L18: Diagonalizzazione (32)

<u>Argomenti lezione</u>:

- Introduzione
- Diagonalizzazione

Introduzione

Obiettivo: Determiniamo un criterio per stabilire se un endomorfismo (o una matrice) è diagonalizzabile.

In caso affermativo, descriviamo un procedimento per trovare una base formata da autovettori dell'endomorfismo (o della matrice).

Teorema: Un endomorfismo f di uno spazio vett. V di dim. finita è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata da autovettori di f.

Osservazione: Questo teorema non ci dice come stabilire se esiste una base formata da autovettori, ne tantomeno come determinare esplicitamente una tale base (ammesso che esista).

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

<u>Esempio</u>: Sia $f : R^4 [x] \rightarrow R^4 [x]$ l'endomorfismo che associa al polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ il polinomio $(a_0 + a_1) + (a_1 - a_2 + a_3) x + (a_0 + 2a_1 - a_2) x^2 + a_3 x^3$.

Consideriamo la base canonica di $R^4[x]$ formata dai polinomi

$p_1(x) := 1, \quad p_2(x) := x, \quad p_3(x) := x^2, \quad p_4(x) := x^3.$

Abbiamo calcolato le radici del pol. caratteristico $p_f(x) := det(A - xI)$ ovvero gli autovalori di f sono 0 e 1.
Abbiamo mostrato che entrambi gli autospazi hanno dim. pari a 1.

<u>Domanda</u>: f è diagonalizzabile ?
Cioè esiste una base di $R^4 [x]$ formata di autovettori di f ?
Dato che dim $E(0) = 1$ e dim $E(1) = 1$, segue che i 4 polinomi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ <u>non</u> possono essere tutti autovettori.
Dunque, f <u>non</u> è diagonalizzabile.

Diagonalizzazione

Teorema: Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n e siano 1, 2, …, s gli autovalori distinti di f.
Se $\dim E(1) + \dim E(2) + ... + \dim E(s) < n$
allora f non è diagonalizzabile.
In altre parole: affinchè f sia diagonalizzabile è necessario che:
$\dim E(1) + \dim E(2) + ... + \dim E(s) = n$

Teorema: Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n e siano 1, 2, …, s gli autovalori distinti di f.
Prendiamo una base per ciascun autospazio: unendo tali basi si ottengono dei vettori tra loro linearmente indipendenti.
Dunque, abbiamo degli autovettori linearmente indipendenti.
In particolare: $\dim E(1) + \dim E(2) + \ldots + \dim E(s) \leq n$.

Diagonalizzazione

Teorema: Sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dimensione finita n e siano 1, 2, …, s gli autovalori distinti di f. L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se :

$\dim E(1) + \dim E(2) + ... + \dim E(s) = n$

Osservazioni:

- Sappiamo che per ciascun autovalore i si ha: $\dim E(i) \leq m_f(i)$
- $\dim E(1)+\dim E(2) +...+ \dim E(s) \leq m_f(1)+m_f(2)+...+ m_f(s) \leq n$
- Affinchè f sia diagonalizzabile è necessario che la somma delle molteplicità degli autovalori sia uguale a n, ovvero il polinomio caratteristico di f deve essere totalmente riducibile
- Se anche per uno solo degli autovalori i si ha: $\dim E(i) < m_f(i)$ allora f non è diagonalizzabile

Diagonalizzazione

Teorema: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dim. finita n. L'endomorsmo f è diagonalizzabile se e solo se sono verificate entrambe le seguenti condizioni:

1. il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile;
2. per ciascun autovalore i di f si ha: $\dim E(i) = m_f(i)$.

Osservazioni:

- Se λ è un autovalore semplice allora dim $E(\lambda) = 1$.
- La seconda condizione del teorema va quindi verificata solamente per gli autovalori di molteplicità almeno 2.

Diagonalizzazione

Teorema: Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dim. finita n. L'endomorsmo f è diagonalizzabile se e solo se sono verificate entrambe le seguenti condizioni:

1. il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile;
2. per ciascun autovalore i di f si ha: $\dim E(i) = m_f(i)$.

Calcolo di una base particolare:

In tal caso una base di V formata da autovettori di f si ottiene prendendo una base per ciascun autospazio e unendole.

Rispetto a tale base: f si rappresenta con una *matrice diagonale* i cui elementi lungo la diagonale sono gli autovalori di f, ciascuno ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità.

marcella.sama@uniroma3.it

Diagonalizzazione

Teorema: Sia f un endomorfismo di uno spazio vett. di **dim. *n***.

Se f ha ***n* autovalori distinti** allora f è diagonalizzabile.

Esempio: Sia data la matrice *A* e il suo polinomio caratteristico:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-x & 2 \\ -4 & 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$p_A(x) := \det(A - xI) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 = x^2(x^2 - 6x + 10)$$

Calcoliamo il discriminante ($\Delta = b^2 - 4\,a\,c$) di $x^2 - 6x + 10$:
$a = 1$; $b = -6$; $c = 10$ segue $\Delta = 36 - 40 < 0$ quindi no radici reali

Quindi il polinomio caratteristico di *A* non è totalmente riducibile.

Segue che la matrice *A* non è diagonalizzabile.

marcella.sama@uniroma3.it

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Consideriamo l'endomorfismo di R^4 definito da:

$$f(x, y, z, w) := (2x + y, 2y + z, 3y + 2w, 2x + 6y + z + 2w)$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla <u>base canonica</u> è :

$$A := \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2x + y \\ 2y + z \\ 3y + 2w \\ 2x + 6y + z + 2 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} & \end{array}$$

Diagonalizzazione

Esercizio: Consideriamo l'endomorfismo di R^4 definito da:

$$f(x, y, z, w) := (2x + y, 2y + z, 3y + 2w, 2x + 6y + z + 2w)$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad p_f(x) := \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0-x & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$p_f(x) := x^4 - 6x^3 + 7x^2 = x^2(x^2 - 6x + 7)$$

Calcoliamo il discriminante ($\Delta = b^2 - 4\,a\,c$) di $x^2 - 6x + 7$:
$a = 1$; $b = -6$; $c = 7$ segue $\Delta = 36 - 28 > 0$ calcoliamo le radici:
$x = \{-b +/- [\text{radice quadrata } \Delta]\} / 2a = 3 +/- \sqrt{2}$

Quindi il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile.
Autovalori: 0 di molt. 2, $3+\sqrt{2}$ di molt. 1, $3-\sqrt{2}$ di molt. 1

Diagonalizzazione

Esercizio: Consideriamo l'endomorfismo di R^4 definito da:

$$f(x,y,z,w) := (2x+y, 2y+z, 3y+2w, 2x+6y+z+2w)$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è :

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_f(x) := \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0-x & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

Autovalori: **0 di molt. 2**, $3+\sqrt{2}$ di molt. 1, $3-\sqrt{2}$ di molt. 1

Verifichiamo per l'autovalore 0 se la sua molteplicità coincide con la dimensione del relativo autospazio:

$$\dim E(0) = 4 - \mathrm{rk}(A - 0I) = 4 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 3 = \boxed{1}$$

***f* non è diagonalizzabile !**

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Sia dato l'endomorfismo $f : M(2, 2, R) \to M(2, 2, R)$:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$$

La matrice rappresentativa A di f rispetto alla <u>base canonica</u> è :

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_f(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$p_f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3)$$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Sia dato l'endomorfismo $f : M(2, 2, R) \rightarrow M(2, 2, R)$:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$$

$$p_f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3)$$

Calcoliamo il discriminante ($\Delta = b^2 - 4\ a\ c$) di $x^2 - 2x - 3$:
$a = 1$; $b = -2$; $c = -3$ segue $\Delta = 4 + 12 > 0$ calcoliamo le radici:
$x = \{- b$ +/– [radice quadrata Δ] $\}$ / 2 a = 1 +/– 2

Quindi il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile.
Autovalori: 0 di molt. 2, – 1 di molt. 1, 3 di molt. 1

$$p_f(x) = x^2(x-3)(x+1)$$

$\dim E(0) = 4 - \mathrm{rk}(A - 0I) = 2 \Rightarrow$ ***f* è diagonalizzabile !**

f si rappresenta con una *matrice diagonale* rispetto a una *base*

Diagonalizzazione

<u>Metodo per individuare se un endomorfismo è diagonalizzabile</u>:

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vett. V di dim. finita n.

1. Scegliere $e_1, e_2, \dots , e_n$ vettori che formano una <u>base</u> di V .
2. Calcolare la matrice A <u>rappresentativa</u> di f rispetto alla base scelta.
3. Definire il <u>polinomio</u> (di grado n) <u>caratt.</u> di f : $p_f(x) := \det(A - xI)$.
4. Risolvere $\det(A - xI) = 0$. Le soluzioni sono gli <u>autovalori</u> di f .
Se $p_f(x)$ <u>non</u> è totalmente riducibile, f <u>non è</u> diagonalizzabile, STOP.
5. Per ciascun autovalore (di molteplicità > 1) verificare se la sua molteplicità e la dimensione del suo autospazio coincidono.
6. Se esiste almeno un autovalore λ_i per cui si ha $\dim E(\lambda_i) < m(\lambda_i)$ allora f <u>non è</u> diagonalizzabile, STOP.
7. Se per tutti gli autovalori λ_i si ha $\dim E(\lambda_i) = m(\lambda_i)$ allora f <u>è</u> diagonalizzabile, STOP.

marcella.sama@uniroma3.it

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto a una *base* :

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ogni autovalore è riportato lungo la diagonale principale un numero di volte uguale alla sua molteplicità.

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

[Dobbiamo trovare una base per ciascun autospazio e unirle.]

[Tale base deve essere formata da autovettori di f .]

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale* D rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

***E*(0):**

$$(A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x+2y+w=0 \\ x \qquad\quad +w=0 \end{array}} \\ x+\ y+w=0 \\ x+\ y+w=0 \end{cases}$$

2 equazioni lin. indipendenti

$$\mathrm{rk}(A-0I)=2$$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

***E*(0):**

$$(A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+w=0 \\ x \qquad\quad +w=0 \\ x+\ \ y+w=0 \\ x+\ \ y+w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-u \\ y=0 \\ z=t \\ w=u \end{cases}$$

Base per $E(0)$:

$$\Rightarrow E(0)=\{-uE_{11}+tE_{21}+uE_{22} \mid t\in\mathbb{R}, u\in\mathbb{R}\} \Rightarrow \begin{matrix} -E_{11}+E_{22} \\ E_{21} \end{matrix}$$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

***E*(–1):**

$$(A-(-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+w=0 \\ \boxed{\begin{array}{l} x+y+w=0 \\ x+y+z+w=0 \\ x+y+2w=0 \end{array}} \end{cases}$$

3 equazioni lin. indipendenti

rk $(A-(-1)\,I) = 3$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

***E*(–1):**

$$(A-(-1)I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+w=0 \\ x+y+w=0 \\ x+y+z+w=0 \\ x+y+2w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \\ w=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $E(-1) = \{-t\,E_{11} + t\,E_{12} \mid t \in R\}$ $\Rightarrow$ Base per $E(-1)$: $-E_{11}+E_{12}$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

***E*(3):**

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4}t \\ y = \frac{3}{4}t \\ z = t \\ w = t \end{cases} \Rightarrow$$

Base per $E(3)$:

$\frac{5}{4}E_{11} + \frac{3}{4}E_{12} + E_{21} + E_{22}$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo una base rispetto a cui f si rappresenta con la matrice D :

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Base per $E(0)$: $-E_{11} + E_{22}$; E_{21} $\Longrightarrow$ $A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Base per $E(-1)$: $-E_{11} + E_{12}$ $\Longrightarrow$ $A_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Base per $E(3)$: $\frac{5}{4}E_{11} + \frac{3}{4}E_{12} + E_{21} + E_{22}$ $\Longrightarrow$ $A_4 := \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio(seguito)</u>: $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

f si rappresenta con la *matrice diagonale D* rispetto ad una *base*

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato una base di $M(2, 2, R)$ formata da autovettori di f :

$E(0)$: $A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E(-1)$: $A_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E(3)$: $A_4 := \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di passaggio *M* dalla base canonica a questa base è :

$$M := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Si può verificare che: $M^{-1}AM = D$

Diagonalizzazione

Esercizio(seguito): $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+2b+d & a+d \\ a+b+d & a+b+d \end{pmatrix}$

Attenzione: *f* si rappresenta anche con la *matrice diagonale* $\bar{D}$

$$\bar{D} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già trovato una base di $M(2, 2, R)$ formata da autovettori di f :

$E(0)$: $A_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E(-1)$: $A_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E(3)$: $A_4 := \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di passaggio *N* dalla base canonica a questa base è :

$$N := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} A_4 & A_1 & A_3 & A_2 \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Si può verificare che:

$$N^{-1}AN = \bar{D}$$

Diagonalizzazione

<u>Metodo per la ricerca di una base di autovettori di un endomorfismo</u>:

<u>Premess</u>a: Sappiamo già che l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

1. Rispetto a una base opportuna di V, f si rappresenta con una <u>matrice diagonale</u> D : gli elementi lungo la diagonale principale sono gli <u>autovalori</u> di f, ciascuno riportato un numero di volte pari alla propria molteplicità (uguale alla dimensione dell'autospazio).
2. Determinare <u>una base per ciascun autospazio</u> $E(\lambda_i)$: risolvere il sistema lineare: $(A - \lambda_i I)\, X = 0$. Il numero di vettori della base di E_i deve coincidere con la dimensione del relativo autospazio.
3. Unire le basi di tutti gli autospazi per avere una base di V <u>formata da autovettori</u> di f.
4. La matrice M <u>di passaggio</u> (da A a D) dalla base di partenza alla base di autovettori soddisfa la relazione: $D = M^{-1} A\, M$

Diagonalizzazione

Metodo per la ricerca di una base di autovettori di un endomorfismo:

Premessa: Sappiamo già che l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

4. La matrice M di passaggio (da A a D) dalla base di partenza alla base di autovettori soddisfa la relazione: $D = M^{-1} A M$

Osservazioni sulle matrici M e D:

- M è la matrice le cui colonne danno le componenti dei vettori della base di autovettori rispetto alla base di partenza.
- L'ordine in cui mettiamo gli autovalori lungo la diagonale di D e l'ordine in cui scriviamo le colonne di M devono essere coerenti:

se il k-esimo elemento lungo la diagonale di D è un autovalore λ_i, allora la k-esima colonna di M deve dare le componenti di un autovettore relativo allo stesso autovalore λ_i.

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se la matrice se A è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-x & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1-x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}$$

$$p_A(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x \; = -x\,(x^2 - x + 1/4\,)$$

Calcoliamo il discriminante ($\Delta = b^2 - 4\,a\,c$) di $x^2 - x + 1/4$:
$a = 1$; $b = -1$; $c = 1/4$ segue $\Delta = 1 - 1 = 0$ calcoliamo le radici:
$x = \{-\,b$ +/– [radice quadrata Δ] $\}$ / 2 a = 1/2

$p_A(x)$ è totalmente riducibile, ovvero $p_A(x) = -\,x\,(x - 1/2)^2$.
Autovalori di A : 0 di molteplicità 1 e 1/2 di molteplicità 2.

La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è necessariamente 1.
La dimensione dell'autospazio relativo a 1/2 è : 1 oppure 2 ?

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Stabilire se la matrice se *A* è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-x & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1-x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}$$

La dimensione dell'autospazio relativo a 0 è necessariamente 1.
La dimensione dell'autospazio relativo a 1/2 è : 1 oppure 2 ?

$$\dim E\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \mathrm{rk}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Segue la matrice *A* è diagonalizzabile ed è simile alla matrice *D* :

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora una matrice di passaggio da *A* a *D* .

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se la matrice se A è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}-x & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1-x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora una matrice di passaggio da A a D .

Per determinare $E(0)$, risolviamo il sistema $(A - 0I) X = 0$

Poichè 0 è autovalore semplice, la dim. dell'autospazio è 1 .
Servono quindi $3 - 1 = 2$ equazioni lin. indipendenti di $A - 0I$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(- t, t, 0)$ al variare di t in R

$\Rightarrow$ Una base per $E(0)$ è $(- 1, 1, 0)$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Stabilire se la matrice se A è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - x & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 - x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora una matrice di passaggio da A a D .

Per determinare $E(1/2)$, risolviamo il sistema ($A - 1/2\ I$) $X = 0$

Sappiamo che l'autospazio è di dim. 2. rk ($A - 1/2\ I$) = 1 .
Serve quindi 3 − 2 = 1 equazione lin. indipendente di $A - 1/2\ I$.

⇨ $x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = 0$ ⇨ $(-3/2\ t + 1/2\ u, t, u)$ al variare di t e u in R

⇨ Una base per $E(1/2)$ è $(-3/2, 1, 0)$ e $(1/2, 0, 1)$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Stabilire se la matrice se *A* è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad p_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - x & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1-x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determiniamo ora una matrice di passaggio da A a D .

$$M^{-1}AM = D$$

$$\Uparrow$$

Una base per *E*(0) è (− 1, 1, 0)

Una base per *E*(1/2) è (− 3/2, 1, 0) e (1/2, 0, 1)

Segue una base di R^3 formata da autovettori di *A* è :

$$(-1, 1, 0) \quad \left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) \quad \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) \Rightarrow M := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E(0) \quad E(1/2) \end{array}$$

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se il seguente $f: R^3 \rightarrow R^3$ è diagonalizzabile :

$$f(x,y,z) := (y, 0, x+y+z)$$

In tal caso, trovare una base di R^3 formata da autovettori di f e scrivere la matrice rappresentativa A di f rispetto a tale base.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica: (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

$$p_f(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^2(x-1)$$

Polinomio caratter. di f è totalmente riducibile.
Autovalori di f: 0 e 1.
$m_f(0) = 2$; $m_f(1) = 1$

$$\dim E(0) = 3 - \mathrm{rk}(A - 0I) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\dim E(0) < m_f(0) \Rightarrow$ f non è diagonalizzabile !

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Stabilire se la matrice *A* a coeff. reali è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, determinare una matrice diagonale *D* simile ad *A* e una matrice invertibile *M* tale che $D = M^{-1} A M$

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

sviluppo rispetto alla quarta riga

$$p_A(x) = (1-x)(1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(x^2-2x) = (1-x)^2 x(x-2)$$

sviluppo rispetto alla seconda riga

Il polinomio caratteristico di *A* è <u>totalmente riducibile</u>.

<u>Autovalori</u>: 1 di molteplicità 2; 0 e 2 entrambi di molteplicità 1.

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se la matrice A a coeff. reali è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1} A M$

Autovalori: 1 di molteplicità 2; 0 e 2 entrambi di molteplicità 1.

$$\dim E(1) = 4 - \mathrm{rk}(A - 1I) = 4 - \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Segue che A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale:

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D.

marcella.sama@uniroma3.it

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se la matrice A a coeff. reali è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1} A M$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D.

***E*(1):** $(A - 1I)X = 0 \Longrightarrow \mathrm{rk}(A - 1I) = 2 \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 2 righe linear. indipendenti di $A - 1I$

$\Longrightarrow$ le cui soluzioni sono $(0, t, 0, u)$ al variare di t e u in R

$\Longrightarrow$ una base per $E(1)$ è : $v_1 := (0, 1, 0, 0)$, $v_2 := (0, 0, 0, 1)$

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se la matrice A a coeff. reali è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1} A M$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D.

***E*(0):** $(A - 0I)X = 0 \Longrightarrow \text{rk}(A - 0I) = 3 \Longrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases}$

3 righe linear. indip. di $A - 0I$

$\Longrightarrow$ le cui soluzioni sono $(-t, 0, t, 0)$ al variare di t in R

$\Longrightarrow$ una base per $E(0)$ è : $v_3 := (-1, 0, 1, 0)$

Diagonalizzazione

Esercizio: Stabilire se la matrice A a coeff. reali è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1} A M$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D.

***E*(2):** $(A - 2I)X = 0 \Longrightarrow \mathrm{rk}(A - 2I) = 3 \Longrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ -y = 0 \\ -w = 0 \end{cases}$

3 righe linear. indip. di $A - 2I$

$\Longrightarrow$ le cui soluzioni sono $(t, 0, t, 0)$ al variare di t in R

$\Longrightarrow$ una base per $E(2)$ è : $v_4 := (1, 0, 1, 0)$

Diagonalizzazione

<u>Esercizio</u>: Stabilire se la matrice A a coeff. reali è diagonalizzabile :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, determinare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1} A M$

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una matrice di passaggio dalla matrice A alla matrice D.

una base per $E(1)$ è : $v_1 := (0, 1, 0, 0)$, $v_2 := (0, 0, 0, 1)$

una base per $E(0)$ è : $v_3 := (-1, 0, 1, 0)$

una base per $E(2)$ è : $v_4 := (1, 0, 1, 0)$

$$M := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow \; M^{-1} A M = D$