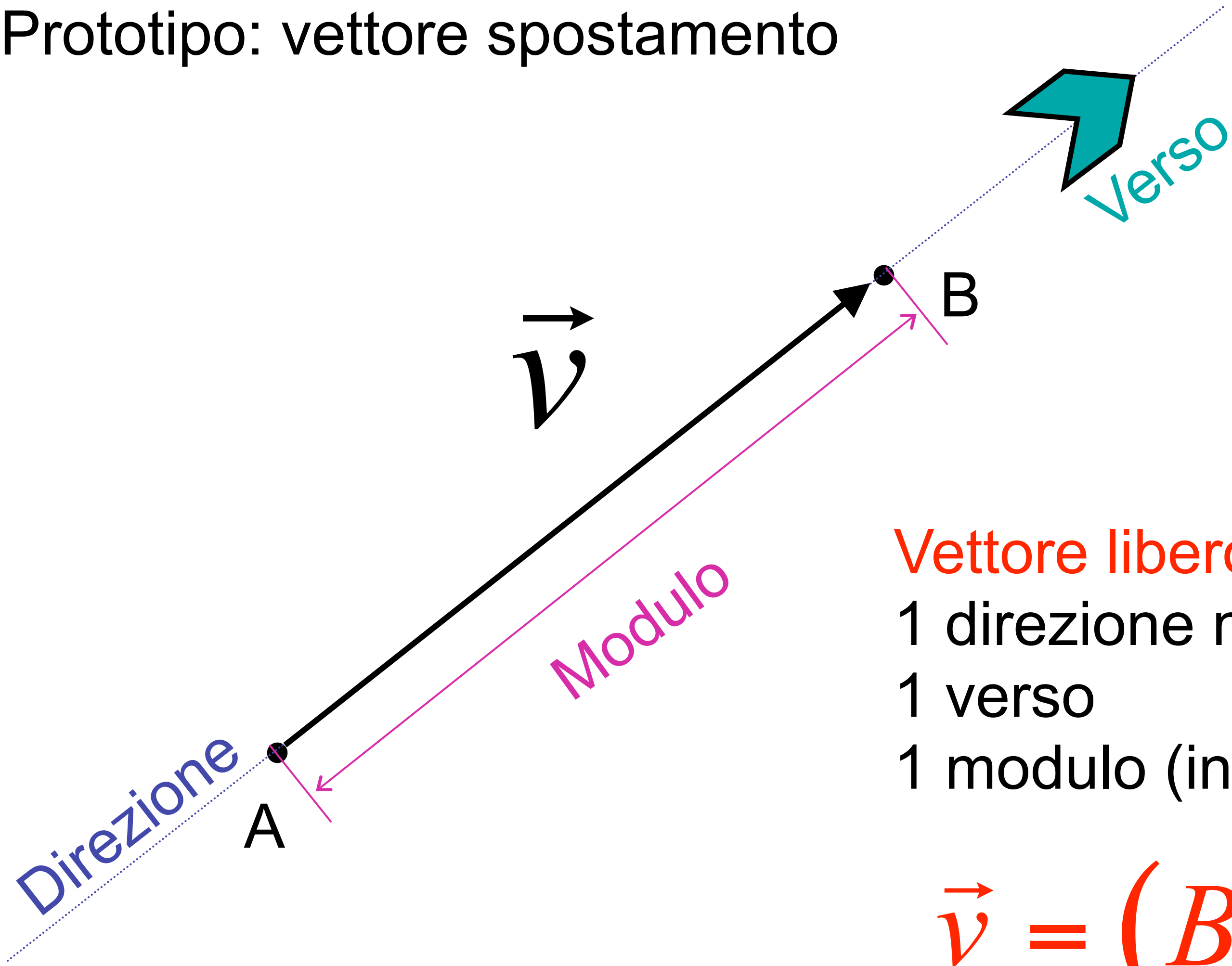
Grandezze fisiche

- Grandezze scalari: completamente definite da un numero ed una unità di misura
  – Esempi: distanza, lunghezza, periodo, pressione, temperatura
- Grandezze vettoriali: completamente definite da 3 numeri e da una unità di misura o da un numero, una unità di misura, una direzione ed un verso
  – Esempi: spostamenti, forze, velocità, accelerazione, campi elettrici e magnetici, …
- Grandezze tensoriali: definite da più di 3 numeri ed una unità di misura
  – Esempi: momento d'inerzia, matrice di rotazione, …

Stazione: 2.2 km in direzione nord-est

Vettore nel piano

Prototipo: vettore spostamento



Vettore libero $\vec{v}$

1 direzione nello spazio

1 verso

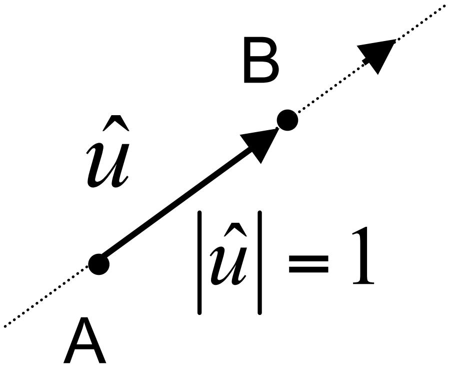
1 modulo (intensità) $|\vec{v}|, v$

$$\vec{v} = (B - A)$$

Versore

- Versore: vettore di modulo unitario, adimensionale

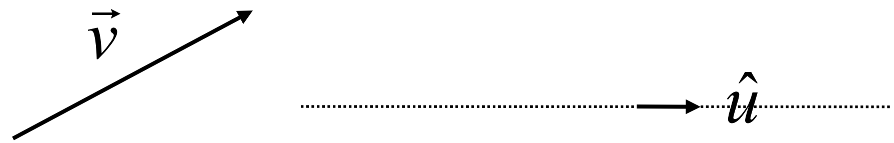
$$\hat{u} : \quad |\hat{u}| = 1$$

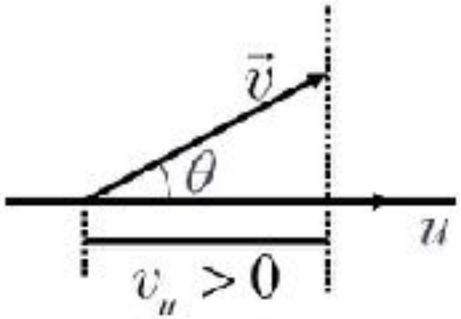


Un versore individua un asse orientato

I versori dove non te li aspetti

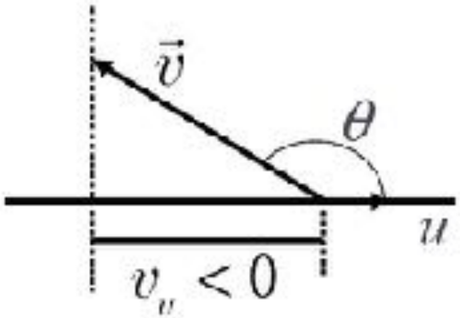
LA componente ed IL componente



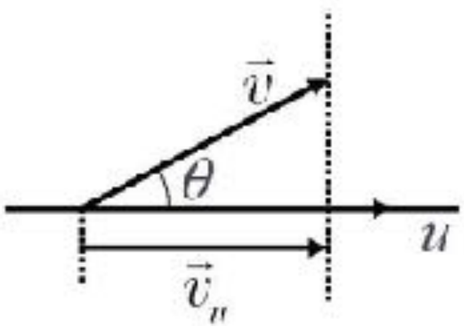


$$v_u = v\cos\theta$$

la componente

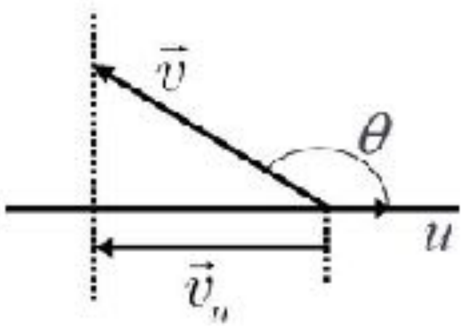


LA componente è una grandezza scalare!



$$(\vec{v}_u = v\cos\theta\,\hat{u})$$

il componente



IL componente è un vettore (il vettore componente lungo una direzione)

Algebra dei vettori

- I vettori liberi costituiscono un'algebra
  - È definita l'operazione somma tra due vettori

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

  - È definita l'operazione di moltiplicazione tra un vettore ed uno scalare

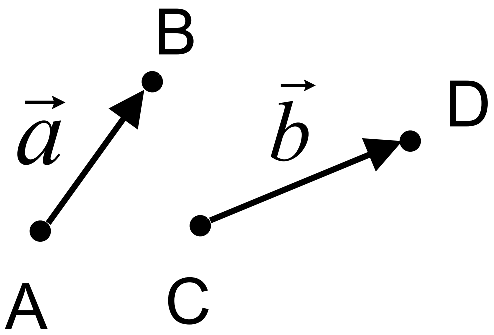
$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad \lambda\vec{a}=\vec{c}$$

- Inoltre: sono definiti un prodotto esterno ed uno interno

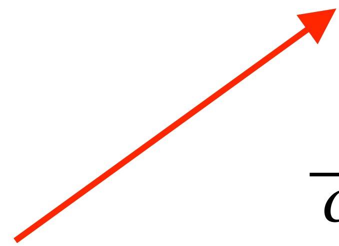
- Prodotto scalare: $\vec{a}\bullet\vec{b}=\lambda \qquad \lambda\in\mathbb{R}$
- Prodotto vettoriale: $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}$

Somma tra due vettori

- Prototipo: somma tra due vettori spostamento

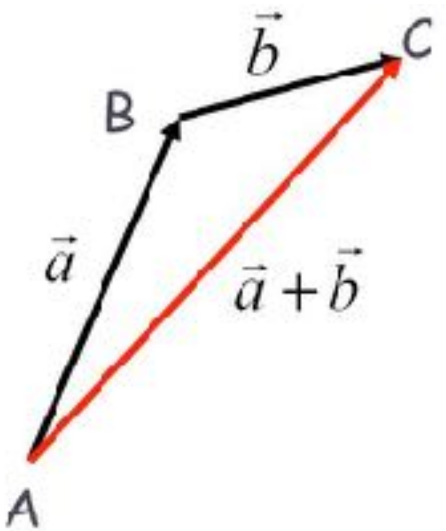


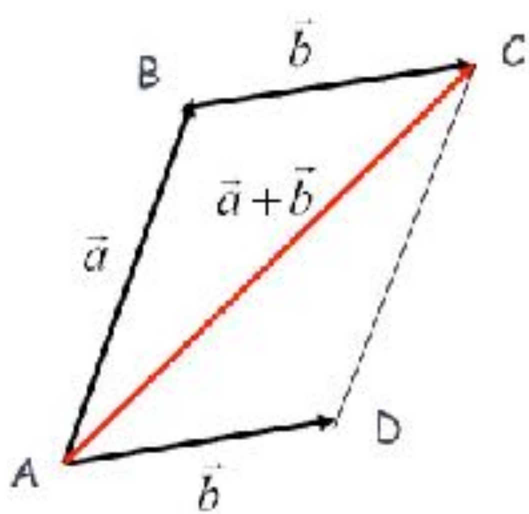
$\vec{a}$ $\vec{b}$



$$B \equiv C$$

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (D - A)$$

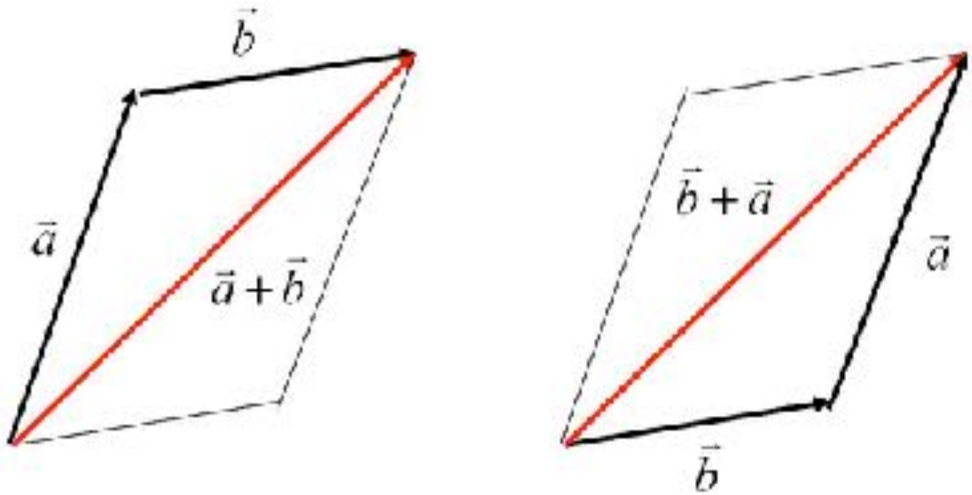




Regola del parallelogramma:
Il vettore somma è dato dalla diagonale (C-A) del Parallelogramma costruito con i vettori (B-A) e (C-B)

Proprietà commutativa della somma

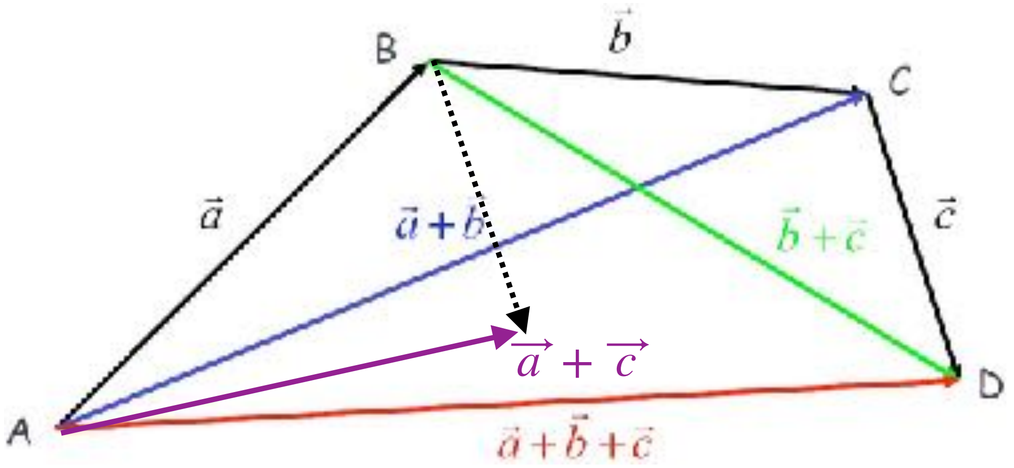
- La somma gode della proprietà commutativa:



$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

- È un risultato sperimentale, non teorico, valido nel nostro ambiente. Ci sta dicendo che lo spazio fisico in cui viviamo è in buona approssimazione uno spazio euclideo.

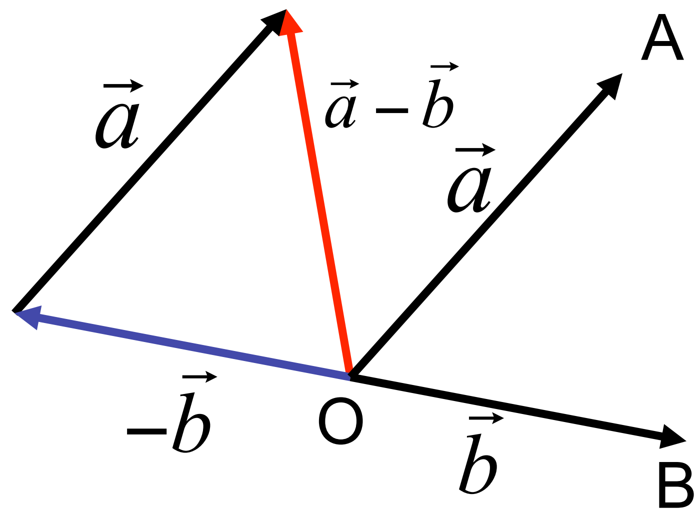
Proprietà associativa della somma



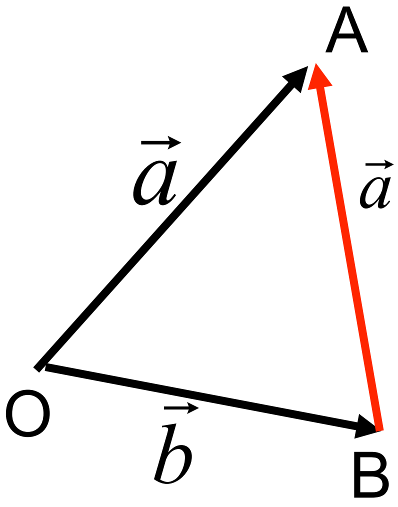
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\vec{b}$$

Differenza tra vettori

- Definizione: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

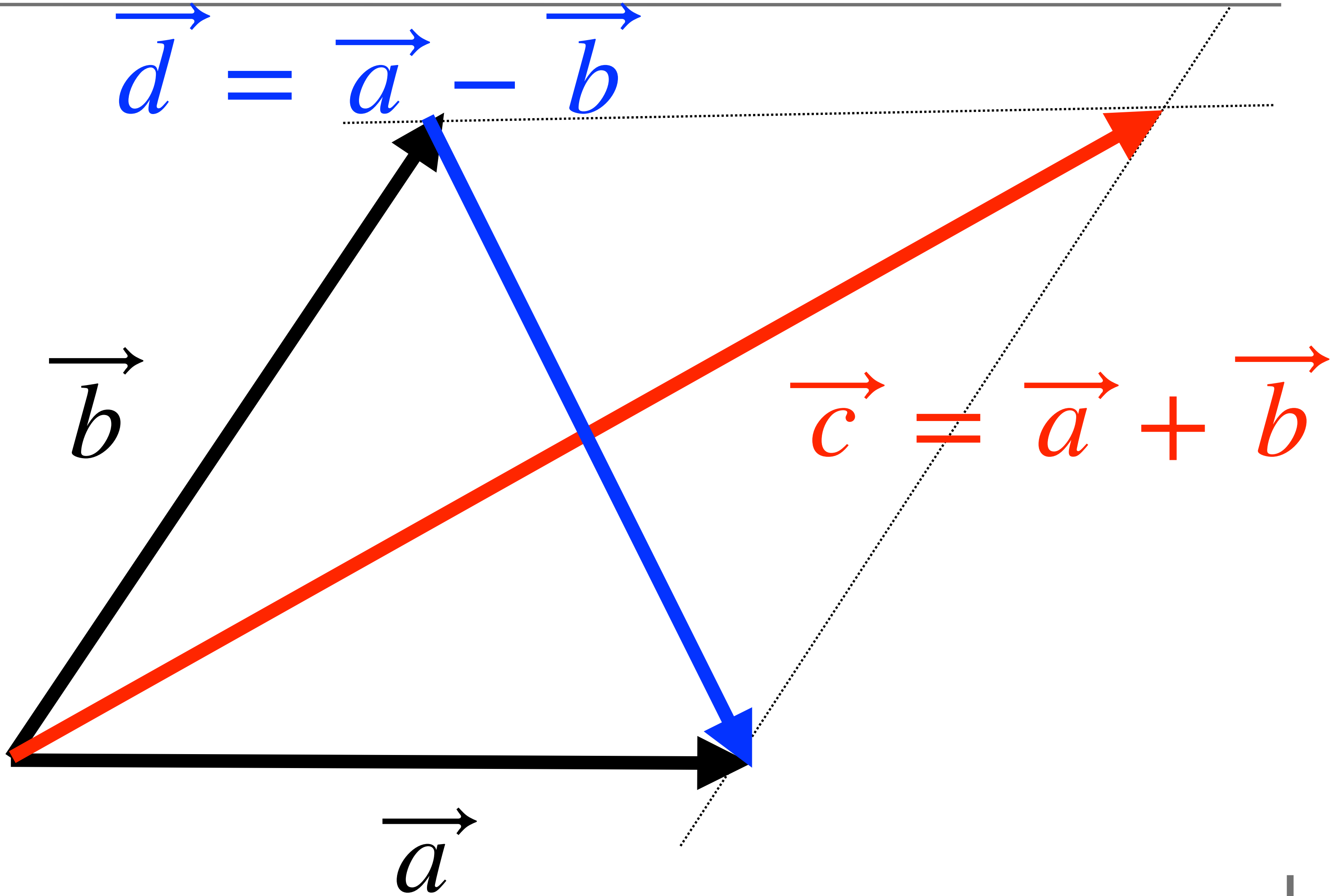


$-\vec{b}$ vettore opposto (stesso modulo e direzione, ma con verso opposto)



$$(A - O) - (B - O) = (A - B)$$

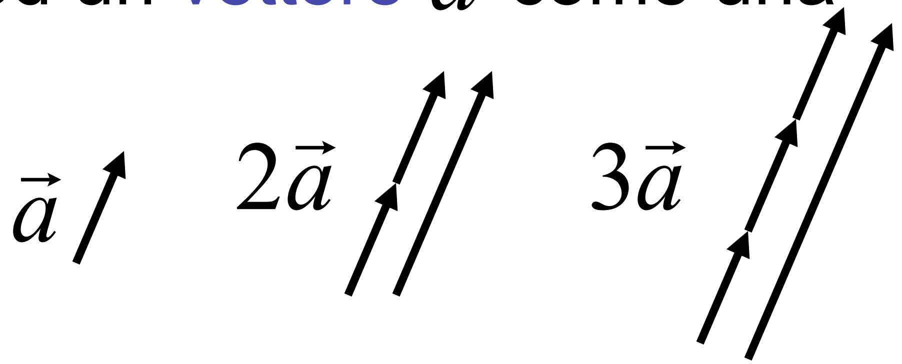
Somma e differenza



Moltiplicazione per uno scalare

- Si può definire come moltiplicazione tra un numero naturale n ed un vettore $\vec{a}$ come una somma ripetuta:

$$\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n \text{ volte}} = n\vec{a}$$



- Generalizzando, si può definire come moltiplicazione tra un numero reale λ ed un vettore $\vec{a}$ come vettore di direzione pari ad $\vec{a}$ modulo pari a $|\lambda||\vec{a}|$ e verso concorde con $\vec{a}$ se $\lambda > 0$, verso opposto se $\lambda < 0$

$\lambda\vec{a}$ È un vettore!

Moltiplicazione per scalare: proprietà

- La moltiplicazione per uno scalare gode delle proprietà commutative, associative e distributive sia rispetto agli scalari che ai vettori:

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
$$\forall \vec{a}, \vec{b}$$

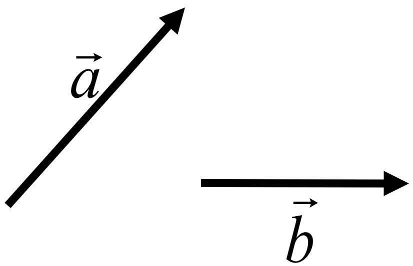
$$\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$$
$$\mu(\lambda \vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$
$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

- Inoltre:

$$\text{se } \lambda = 0, \ \lambda \vec{a} \equiv \vec{0}$$
$$\text{se } \lambda = -1, \ \lambda \vec{a} \equiv -\vec{a}$$
$$\text{se } \lambda = 1/|\vec{a}|, \ |\lambda \vec{a}| \equiv 1 \Rightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \hat{a} \text{ è un versore} = \text{vers } \vec{a}$$

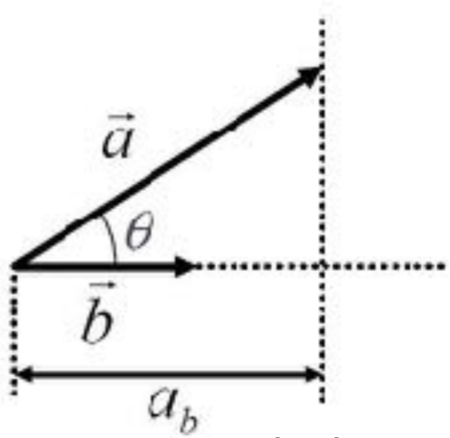
Prodotto scalare

Associa a due vettori arbitrari uno scalare:

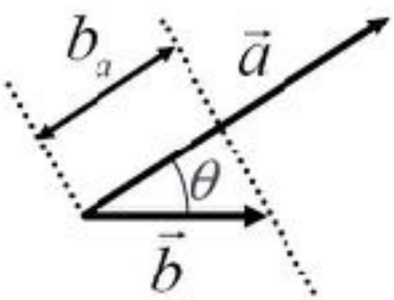


$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta}$$

θ



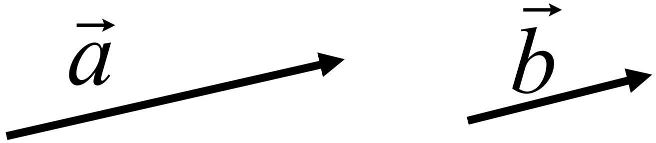
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_b|\vec{b}|$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|b_a$$

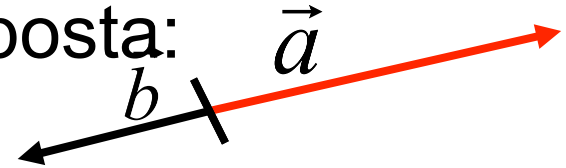
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta$: casi notevoli

- Vettori paralleli:



$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|>0$$

- Vettori in direzione opposta:



$$\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|<0$$

- Vettori ortogonali:

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \cos\theta = 0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

- La componente:
  - Sia $\hat{u}$ un versore

$$\vec{a}\cdot\hat{u}=|\vec{a}||\hat{u}|\cos\vartheta=$$
$$=|\vec{a}|\cos\vartheta=a_u$$

Prodotto scalare: proprietà

- Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa, distributiva sulla somma:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

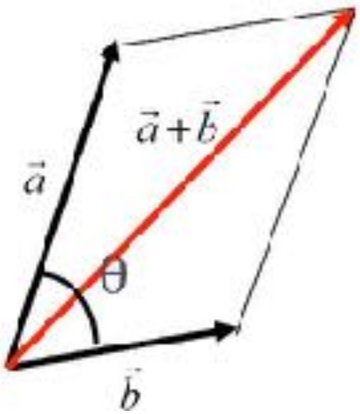
$$\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\lambda \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda \vec{b}\right)$$

- Quadrato di un vettore:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2 = \left|\vec{a}\right|^2} \qquad \boxed{\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}}$$

DEFINIZIONE DI MODULO!

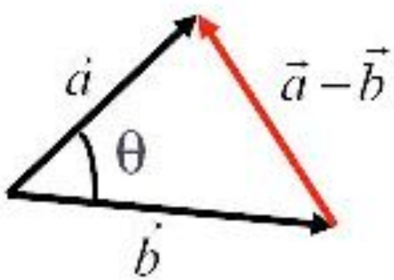
Moduli di somme e di differenze



$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}}$$

$$\boxed{\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\vartheta}}$$



$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)} =$$

$$= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}}$$

$$\boxed{\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta}}$$

Prodotto vettore

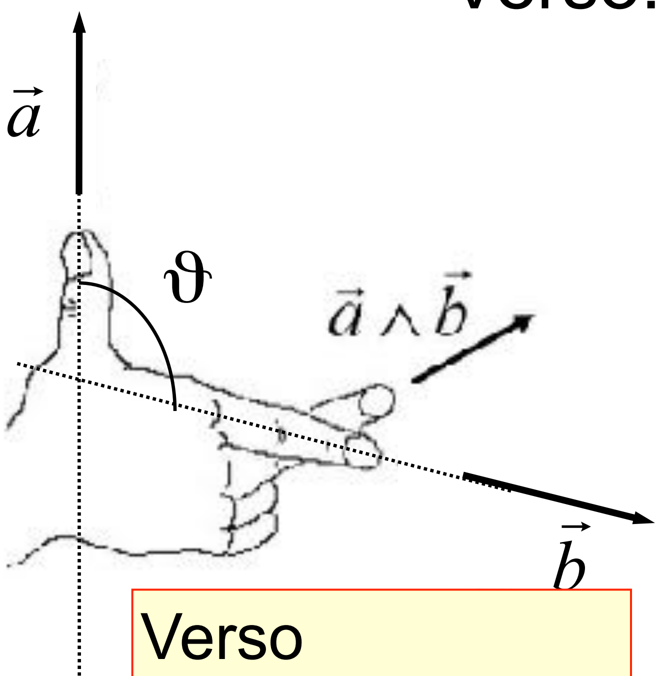
- Associa a due vettori un terzo vettore:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$$

Modulo $|\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab|\sin\vartheta|$

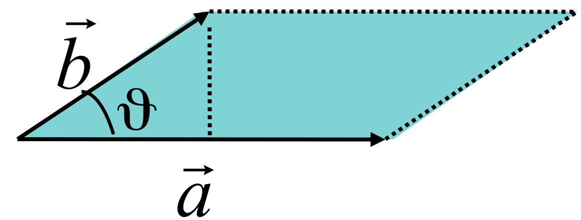
Direzione $\perp$ piano dei vettori $\vec{a}, \vec{b}$

Verso: regola della mano destra



Verso convenzionale

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab\sin\theta$$



Modulo: area del parallelogramma

Prodotto vettore

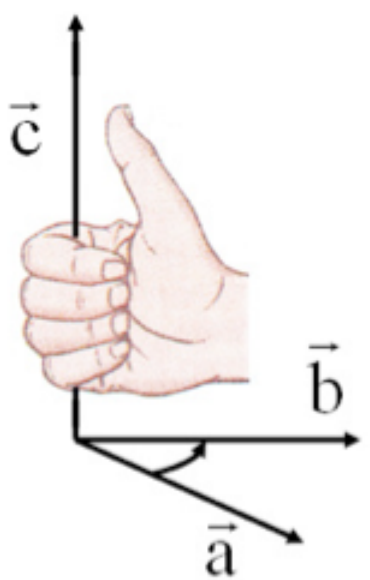
- Associa a due vettori un terzo vettore:

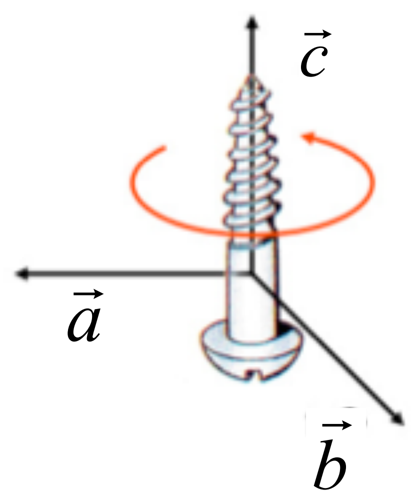
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$$

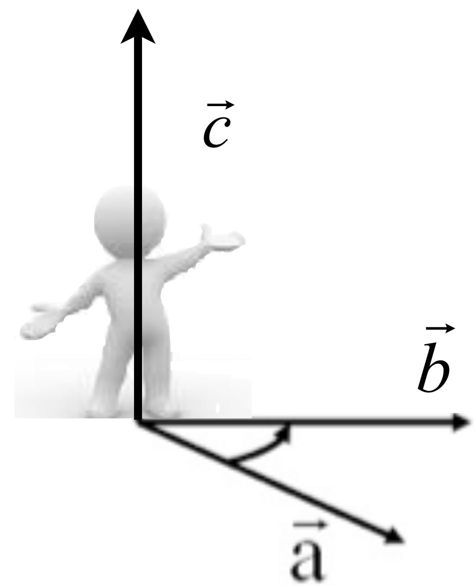
Modulo $\quad |\vec{c}| = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab|\sin\vartheta|$

Direzione $\perp$ piano dei vettori $\quad \vec{a}, \vec{b}$

Verso: regola della mano destra







Prodotto vettore: proprietà

- Il prodotto vettore (o vettoriale) gode della proprietà anticommutativa e distributiva sulla somma:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$$

$$\lambda\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \left(\lambda \vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \left(\lambda \vec{b}\right)$$

- Il prodotto vettore non gode della proprietà associativa:

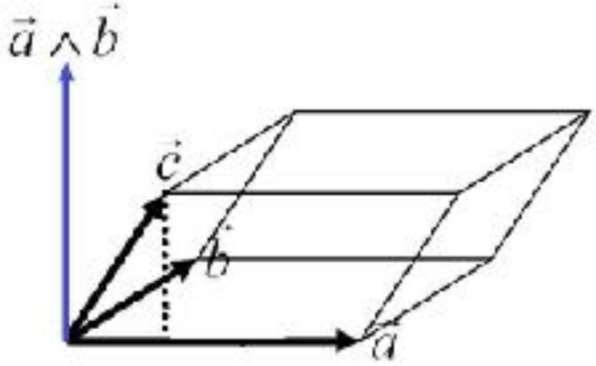
$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)$$

- Caso notevole:

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad \text{poichè} \quad \left|\vec{a} \wedge \vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right| \sin 0 = 0$$

Doppio prodotto misto

$$V = \vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$



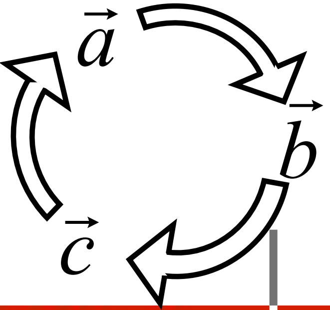
$$B = \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$$

$$h = \left|\vec{c} \cdot vers\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\right|$$

$$V = Bh = \left|\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| vers\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

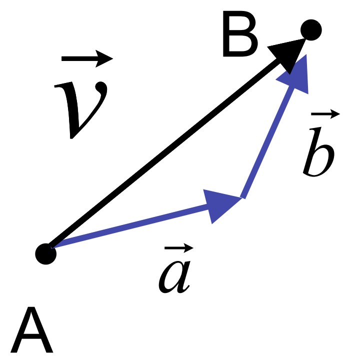
Proprietà:

$$\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \wedge \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \wedge \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c} \end{cases}$$



Sistemi di riferimento

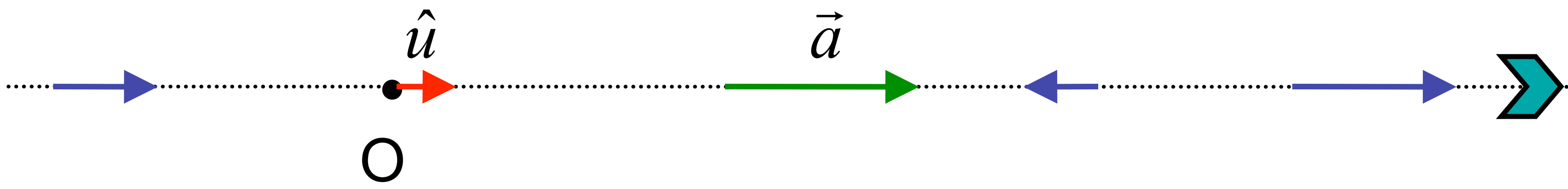
- I vettori sono entità astratte, indipendenti da come sono rappresentate.



$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$$

- Per convenienza pratica i vettori si descrivono bene utilizzando il concetto di SISTEMA DI RIFERIMENTO, costituito in estrema sintesi da un punto privilegiato detto origine e da un insieme di vettori campione (vettori di base)

Spazio unidimensionale



- Ogni vettore può essere scritto come:

$$\vec{a} = \lambda\hat{u} \quad \Rightarrow \vec{a}\cdot\hat{u} = \lambda\hat{u}\cdot\hat{u} \Rightarrow a_u = \lambda 1 = \lambda$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_u\hat{u} \;\; \text{con} \;\; a_u = \vec{a}\cdot\hat{u}$$

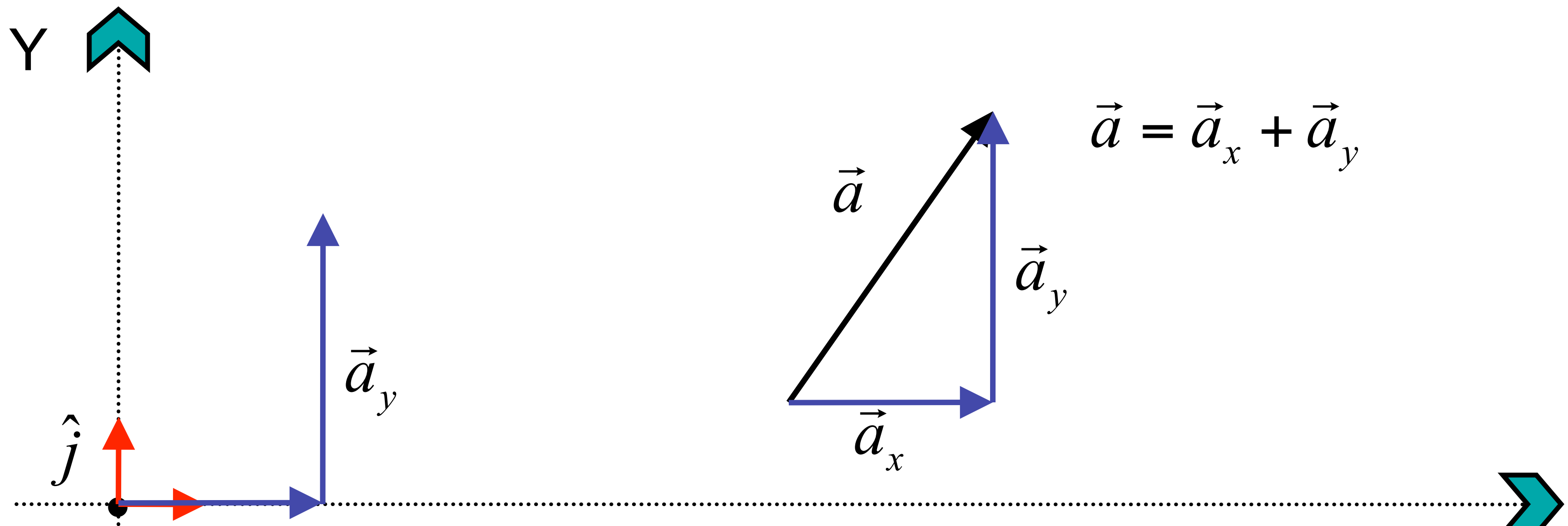
In uno spazio unidimensionale ogni vettore può essere espresso come uno scalare (la componente) moltiplicato il versore dell’asse (sempre lo stesso).

$$\vec{a}+\vec{b} = a_u\hat{u} + b_u\hat{u} = \left(a_u + b_u\right)\hat{u}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_u\hat{u}\cdot a_u\hat{u}} = \sqrt{a_u^2(\hat{u}\cdot\hat{u})} = \left|a_u\right|$$

Spazio bidimensionale: vettori nel piano

- Scelgo 2 assi ortogonali x,y: $\hat{i}, \hat{j} \qquad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0$



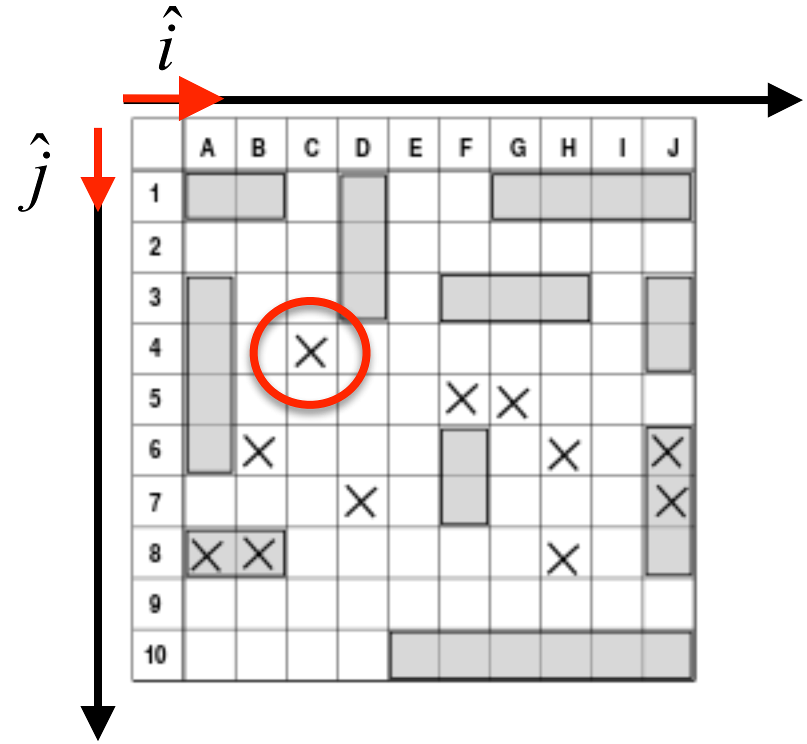
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{i} = \left(a_x \hat{i} + a_y \hat{j}\right) \cdot \hat{i} = a_x \hat{i} \cdot \hat{i} + a_y \hat{j} \cdot \hat{i} = a_x 1 + a_y 0 = a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \vec{a} \cdot \hat{i}$$

$$\vec{a} \cdot \hat{j} = \left(a_x \hat{i} + a_y \hat{j}\right) \cdot \hat{j} = a_x \hat{i} \cdot \hat{j} + a_y \hat{j} \cdot \hat{j} = a_x 0 + a_y 1 = a_y \quad \Rightarrow \quad a_y = \vec{a} \cdot \hat{j}$$

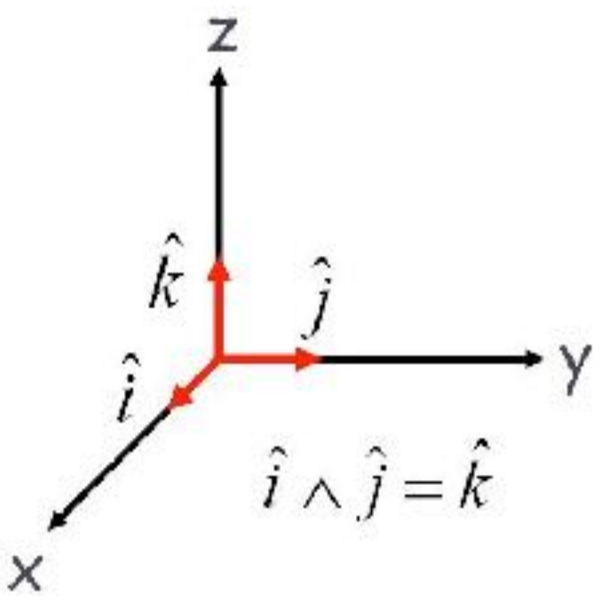
Esempio di spazio bi-dimensionale

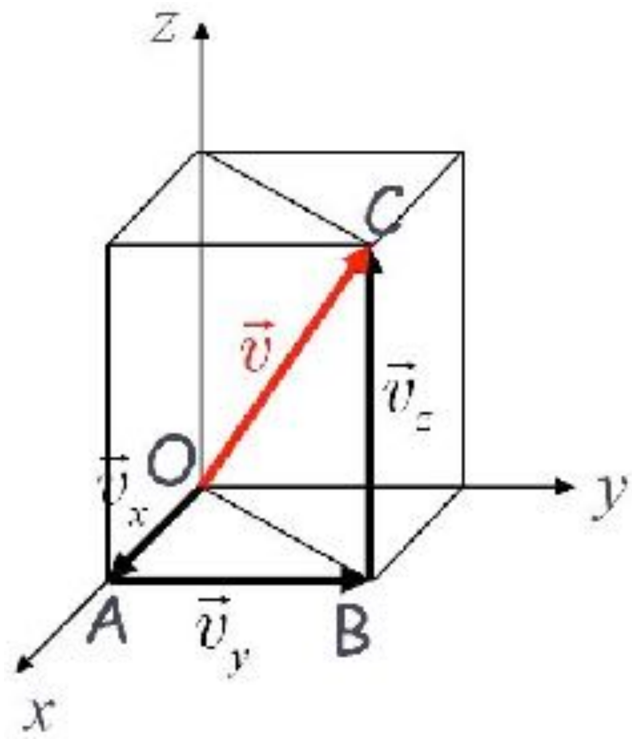


(C; 4)

Spazio tridimensionale

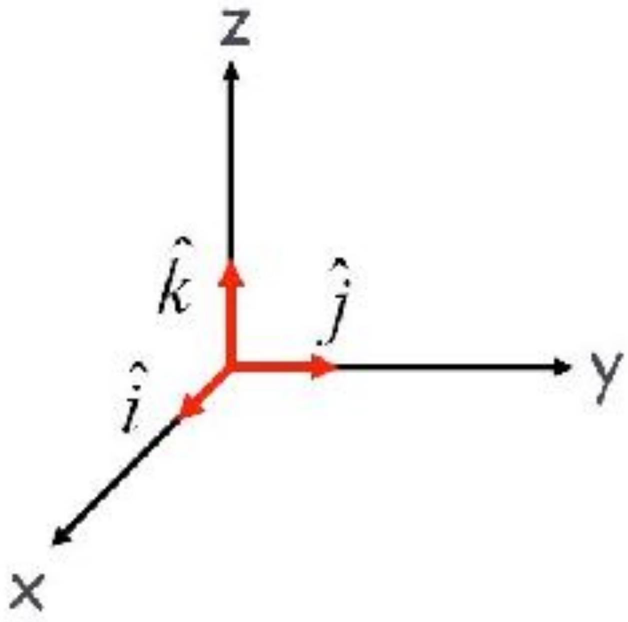
- Scelgo 3 assi ortogonali x,y,z: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$





$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Vettori di base nello spazio



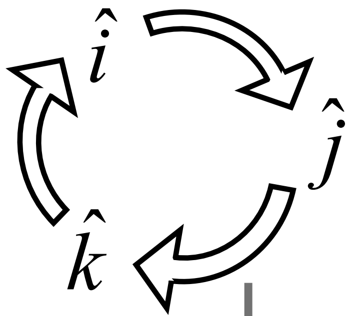
$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0$$

$$\hat{i}\wedge\hat{i}=\hat{j}\wedge\hat{j}=\hat{k}\wedge\hat{k}=\vec{0}$$

$$\hat{i}\wedge\hat{j}=\hat{k};\quad \hat{j}\wedge\hat{k}=\hat{i};\quad \hat{k}\wedge\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{j}\wedge\hat{i}=-\hat{k};\quad \hat{k}\wedge\hat{j}=-\hat{i};\quad \hat{i}\wedge\hat{k}=-\hat{j}$$



Operazioni nella rappresentazione cartesiana

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$

$$= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}$$

$$\boxed{\lambda\vec{a} = \vec{b}}$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) = (\lambda a_x)\hat{i} + (\lambda a_y)\hat{j} + (\lambda a_z)\hat{k} = (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) =$$

$$= a_x b_x \hat{i}\cdot\hat{i} + \cancel{a_x b_y \hat{i}\cdot\hat{j}} + \cancel{a_x b_z \hat{i}\cdot\hat{k}} + \cancel{a_y b_x \hat{j}\cdot\hat{i}} + a_y b_y \hat{j}\cdot\hat{j} + \cancel{a_y b_z \hat{j}\cdot\hat{k}} +$$

$$+ \cancel{a_z b_x \hat{k}\cdot\hat{i}} + \cancel{a_z b_y \hat{k}\cdot\hat{j}} + a_z b_z \hat{k}\cdot\hat{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = c$$

Prodotto vettoriale

$$\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right) \wedge \left(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}\right) =$$

$$= a_x b_x \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{i}}_{0} + a_x b_y \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{j}}_{\hat{k}} + a_x b_z \underbrace{\hat{i} \wedge \hat{k}}_{-\hat{j}} + a_y b_x \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{i}}_{-\hat{k}} + a_y b_y \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{j}}_{0} + a_y b_z \underbrace{\hat{j} \wedge \hat{k}}_{\hat{i}} +$$

$$+ a_z b_x \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{i}}_{\hat{j}} + a_z b_y \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{j}}_{-\hat{i}} + a_z b_z \underbrace{\hat{k} \wedge \hat{k}}_{0} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{matrix} +a_y b_z \hat{i} - a_z b_y \hat{i} + \\ +a_z b_x \hat{j} - a_x b_z \hat{j} + \\ +a_x b_y \hat{k} - a_y b_x \hat{k} \end{matrix}$$

Esercizio A

- Siano $\vec{a} = 2\hat{i} - 1\hat{j} + 3\hat{k}$ $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

1. Trovare i moduli
2. Trovare il vettore somma ed il vettore differenza
3. Calcolare $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$
4. Calcolare $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b}$
5. Trovare l'angolo compreso

Esercizio

Nel piano XY, la componente x di un vettore **v** vale -25, quella y +40. Quanto vale il modulo del vettore? Quanto vale l'angolo compreso fra **v** e l'asse delle ascisse?

Esercizio 1

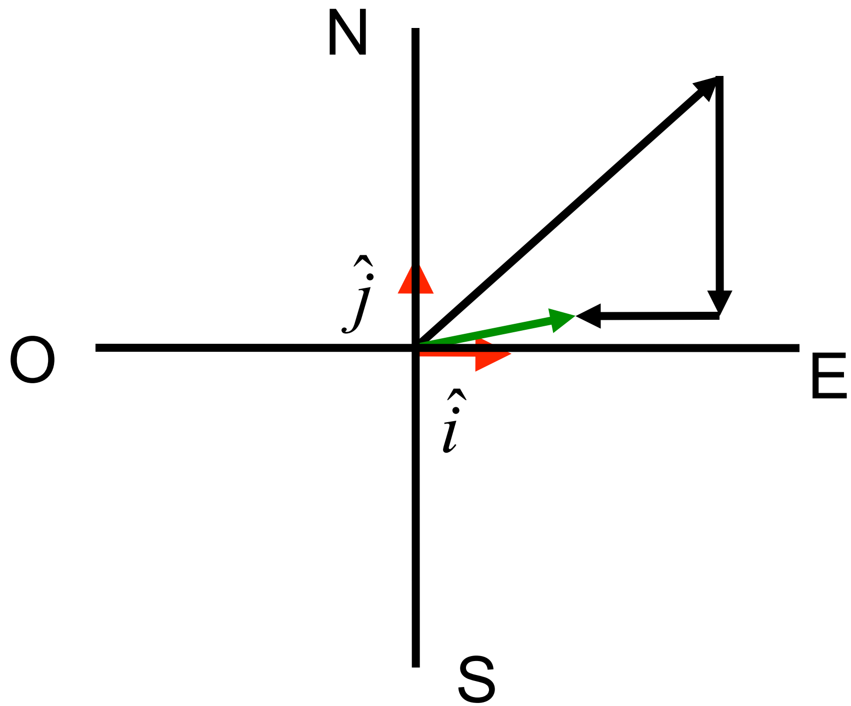
- Sia $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \qquad \vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

1. Trovare i moduli
2. Trovare l'angolo compreso
3. Trovare il vettore somma ed il vettore differenza
4. Trovare un vettore perpendicolare ad entrambi

1. $|\vec{a}| = \sqrt{14} \quad |\vec{b}| = 3$
2. $\cos\theta = -0.5345... \quad \theta = 122°$
3. $\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} \quad \vec{a} - \vec{b} = 5\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$
4. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -5\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$

Esercizio 3

- Una barca naviga in direzione Nord-Est per 15 km, successivamente vira in direzione Sud e prosegue per 10 km, quindi vira nuovamente in direzione Ovest e percorre altri 5 km. Trovare la **distanza percorsa** e la **distanza dal punto di partenza**.



$$\boxed{d = 15 + 10 + 5 = 30km}$$

$$\vec{a} = 15\underbrace{\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{\imath} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)}_{\hat{u} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{j}}$$

$$\vec{b} = -10\hat{j}$$

$$\vec{c} = -5\hat{\imath}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\frac{15}{\sqrt{2}} - 5\right)\hat{\imath} + \left(\frac{15}{\sqrt{2}} - 10\right)\hat{j}$$

$$\boxed{\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = 5,64km}$$

Esercizio

Nella somma **a+b = c** il vettore **a** ha modulo 12 e forma un angolo di 40° rispetto al semiasse positivo delle ascisse, mentre il vettore c ha modulo 15 ed è diretto con un angolo di 20° in senso antiorario rispetto al semiasse negativo delle ascisse. Calcolare il modulo e la direzione (rispetto al semiasse positivo delle ascisse) di **b**.

Esercizio

Dati nel piano cartesiano i punti A = (1, 1), B = (3, 4) e C = (5, 2), determinare il valore dell'angolo formato dai segmenti CA e CB e l'area del triangolo ABC.

Esercizio

Determinare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori

$$\vec{a} = 2\hat{\imath} - \hat{j} + \hat{k}, \quad \vec{b} = -3\hat{j}, \quad \vec{c} = -\hat{\imath} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Lorenzo Rinaldi

Dipartimento di Fisica e Astronomia

lorenzo.rinaldi@unibo.it

www.unibo.it/docenti/lorenzo.rinaldi