10-quantum-un-qubit-04

Next Generation Computing Models

Quantum Computing

Un qubit

1

1

qubit

- nel calcolo tradizionale un bit può essere in alternativa nello stato 0 o nello stato 1
- nel quantum computing si usano i qubit
- un qubit può essere *simultaneamente* nello stato 0 e nello stato 1 (una *superposition* dei due stati)

2

2

10-quantum-un-qubit-04

qubit – ampiezze

- i due stati *di base* di un qubit si indicano di solito con $|0\rangle$ e $|1\rangle$
- un qubit si trova in generale in uno stato descritto da $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, dove α_0 e α_1 sono numeri complessi ($\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$) chiamati *ampiezze*
  - con il vincolo $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1$
  - si ricorda che il *modulo* di un numero complesso $z = x + yi$ è definito come $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - quindi $|z|^2 = x^2 + y^2$

3

3

qubit – esempi

- ad esempio un qubit può trovarsi nello stato $(^1/_2 + {^1/_2}\, i)|0\rangle + {^1/_{\sqrt{2}}}|1\rangle$
  - si noti come $|(^1/_2 + {^1/_2}\, i)|^2 + |{^1/_{\sqrt{2}}}|^2 = (^1/_4 + {^1/_4}) + {^1/_2} = 1$
- oppure un qubit può trovarsi nello stato ${^1/_{\sqrt{2}}}|0\rangle + {^1/_{\sqrt{2}}}|1\rangle$

4

4

10-quantum-un-qubit-04

qubit – misura

- quando un qubit è isolato si trova in una superposition
- quando viene misurato (osservato) collassa con probabilità $|\alpha_0|^2$ a $|0\rangle$ e con probabilità $|\alpha_1|^2$ a $|1\rangle$
- dopo l'osservazione i valori di ampiezza sono *irrimediabilmente* perduti
  - la misura disturba lo stato del sistema

5

5

qualche esempio sui numeri complessi

ricorda che $i = \sqrt{-1}$ e che $i^2 = -1$

- semplifica $z = 2 + 3i - 5i + 6$
  - $z = 8 - 2i$
- semplifica $z = (2 + i)^2$
  - $z = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$
- semplifica $z = i^3(7 + 5i)$
  - $z = -\mathrm{i}(7 + 5\mathrm{i}) = -7\mathrm{i} - 5i^2 = -7i + 5 = 5 - 7\mathrm{i}$

6

6

10-quantum-un-qubit-04

qualche esempio sui numeri complessi

ricorda che il *complesso coniugato* di un numero complesso $z = x + yi$ è definito come $\bar{z} = x - yi$

- calcola il complesso coniugato di $z = 2 + 3i$
  - $\bar{z} = 2 - 3i$
- calcola il complesso coniugato di $z = -i$
  - $\bar{z} = i$

7

7

qualche esempio sui qubit

- considera il qubit $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$
- quello mostrato è uno stato nel quale il qubit può effettivamente trovarsi?
  - sì perché $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$
- se verrà misurato, con che probabilità il risultato della misura sarà $|0\rangle$?
  - $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

8

8

10-quantum-un-qubit-04

qualche esempio sui qubit

- considera il qubit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- quello mostrato è uno stato nel quale il qubit può effettivamente trovarsi?
  - sì perché $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- se viene misurato, con che probabilità il risultato della misura sarà $|0\rangle$?
  - $\frac{1}{2}$

9

9

qubit – rappresentazione vettoriale

- possiamo rappresentare lo stato descritto da $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, in modo sintetico con il vettore di numeri complessi $\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix}$
- quindi lo spazio degli stati di un qubit è uno spazio *bidimensionale complesso*
  - detto spazio di Hilbert
- il vincolo di normalizzazione ci dice che il vettore di un qubit è anche *unitario*
  - un vettore è *unitario* quando ha modulo (lunghezza) uguale a 1; si chiama anche *versore*

10

10

10-quantum-un-qubit-04

qubit – stati di base

- possiamo rappresentare lo stato descritto da $\alpha_0 = 1$, e $\alpha_1 = 0$ con il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
  - quindi scrivere $|0\rangle$ è equivalente a scrivere $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
- inoltre possiamo rappresentare lo stato descritto da $\alpha_0 = 0$, e $\alpha_1 = 1$ con il vettore $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
  - quindi scrivere $|1\rangle$ è equivalente a scrivere $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

11

11

qubit – rappresentazione vettoriale

- quindi possiamo scrivere $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ in forma vettoriale come $\alpha_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\end{pmatrix}$
  - i vettori $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ sono le *basi* della rappresentazione
- la notazione con le parentesi $|x\rangle$ non è che una forma sintetica per la rappresentazione vettoriale
  - si chiama *ket-notation* ed è stata concepita da Dirac
  - la forma $|x\rangle$ denota con il nome x un vettore colonna

12

12

10-quantum-un-qubit-04

qubit – rappresentazione vettoriale

- quindi
  - un qubit è quindi un vettore unitario in uno spazio vettoriale bidimensionale *complesso*
  - la notazione usata per descrivere qubit è una notazione per descrivere vettori

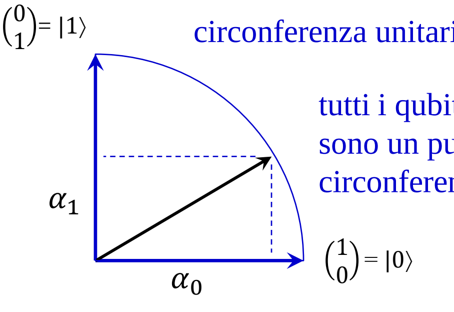
es. sulla rappresentazione vettoriale

- considera il qubit $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$
- mostrane la reppresentazione vettoriale
  - $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

10-quantum-un-qubit-04

qubit – interpretazione geometrica

- se assumiamo, per semplicità, che α_0 e α_1 siano numeri *reali*, possiamo rappresentare $\alpha_0\binom{1}{0} + \alpha_1\binom{0}{1}$ con il disegno:

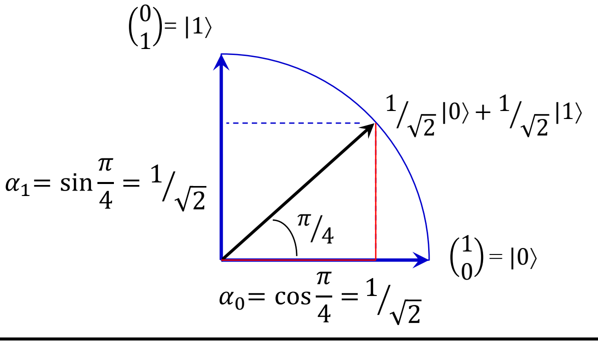


15

15

qubit – interpretazione geometrica

- ad esempio se $\alpha_0 = {}^{1}/_{\sqrt{2}}$ e $\alpha_1 = {}^{1}/_{\sqrt{2}}$ abbiamo



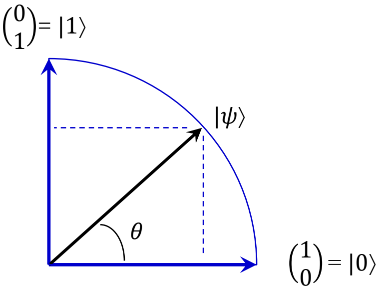
16

16

10-quantum-un-qubit-04

qubit – interpretazione geometrica

- consideriamo ora un generico stato $|\psi\rangle$ con ampiezze (per semplicità) reali ed osserviamo gli angoli della sua rappresentazione geometrica

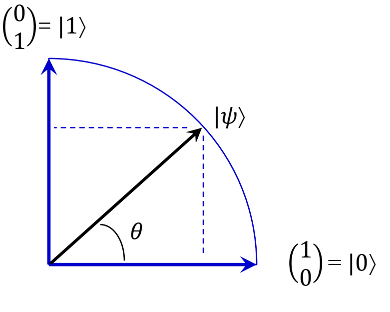


17

17

qubit – interpretazione geometrica

- possiamo esprimere le componenti di $|\psi\rangle$ usando gli angoli che forma con gli assi
- abbiamo che $|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$



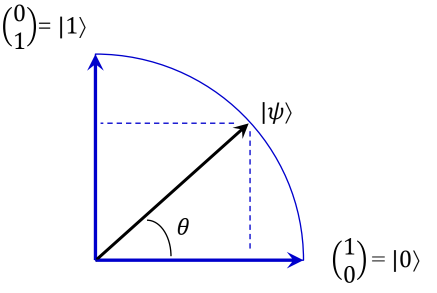
18

18

10-quantum-un-qubit-04

qubit – interpretazione geometrica

- se misuriamo $|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ otteniamo $|0\rangle$ con probabilità $(\cos\theta)^2$e $|1\rangle$ con probabilità $(\sin\theta)^2$

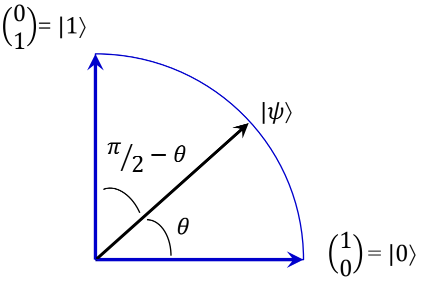


19

19

qubit – interpretazione geometrica

- possiamo riscrivere $(\sin\theta)^2 = (\cos(^{\pi}/_2 - \theta))^2$
- quindi la probabilità di misurare uno $|0\rangle$ o un $|1\rangle$ è data dal coseno al quadrato dell'angolo che lo stato ha con ciascuno di essi



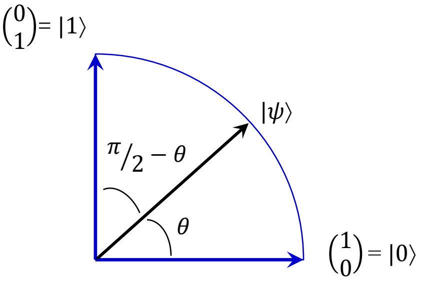
20

20

10-quantum-un-qubit-04

qubit – interpretazione geometrica

- negli esempi ci siamo riferiti finora a valori reali, ma la proporzionalità con il coseno al quadrato rimane anche se i numeri sono complessi

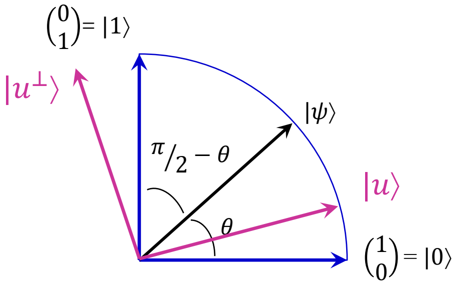


21

21

qubit – basi diverse

- lo stato $|\psi\rangle$ di un qubit esiste indipendentemente dalla base nella quale lo esprimiamo
- possiamo quindi scegliere due versori (perpendicolari) $|u\rangle$ e $|u^{\perp}\rangle$ diversi da $|0\rangle$ e $|1\rangle$ ed esprimere $|\psi\rangle$ in funzione di $|u\rangle$ e $|u^{\perp}\rangle$



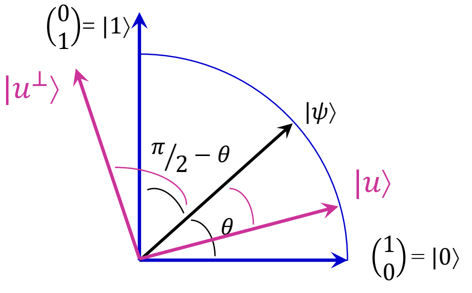
22

22

10-quantum-un-qubit-04

qubit – basi diverse

- la regola che lega la probabilità di misurare uno stato di base o un altro in funzione del coseno dell'angolo che lo stato ha con ciascuno di essi vale anche per versori diversi da $|0\rangle$ e $|1\rangle$

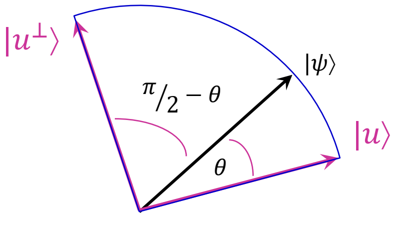


23

23

qubit – basi diverse

- nota: la misura può essere effettuata relativamente a qualunque base



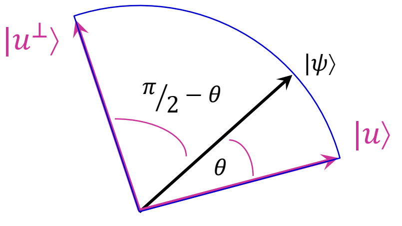
24

24

10-quantum-un-qubit-04

qubit – basi diverse

- quindi la misura di un qubit necessita della specifica della base rispetto alla quale è effettuata
- consideriamo ora il caso generale dei numeri *complessi*



25

25

richiamo – prodotto scalare

- il prodotto scalare tra due vettori (il primo *riga* e il secondo *colonna*) si calcola in questo modo
- $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

26

26

10-quantum-un-qubit-04

richiamo – complesso coniugato

- si ricorda che il complesso coniugato di un numero complesso $\mathrm{z} = x + yi$ è definito come $\bar{\mathrm{z}} = x - yi$

27

27

prodotto scalare tra vettori complessi

- il prodotto scalare tra due vettori complessi $|\varphi\rangle$ e $|\psi\rangle$ si calcola facendo il trasposto coniugato di $|\varphi\rangle$ e calcolando il prodotto scalare con il secondo
- se $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ il suo trasposto coniugato è $(\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \cdots \quad \bar{a}_n)$

28

28

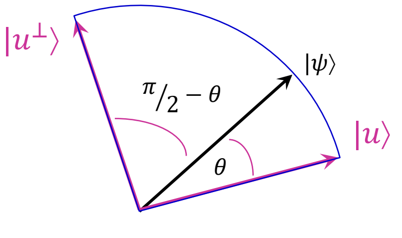
10-quantum-un-qubit-04

un po' di notazione

- mentre $|x\rangle$ denota un vettore colonna
- abbiamo che $\langle x|$ denota un vettore riga

qubit – basi diverse

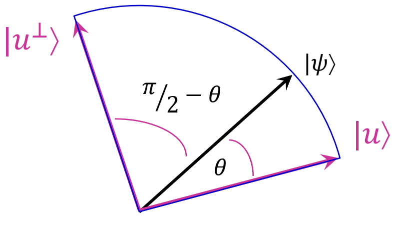
- in generale, la probabilità che la misura di un qubit $|\psi\rangle$ dia un certo versore $|u\rangle$ la possiamo calcolare come *il quadrato del prodotto scalare* tra il versore e il qubit
  - si calcola usando il complesso coniugato del versore



10-quantum-un-qubit-04

qubit – basi diverse

- il prodotto scalare tra $|u\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ e $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ si calcola come
  - $(\overline{\beta_0\ \beta_1})\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{pmatrix} = \overline{\beta_0}\alpha_0 + \overline{\beta_1}\alpha_1$
  - si ricorda che il complesso coniugato di un numero complesso $z = x + yi$ è definito come $\overline{z} = x - yi$

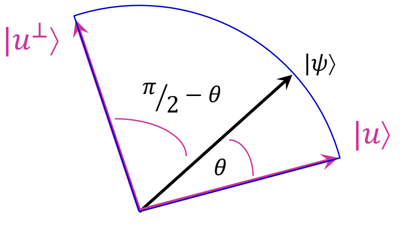


31

31

qubit – basi diverse

- il prodotto scalare tra $|u\rangle$ e $|\psi\rangle$ si denota anche con $\langle u|\psi\rangle$ dove la prima parentesi angolata si chiama *bra* e le seconda *ket* (bra-ket notation, dovuta a Dirac)



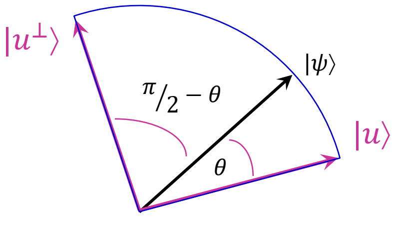
32

32

10-quantum-un-qubit-04

qubit – basi diverse

- quindi la probabilità che la misura di un qubit $|\psi\rangle$ dia un certo versore $|u\rangle$ la possiamo denotare come $|\langle u|\psi\rangle|^2$



33

33

esempio sulla misura

- calcola la probabilità che $|0\rangle$ assuma il valore del versore $|+\rangle = {}^1/_{\sqrt{2}}\,|0\rangle + {}^1/_{\sqrt{2}}\,|1\rangle$
- abbiamo che $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
- quindi $\langle 0|+\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}{}^1/_{\sqrt{2}}\\{}^1/_{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = {}^1/_{\sqrt{2}}$
- e $|\langle 0|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

34

34

10-quantum-un-qubit-04

esempio sulla misura

- calcola la probabilità che $|0\rangle$ assuma il valore del versore $|1\rangle$
- abbiamo che $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- quindi $\langle 0|1\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$
- e $|\langle 0|1\rangle|^2 = 0$

35

35