Algoritmi e Strutture di Dati

I grafi

rappresentati con matrici e liste di adiacenza

m.patrignani

Nota di copyright

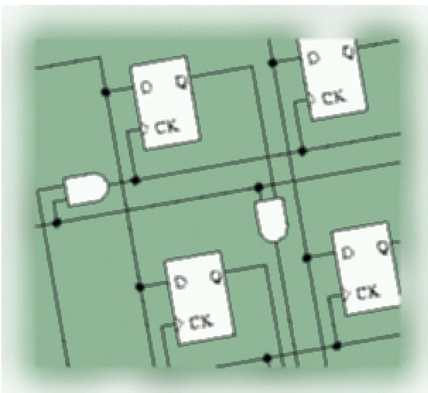
- queste slides sono protette dalle leggi sul copyright
- il titolo ed il copyright relativi alle slides (inclusi, ma non limitatamente, immagini, foto, animazioni, video, audio, musica e testo) sono di proprietà degli autori indicati sulla prima pagina
- le slides possono essere riprodotte ed utilizzate liberamente, non a fini di lucro, da università e scuole pubbliche e da istituti pubblici di ricerca
- ogni altro uso o riproduzione è vietata, se non esplicitamente autorizzata per iscritto, a priori, da parte degli autori
- gli autori non si assumono nessuna responsabilità per il contenuto delle slides, che sono comunque soggette a cambiamento
- questa nota di copyright non deve essere mai rimossa e deve essere riportata anche in casi di uso parziale

Contenuto

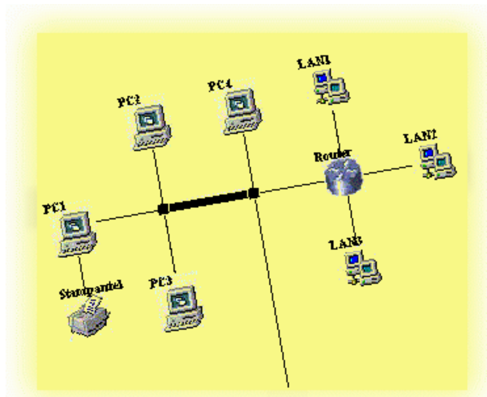
- Definizione di grafi diretti e indiretti
- Rappresentazione di grafi tramite:
  - matrici di adiacenza
  - liste di adiacenza
- Esercizi su grafi

Grafi nelle applicazioni

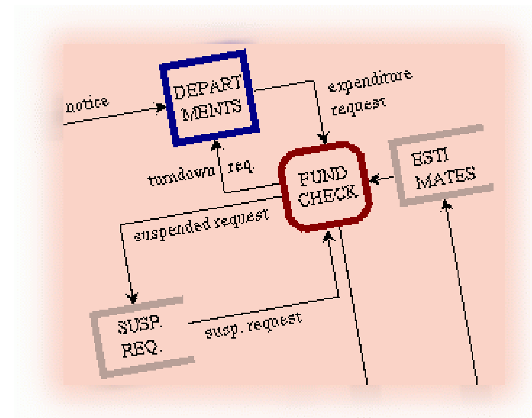
- Molti diagrammi utilizzati in ingegneria sono dei grafi



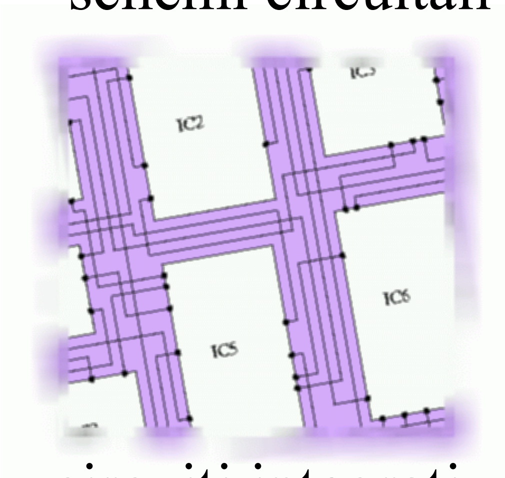
schemi circuitali



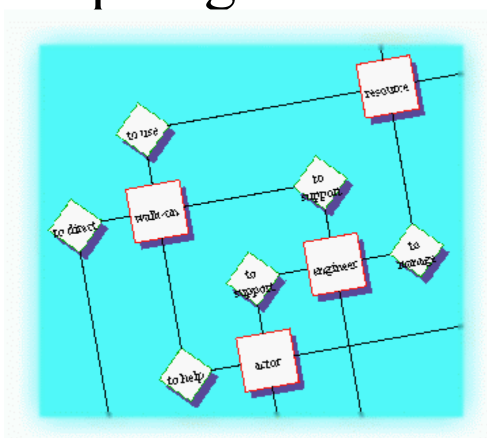
topologie di rete



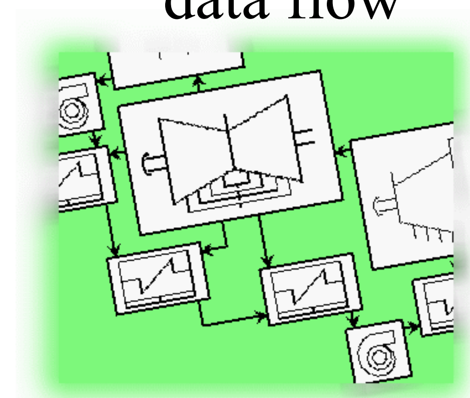
data flow



circuiti integrati



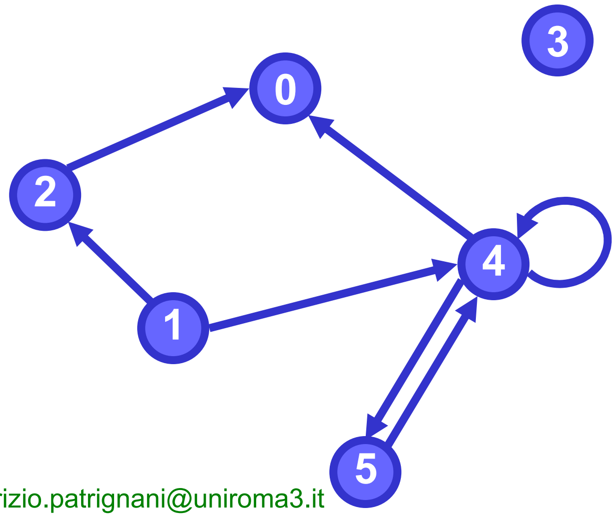
diagrammi ER


impianti industriali

Grafi diretti

- Un *grafo orientato* (o *diretto*) $G=(V,E)$ è costituito da un insieme di nodi V e un insieme di archi E
  - ogni arco è una coppia ordinata di nodi (u,v)
- Denotiamo con n il numero dei nodi ($n = |V|$) e con m il numero degli archi ($m = |E|$)
  - si ha sempre $m \in O(n^2)$
- Esempio:

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{(2,0)\ (1,2)\ (4,0)\ (4,4)\ (4,5)\ (5,4)\ (1,4)\}$$

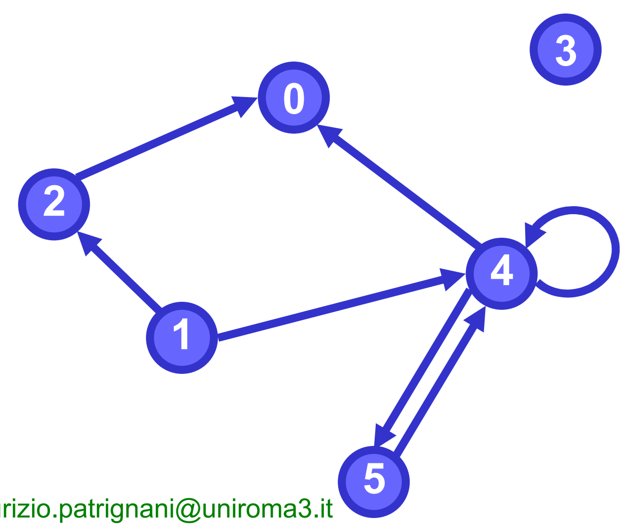


Grafi diretti e relazioni

- La versatilità dei grafi diretti deriva dal fatto che essi corrispondono a relazioni binarie
- Per esempio
  - contatti tra utenti di una rete di telefonia
  - dipendenze tra invocazioni di metodi in un software
  - partecipazioni di aziende nel capitale di altre
  - rapporti di eredità
  - rapporti di precedenza tra attività
  - reti sociali
  - …

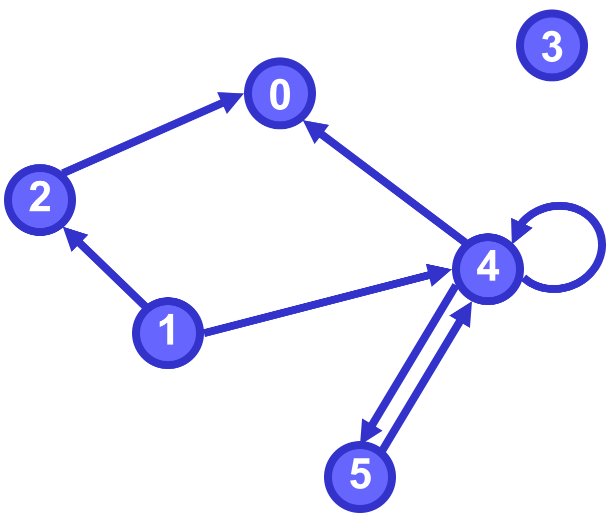
Archi uscenti ed entranti

- Dato un nodo u
  - un suo *arco uscente* è un arco $(u,v) \in E$
  - un suo *arco entrante* è un arco $(v,u) \in E$
  - un *nodo adiacente* è un nodo v per cui esiste $(u,v) \in E$
  - il suo *grado di uscita* è il numero dei suoi archi uscenti
  - il suo *grado di ingresso* è il numero dei suoi archi entranti
- Un nodo u è detto…
  - *sorgente* se non ha archi entranti
  - *pozzo* se non ha archi uscenti



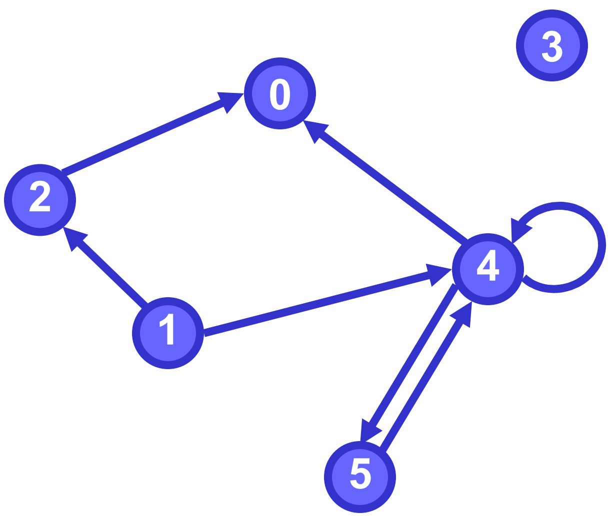
Cammini

- Un *cammino* (è sottinteso che sia diretto) è una sequenza di nodi u_1, u_2, …, u_k tali che per i=1,2, …,k-1 esistono gli archi (u_i,u_{i+1})
- Il cammino è detto *semplice* se tutti i suoi nodi sono distinti
- Il numero di archi è la *lunghezza* del cammino



Cicli

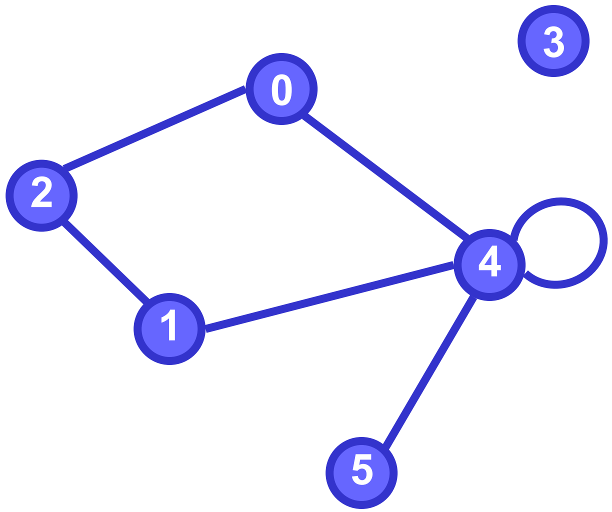
- Un *ciclo* è un cammino (non semplice) in cui il primo e l'ultimo nodo coincidono
- Un ciclo è detto *semplice* se il primo e l'ultimo nodo sono gli unici nodi che coincidono
- Un *cappio* (o *loop*) è un ciclo di un solo arco (e un solo nodo)
- Un *grafo semplice* è un grafo senza cappi
- Un grafo diretto è *aciclico* se non ha cicli (diretti)



Grafi non orientati

- In un grafo *non orientato* (o *non diretto*) G=(V,E) l'insieme degli archi E è un insieme di coppie non ordinate (u,v)
  - (u,v) e (v,u) rappresentano lo stesso arco
- Graficamente si conviene di rappresentare una sola linea tra i nodi u e v

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$E = \{(0,2)\ (0,4)\ (1,2)\ (1,4)\ (4,4)\ (4,5)\}$

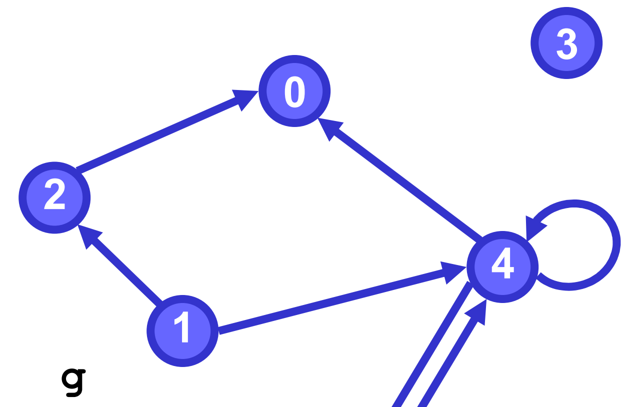


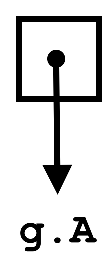
Il tipo astratto di dato grafo

- Domini
  - il dominio di interesse è l'insieme G dei grafi (diretti o non diretti)
  - dominio di supporto: l'insieme degli iteratori NI per i nodi
  - dominio di supporto: l'insieme degli iteratori AI per gli archi
  - dominio di supporto: i booleani B = {true, false}
- Costanti
  - il grafo vuoto
  - gli iteratori non validi per nodi e archi
- Operazioni
  - trova il primo nodo del grafo: FIRST_NODE: $G \rightarrow NI$
  - trova il prossimo nodo: NEXT_NODE: $G \times NI \rightarrow NI$
  - trova il primo arco di un nodo: FIRST_EDGE: $G \times NI \rightarrow AI$
  - trova il nodo adiacente tramite l'arco: ADJ_NODE: $G \times N1 \times AI \rightarrow N1$
  - trova il prossimo arco: NEXT_EDGE: $G \times N1 \times AI \rightarrow AI$
  - determina se due nodi sono adiacenti ARE_ADJ: $G \times N1 \times NI \rightarrow B$
  - aggiunge un nodo al grafo: ADD_NODE: $G \rightarrow NI$
  - aggiunge un arco tra due nodi: ADD_EDGE: $G \times N1 \times NI \rightarrow AI$

Realizzazione mediante matrice di adiacenza

- Rappresentazione preferita per grafi densi
  - cioè per i quali il numero degli archi m è prossimo ad n^2
- Consente di sapere rapidamente se c'è un arco tra due nodi
- Usa una matrice (o un array di array) in cui l'elemento in posizione (i,j) segnala se esiste l'arco (i,j)
- Occupa $\Theta(n^2)$ spazio

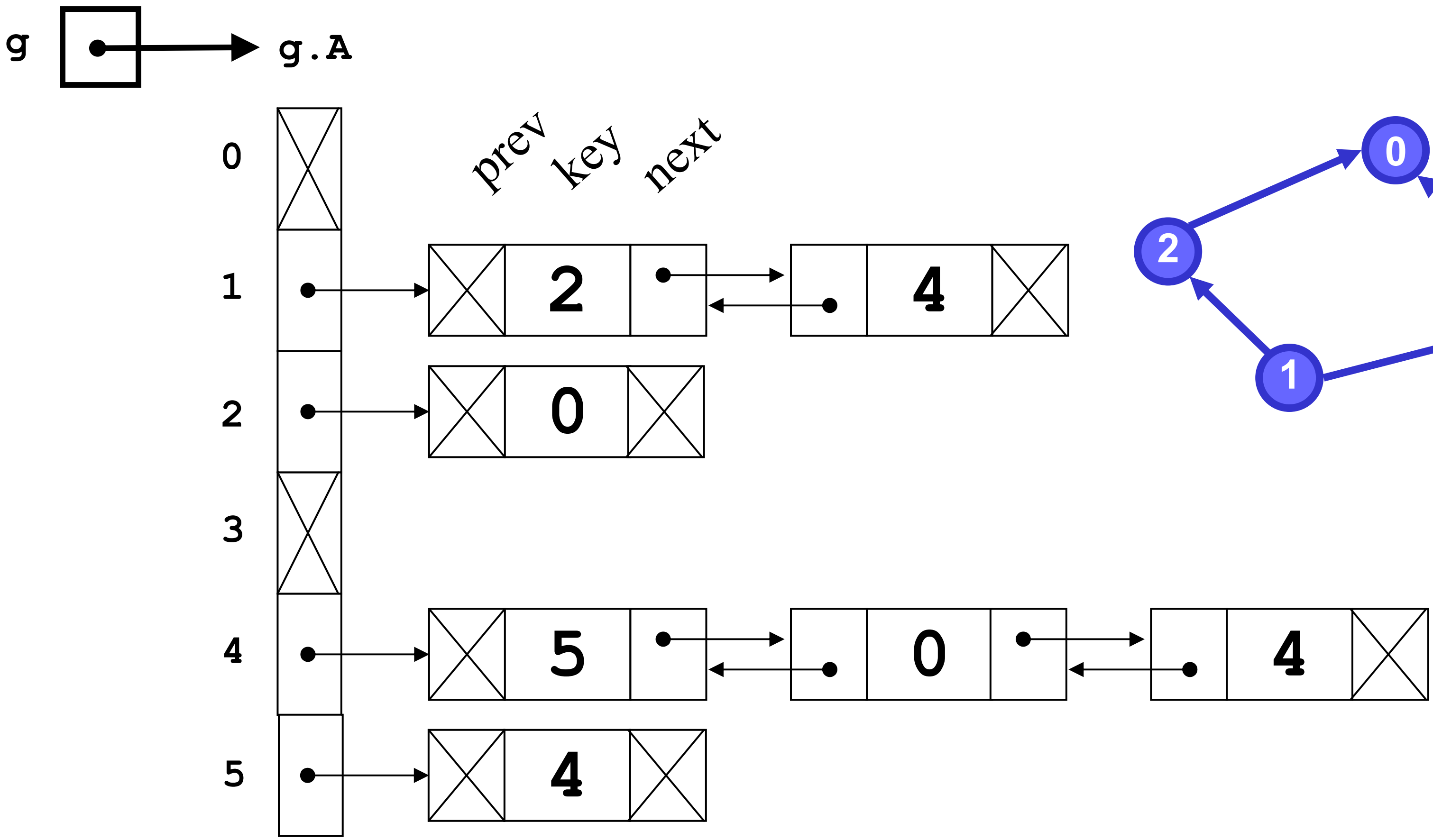


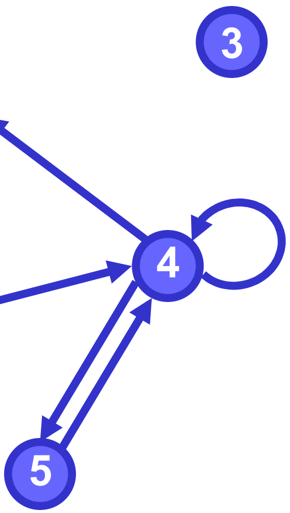


0	1	2	3	4	5	
0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	0	**1**	0	1
1	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	3
1	0	0	0	**1**	**1**	4
0	0	0	0	**1**	0	5

Realizzazione tramite liste di adiacenza

- Si fa uso di un array *A* di liste doppiamente concatenate
  - generalmente si mette nell'array direttamente il riferimento al primo elemento della lista





Rappresentazione dei grafi: liste di adiacenza

- Questa rappresentazione occupa spazio O(n) + O(m)
  - nel caso peggiore, siccome m = O(n^2) utilizza uno spazio O(n^2) come le rappresentazioni con matrici di adiacenza
  - in numerose applicazioni, però, $m \in$ O(n)
    - in questo caso le rappresentazioni con liste di adiacenza sono preferibili
- La lista di adiacenza di un nodo può essere lunga O(n)
- Percorrendo tutte le liste di adiacenza di tutti i nodi si impiega un tempo O(n) + O(m)
  - che diventa O(n^2) se il grafo è denso

Realizzazioni del tipo astratto di dato grafo

- Matrice di adiacenza
  - l'iteratore per un nodo è un intero
    - è valido se è nell'intervallo legittimo per l'array g.A
  - l'iteratore per un arco uscente da un nodo è ancora un intero
    - è valido se è nell'intervallo legittimo e se la cella corrispondente dell'array g.A contiene un uno
  - si riuncia a realizzare efficientemente l'operazione di aggiunta di un nodo
- Liste di adiacenza
  - l'iteratore per un nodo è un intero
    - è valido se è nell'intervallo legittimo per l'array g.A
  - l'iteratore per un arco è un riferimento ad un elemento di una lista
    - l'iteratore non valido è NULL
  - anche in questo caso l'operazione di aggiunta di un nodo richiede una gestione non semplice e non sempre efficiente

Rappresentazione di grafi non orientati

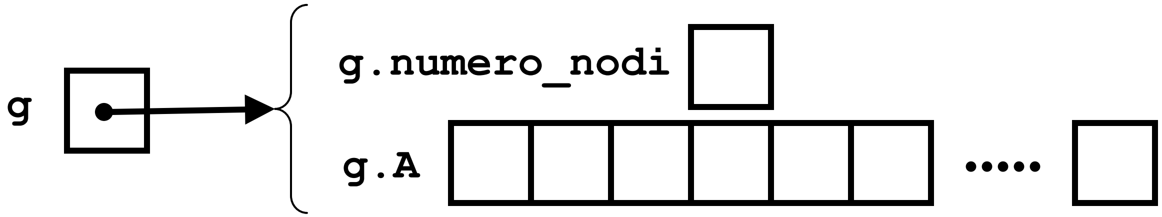
- Per ogni arco non orientato (u,v) vengono rappresentati i due archi orientati (u,v) e (v,u)
- Nel caso di matrice di adiacenza
  - la matrice è simmetrica
- Nel caso di liste di adiacenza
  - se la lista del nodo i contiene il nodo j, allora la lista del nodo j contiene il nodo i

Grafi pesati sugli archi

- Sono grafi in cui ad ogni arco e è associato un peso w_e
- Nella rapprentazione tramite matrici di adiacenza si usano i valori dei pesi al posto degli uni:
  - si assume che non esistano archi con peso zero e si usa lo zero per rappresentare l'assenza dell'arco
  - si usa w_e per rappresentare un arco di peso w_e
- Nella rappresentazione tramite liste di adiacenza
  - ogni elemento della lista ha, oltre all'indice del nodo adiacente, anche un attributo weight con valore w_e

Realizzazioni in linguaggio C

- La rappresentazione dei grafi in linguaggio C segue gli stessi paradigmi della rappresentazione in pseudocodifica
  - tuttavia, poiché gli array in linguaggio C non hanno un campo “length” che ne riveli la lunghezza occorre aggiungere un campo “numero_nodi” ad entrambe le rappresentazioni



Esercizi su matrici di adiacenza

- Dato un grafo g rappresentato tramite una matrice di adiacenza $g.A$ (un array di array)
  1. scrivi una procedura `LISTE`(g) che ne restituisca la sua rappresentazione mediante un array di liste di adiacenza doppiamente concatenate
  2. scrivi una procedura `GRADO_USCITA`(g,u) che calcoli il grado di uscita del nodo con indice u
  3. scrivi una procedura `GRADO_INGRESSO`(g,u) per il calcolo del grado di ingresso del nodo con indice u
  4. scrivi una procedura `GRADO_USCITA_MEDIO`(g) per il calcolo del grado di uscita medio dei nodi del grafo
  5. scrivi una procedura `GRAFO_SEMPLICE`(g) che verifica se il grafo è semplice (privo di cappi)
- Discuti la complessità degli algoritmi che hai proposto

Esercizi su liste di adiacenza 1/3

- Dato un grafo diretto *g* rappresentato tramite un array *g.A* di liste di adiacenza doppiamente concatenate

6. scrivi una procedura `MATRICE`(*g*) che ne restituisca la sua rappresentazione mediante una matrice di adiacenza
7. scrivi una procedura `GRADO_USCITA`(*g*,*u*) che calcoli il grado di uscita del nodo con indice *u*
8. scrivi una procedura `GRADO_INGRESSO`(*g*,*u*) per il calcolo del grado di ingresso del nodo con indice *u*
9. scrivi una procedura `GRADO_USCITA_MEDIO`(*g*) per il calcolo del grado di uscita medio dei nodi del grafo
10. scrivi una procedura `GRAFO_SEMPLICE`(*g*) che verifica se il grafo è semplice (privo di cappi)

- Discuti la complessità degli algoritmi che hai proposto

Esercizi su liste di adiacenza 2/3

- Dato un grafo diretto *g* rappresentato tramite un array *g.A* di liste di adiacenza doppiamente concatenate

11. scrivi lo pseudocodice della funzione `VERIFICA_ARCO`(*g*,*u*,*v*) che restituisce **true** se esiste l'arco che va dal nodo identificato dall'indice *u* al nodo indentificato dall'indice *v* e **false** altrimenti
12. scrivi lo pseudocodice della funzione `VERIFICA_NON_ORIENTATO`(*g*) che restituisce **true** se il grafo presenta un arco (*u*,*v*) per ogni arco (*v*,*u*) e **false** altrimenti
    - puoi utilizzare la funzione `VERIFICA_ARCO`(*g*,*u*,*v*)
13. scrivi lo pseudocodice della funzione `VERIFICA_POZZO`(*g*,*u*) che restituisce **true** se il nodo identificato dall'indice *u* non ha archi uscenti, **false** altrimenti
14. scrivi lo pseudocodice della funzione `VERIFICA_SORGENTE`(*g*,*u*) che restituisce **true** se il nodo identificato dall'indice *u* non ha archi entranti, **false** altrimenti

- Discuti la complessità degli algoritmi che hai proposto

Esercizi su liste di adiacenza 3/3

- Dati due grafi *g1* e *g2* rappresentati tramite array di liste di adiacenza doppiamente concatenate

15. scrivi lo pseudocodice della funzione `VERIFICA_UNIONE`(*g1*,*g2*) che verifica che tra ogni possibile coppia di nodi ci sia un arco in *g1* o in *g2* (o in entrambi)
    - puoi supporre che *g1* e *g2* abbiano lo stesso numero di nodi (*g1.A.length=g2.A.length*)
16. scrivi lo pseudocodice della funzione `VERIFICA_POZZI_E_SORGENTI`(*g1*,g*2*) che restituisce **true** se tutti i pozzi di *g1* sono sorgenti di *g2* e tutte le sorgenti di *g1* sono pozzi di *g2* e restituisce **false** altrimenti
    - puoi suppore che *g1* e *g2* abbiano lo stesso numero di nodi
    - puoi utilizzare le funzioni `VERIFICA_POZZO`(*g*,*u*) e `VERIFICA_SORGENTE`(*g*,*u*)

- Discuti la complessità degli algoritmi che hai proposto

