L15: Nucleo (28-29)

Argomenti lezione:

- Nucleo di un omomorfismo
- Calcolo del nucleo
- Cenni su isomorfismi
- Esercizi

Il ***nucleo*** di un omomorfismo è il sottoinsieme dello spazio di partenza la cui immagine è il vettore nullo.

marcella.sama@uniroma3.it

Nucleo

marcella.sama@uniroma3.it

Definizione del vettore nullo

<u>Teorema</u>: Se $f : V \to W$ è un omomorfismo allora $f(0_v) = 0_w$.

<u>Esempio</u>: Sia $f : R^3 \to R^2$ l'applicazione definita da:

$f(x, y, z) := (x + y + 3z\ ,\ x + 2y + 4z \mathbf{-1})$.

f <u>non</u> è lineare (<u>non</u> è un omomorfismo) dal momento che

$f(0, 0, 0) = (0, -1) \neq (0, 0)$

<u>Esempio</u>: Sia $f : R^2 \to R^2$ l'applicazione $f(x, y) := (xy, x)$.

Vediamo che $f(0, 0) = (0, 0)$.

<u>Attenzione però</u>: f <u>non</u> è un omomorfismo poiché,

ad esempio, $f(0, 1) + f(1, 0) = (0, 0) + (0, 1) = (0, 1)$,

mentre $\qquad f((0, 1) + (1, 0)) = f(1, 1) = (1, 1)$

Quindi anche se $f(0_v) = 0_w$ <u>non</u> è detto che f sia un omomorfismo!

Nucleo di un omomorfismo

<u>Definizione</u>: Se $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali chiamiamo **nucleo** di f (**ker** f) l'insieme dei vettori di V la cui immagine è il vettore 0_w. Dunque: $\ker f := \{ v \in V \mid f(v) = 0_w \}$

<u>Esempio</u>: Prendiamo l'omomorfismo $f: R^5 \to R[x]$ definito da:

$f(a, b, c, d, e) := (a - b + c) + (b - c + d)\, x + (c - d + e)\, x^2$

Un vettore (a, b, c, d, e) appartiene a $\ker f$ se e solo se:

$(a - b + c) + (b - c + d)\, x + (c - d + e)\, x^2 = 0$. Ovvero se e solo se:

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ b - c + d = 0 \\ c - d + e = 0 \end{cases}$$

$\ker f$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo e, quindi, è un <u>sottospazio vettoriale</u> di R^5.

$$\ker f = \{(-t, -u, t - u, t, u) \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}$$

Una <u>base</u> per $\ker f$ è formata da $(-1, 0, 1, 1, 0)$ e $(0, -1, -1, 0, 1)$.

Nucleo di un omomorfismo

Esercizio: Sia $f : M(2, 2, R) \to M(2, 2, R)$ definito da $f(A) := A + {}^tA$

Per determinare $\ker f$ possiamo considerare la generica matrice $A := \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ di $M(2, 2, R)$ e stabilire quando $f(A) = 0$.

$$f(A) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2w \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\ker f$ è un sottospazio vettoriale dello spazio di partenza.

$\ker f$ è formato dalle matrici A tali che $A + {}^tA = 0$
cioè le matrici *antisimmetriche* tali che ${}^tA = -A$.

Nucleo di un omomorfismo

Teorema: Il nucleo di un omomorfismo $f: V \to W$ di spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione: Sappiamo che $0_V \in \ker f$ $(f(0_v) = 0_w)$. $\ker f \neq \emptyset$.

[Per definizione di nucleo si ha: $\ker f := \{\ v \text{ in } V \mid f(v) = 0_w \}$]

Nucleo di un omomorfismo

<u>Teorema</u>: Il <u>nucleo</u> di un omomorfismo $f: V \to W$ di spazi vettoriali è un <u>sottospazio vettoriale</u> di V.

<u>Dimostrazione</u>: Sappiamo che $0_V \in \ker f$ $(f(0_v) = 0_w)$. $\ker f \neq \emptyset$.

Sappiamo che $f(v_1) = 0_w$ e $f(v_2) = 0_w$ e dobbiamo mostrare che $f(v_1 + v_2) = 0_w$.

Dunque: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w$.

Ora dobbiamo mostrare che se v appartiene a $\ker f$

e k è uno scalare, allora $k\,v$ appartiene a $\ker f$.

Sappiamo che $f(v) = 0_w$ e dobbiamo mostrare che $f(k\,v) = 0_w$.

Dunque $f(k\,v) = k\,f(v) = k\,0_w = 0_w$.

Abbiamo dimostrato che il nucleo di f è un sottospazio vett. di V.

Calcolo del nucleo

<u>Procedura</u>: Dato un omomorfismo $f : V \to W$ di spazi vettoriali di dimensione finita. Data una base per V, formata dai $e_1, e_2, \ldots, e_n$, e una base per W, formata dai $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi date. Consideriamo ora un *generico* vettore v di V : Vogliamo stabilire se v appartiene a $\ker f$.

$$\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} f(\boldsymbol{v}) = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m \\ \boxed{y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0} \end{array}$$

- $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sono linearm. indipend. (formano una base per W) per cui v appartiene a *ker f* se e solo se $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$.

[Per definizione di <u>nucleo</u> si ha: $\ker f := \{ v \text{ in } V \mid f(v) = 0_w \}$]

Calcolo del nucleo

<u>Procedura</u>: Dato un omomorfismo $f: V \to W$ di spazi vettoriali di dimensione finita. Data una base per V, formata dai $e_1, e_2, \ldots, e_n$, e una base per W, formata dai $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi date. Consideriamo ora un *generico* vettore v di V: Vogliamo stabilire se v appartiene a $\ker f$.

$$\boldsymbol{v} := x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Longrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{v}) = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{f}_m$$

$$\boxed{y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0}$$

- $f_1, f_2, \ldots, f_m$ sono linearm. indipend. (formano una base per W) per cui v appartiene a *ker f* se e solo se $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$.
- Partendo una soluzione $(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \ldots, \underline{x_n})$ del sistema lin. omogeneo otteniamo un vettore del nucleo di f : $\underline{x_1}\, e_1 + \underline{x_2}\, e_2 + \ldots + \underline{x_n}\, e_n$

Calcolo del nucleo

Esercizio: Sia l'omomorfismo $f: V \to W$ definito dalle condizioni:

$$f(\boldsymbol{e}_1) := \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) := \boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) := 3\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_4) := -\boldsymbol{f}_2 - 2\boldsymbol{f}_3.$$

Sia V uno spazio vettor. con una base formata da e_1, e_2, e_3, e_4.
Sia W uno spazio vettor. con una base formata dai vettori f_1, f_2, f_3.

marcella.sama@uniroma3.it

Calcolo del nucleo

Esercizio: Sia l'omomorfismo $f\colon V \to W$ definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &:= \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &:= \boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &:= 3\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_4) &:= -\boldsymbol{f}_2 - 2\boldsymbol{f}_3. \end{aligned} \Longrightarrow A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ riducendo a scalini la matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il nucleo
tramite il sistema equivalente

Calcolo del nucleo

Esercizio: Sia l'omomorfismo $f\colon V \to W$ definito dalle condizioni:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &:= \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &:= \boldsymbol{f}_1 + 2\boldsymbol{f}_2 + 3\boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_3) &:= 3\boldsymbol{f}_1 + 4\boldsymbol{f}_2 + 5\boldsymbol{f}_3, \\ f(\boldsymbol{e}_4) &:= -\boldsymbol{f}_2 - 2\boldsymbol{f}_3. \end{aligned} \Longrightarrow A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ riducendo a scalini la matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ soluzioni del sistema $\{(-2t-u, -t+u, t, u) \mid t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}\}$

Ponendo $t = 1$ e $u = 0$ otteniamo la soluzione $(-2, -1, 1, 0)$, ponendo invece $t = 0$ e $u = 1$ otteniamo la soluzione $(-1, 1, 0, 1)$.

Una **base** per $\ker f$: $-2e_1 - 1e_2 + 1e_3 + 0e_4$; $-1e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 1e_4$

Calcolo del nucleo

Esercizio: Sia l'omomorfismo $f: R^3 \to R^4[x]$ definito da:

$$f(a,b,c) := (2a+b+8c) + (3a-b+7c)x + (-a-3c)x^2 + (b+2c)x^3$$

$$\Longrightarrow \quad A := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} & \end{array}$$

Matrice A rispetto alle basi canoniche

Calcolo del nucleo

<u>Esercizio</u>: Sia l'omomorfismo $f: R^3 \to R^4[x]$ definito da:

$$f(a,b,c) := (2a+b+8c) + (3a-b+7c)x + (-a-3c)x^2 + (b+2c)x^3$$

$$\Longrightarrow \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cerchiamo il nucleo

$\Longrightarrow$ riducendo a scalini la matrice A

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ soluzioni del sistema $\{(-3t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Una **base** per $\ker f$ è allora formata dal singolo vettore le cui componenti rispetto alla base canonica sono $(-3, -2, 1)$.

Calcolo del nucleo

Teorema: Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissiamo una base per V e una base per W. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi.

Risulta: $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} A$

[dato che le soluzioni del sistema lineare omogeneo utilizzato per il calcolo del nucleo sono descritte da $\dim V - \operatorname{rk} A$ parametri]

Calcolo del nucleo

Teorema: Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissiamo una base per V e una base per W. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi.

Risulta: $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} A$

Teorema: Se $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V ha dimensione finita, risulta: $\dim V = \dim \ker f + \dim f(V)$

[abbiamo visto in precedenza che $\dim f(V) = \operatorname{rk} A$]

Calcolo del nucleo

Teorema: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissiamo una base per V e una base per W. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi.

Risulta: $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} A$

Teorema: Se $f : V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V ha dimensione finita, risulta: $\dim V = \dim \ker f + \dim f(V)$

Teorema: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Risulta che f è *iniettivo* se e solo se: $\ker f = \{0_V\}$.

[f è *iniettivo* quando due vettori diversi u e v, con $u \neq v$, hanno immagini diverse, ovvero $f(u) \neq f(v)$)

Calcolo del nucleo

<u>Teorema</u>: Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali di dimensione finita. Fissiamo una base per V e una base per W. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a tali basi.

Risulta: $\dim \ker f = \dim V - \operatorname{rk} A$

<u>Teorema</u>: Se $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e se V ha dimensione finita, risulta: $\dim V = \dim \ker f + \dim f(V)$

<u>Teorema</u>: Sia $f: V \to W$ un omomorfismo di spazi vettoriali. Risulta che f è *iniettivo* (i.e. vettori diversi hanno immagini diverse) se e solo se: $\ker f = \{0_V\}$.

Notiamo che se f è *iniettivo*, allora $\dim V = \dim f(V)$.

Poichè $f(V)$ è un sottospazio di W, abbiamo che $\dim V \le \dim W$.

Calcolo del nucleo

Notiamo che se f è *iniettivo*, allora $\dim V = \dim f(V)$.

Poichè $f(V)$ è un sottospazio di W, abbiamo che $\dim V \leq \dim W$.

<u>Osservazione</u>: Se $f : V \to W$ *è* un omomorfismo di spazi vettoriali e $\dim V > \dim W$ allora l'omomorfismo f <u>non</u> può essere iniettivo.

Nel caso in cui $\dim V \leq \dim W$ non possiamo dire nulla a priori: dobbiamo valutare caso per caso.

<u>Criterio</u>: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo tra spazi di dim. finita.

Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a delle basi per V e W.

Sono allora equivalenti le seguenti condizioni:

1. L'omomorfismo f è *iniettivo*,
2. $\mathrm{rk}\, A = \dim V$,
3. $\dim f(V) = \dim V$.

Calcolo del nucleo

<u>Esercizio</u>: Stabilire se i seguenti omomorfismi sono iniettivi:

a. $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) := (a_0, a_1, a_2).$$

Possiamo dire subito che f <u>non</u> è iniettivo:
infatti $R[x]$ non ha dimensione finita,
mentre R^3 ha dimensione finita.

Calcolo del nucleo

<u>Esercizio</u>: Stabilire se i seguenti omomorfismi sono iniettivi:

b. $f\colon\ \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (a+b+2c, a+2b+c, c+d).$$

Possiamo dire subito che f <u>non</u> è iniettivo:
infatti dim $M\,(2, 2, R)$ > dim R^3.

Calcolo del nucleo

Esercizio: Stabilire se i seguenti omomorfismi sono iniettivi:

c. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathrm{M}(2,2,\mathbb{R})$ definito da:

$$f(a,b,c) := \begin{pmatrix} a-4b & b-2c \\ a+3c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

Poiché dim $R^3 \leq$ dim M (2, 2, R) non possiamo escludere a priori che f sia iniettivo. Dobbiamo svolgere i dovuti calcoli.

La matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche è :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 3.

Essendo rk A = dim V,
segue f è iniettivo.

Isomorfismo

marcella.sama@uniroma3.it

Isomorfismi

Definizione: Un omomorfismo $f : V \to W$ di spazi vettoriali è detto **isomorfismo** se f è *biiettivo*, cioè se f è sia suriettivo che iniettivo.

Due spazi vettoriali V e W si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f : V \to W$.

Teorema: Se $f : V \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e V ha dimensione finita, allora W ha dimensione finita e dim W = dim V.

[Infatti per f suriettivo si ha: $f(V) = W$

mentre per f iniettivo si ha: $\dim f(V) = \dim V$]

Isomorfismi

Definizione: Un omomorfismo $f : V \to W$ di spazi vettoriali è detto **isomorfismo** se f è *biiettivo*, cioè se f è sia suriettivo che iniettivo.
Due spazi vettoriali V e W si dicono **isomorfi** se esiste un isomorfismo $f : V \to W$.

Teorema: Se $f : V \to W$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e V ha dimensione finita, allora W ha dimensione finita e $\dim W = \dim V$.

Teorema: Sia $f : V \to W$ un omomorfismo di spazi di dim. finita. Sia $\dim V = \dim W = n$. Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto a delle basi per V e W. Sono equivalenti le condizioni:

1. f è suriettivo; 2. f è iniettivo;
3. f è un isomorfismo (cioè è biiettivo); 4. $\det A \neq 0$.

marcella.sama@uniroma3.it

Calcolo di nucleo e immagine

<u>Esercizio</u>: Sia $f : R^3 \to R^3$ l'omomorfismo definito dalle condizioni:

$$f(1,1,1) := (1,0,1)$$
$$f(1,1,0) := (1,2,0)$$
$$f(1,0,0) := (0,0,0)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica:

$$(1,0,0) = (1,0,0),$$
$$(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0),$$
$$(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0)$$

matrice rappresentativa

$$f(1,0,0) = f(1,0,0) = (0,0,0),$$
$$f(0,1,0) = f(1,1,0) - f(1,0,0) = (1,2,0),$$
$$f(0,0,1) = f(1,1,1) - f(1,1,0) = (0,-2,1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo di nucleo e immagine

<u>Esercizio</u>: Sia $f : R^3 \to R^3$ l'omomorfismo definito dalle condizioni:

$$f(1,1,1) := (1,0,1)$$

$$f(1,1,0) := (1,2,0)$$

$$f(1,0,0) := (0,0,0)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di R^3 formata dai vettori $v_1 := (1, 1, 1)$, $v_2 := (1, 1, 0)$, $v_3 := (1, 0, 0)$:

$$f(1,1,1) = (1,0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 1(1,0,0),$$

$$f(1,1,0) = (1,2,0) = 0(1,1,1) + 2(1,1,0) - 1(1,0,0),$$

$$f(1,0,0) = (0,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 0(1,0,0).$$

matrice rappresentativa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo di nucleo e immagine

Esercizio: Sia $f: R^3 \to R^3$ l'omomorfismo definito dalle condizioni:

$$f(1,1,1) := (1,0,1)$$
$$f(1,1,0) := (1,2,0)$$
$$f(1,0,0) := (0,0,0)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di R^3 formata dai vettori $w_1 := (1, 2, 1)$, $w_2 := (0, 1, 0)$, $w_3 := (0, 0, 2)$:

Per prima cosa, determiniamo $f(1, 2, 1)$, $f(0, 1, 0)$, $f(0, 0, 2)$.

Per trovare $f(1, 2, 1)$, usiamo la matrice rappr. di f rispetto alla base canonica. $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analogamente si ha: $f(0, 1, 0) = (1, 2, 0)$, $f(0, 0, 2) = (0, -4, 2)$

Calcolo di nucleo e immagine

<u>Esercizio</u>: Sia $f: R^3 \to R^3$ l'omomorfismo definito dalle condizioni:

$$f(1,1,1) := (1,0,1)$$
$$f(1,1,0) := (1,2,0)$$
$$f(1,0,0) := (0,0,0)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base di R^3 formata dai vettori $w_1 := (1, 2, 1)$, $w_2 := (0, 1, 0)$, $w_3 := (0, 0, 2)$:

Poi, decomponiamo i vettori trovati rispetto alla base data:

$$f(1,2,1) = (2,2,1) = 2(1,2,1) - 2(0,1,0) - \frac{1}{2}(0,0,2),$$
$$f(0,1,0) = (1,2,0) = 1(1,2,1) + 0(0,1,0) - \frac{1}{2}(0,0,2),$$
$$f(0,0,2) = (0,-4,2) = 0(1,2,1) - 4(0,1,0) + 1(0,0,2).$$

matrice rappresentativa

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo di nucleo e immagine

Esercizio: Sia $f: R^3 \to R^3$ l'omomorfismo definito dalle condizioni:

$$f(1,1,1) := (1,0,1)$$

$$f(1,1,0) := (1,2,0)$$

$$\boxed{f(1,0,0) := (0,0,0)}$$

Determinare il nucleo e l'immagine di f:

Sappiamo che $f(R^3)$ è generato dalle immagini dei vettori di una base.

Ad esempio, $f(R^3)$ è generato da $f(1, 1, 1)$, $f(1, 1, 0)$, $f(1, 0, 0)$, ovvero da $(1, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 0)$.

$(1, 0, 1)$ e $(1, 2, 0)$ sono linear. indip., e formano una base per $f(R^3)$.

$\dim f(R^3) = 2$. Segue $\dim \ker f = \dim R^3 - \dim f(R^3) = 3 - 2 = 1$.

Poichè $(1, 0, 0) \in \ker f$, questo vettore forma una base per $\ker f$.