Informatica Teorica

Cardinalità transfinite

Pidgeonhole principle

teorema:

dati due insiemi A e B tali che

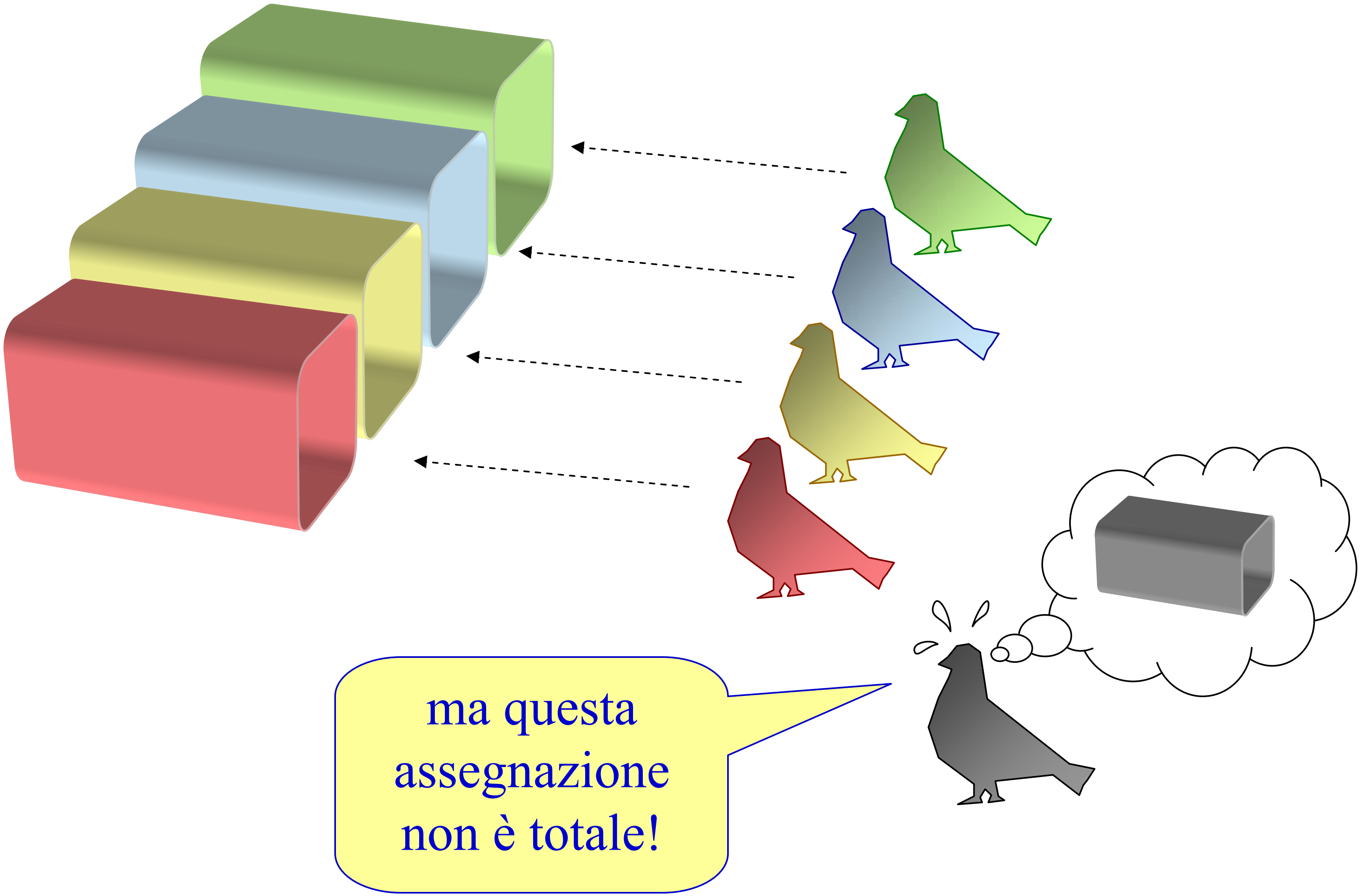
$$0 < |B| < |A| < \infty$$

non esiste una funzione f: $A \rightarrow B$ che sia totale e iniettiva

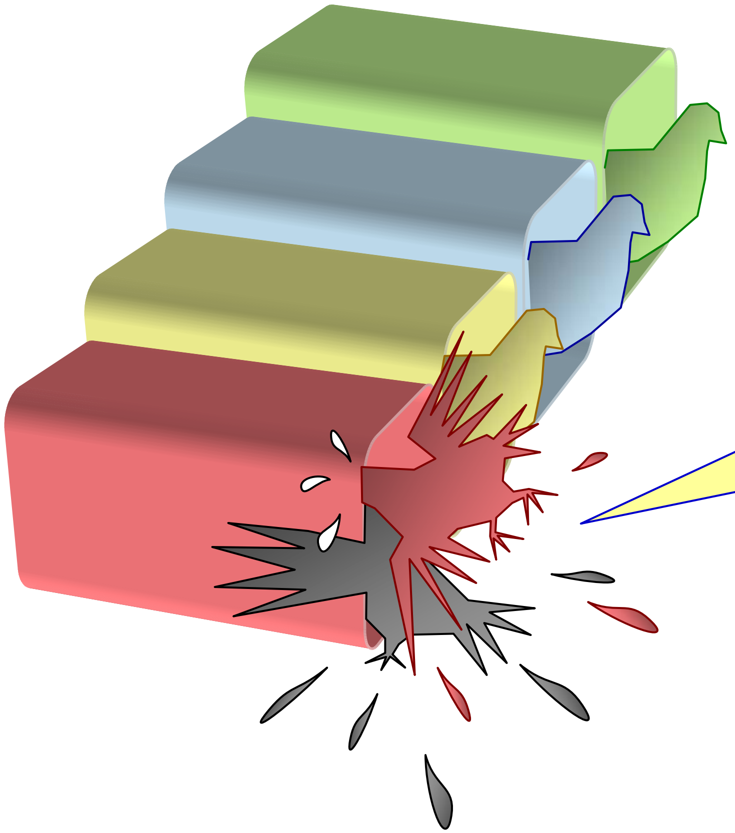
dimostrazione:

basata sulla cardinalità di B e per induzione

Pidgeonhole principle



Pidgeonhole principle



… e questa non è iniettiva!
↯☹☠

Dimostrazione (pidgeonhole principle)

- dimostrazione per induzione
  - passo base: $|B|=1$
  - passo induttivo: $|B|>1$

- passo base ($|B|=1$)

  $B=\{b\}$, $|A|>1$, es. $A=\{a_1,a_2\}$

  se f è totale, allora $f(a_1)=b$ e $f(a_2)=b$

  allora f non è iniettiva perché $|f^{-1}(b)|>1$

Dimostrazione (pidgeonhole principle)

- passo induttivo: $|B|>1$

  supponiamo sia vero per $|B| = n$ ed $|A| \geq n+1$
  dimostriamo che è vero per $|B| = n+1$ e $|A| \geq n+2$

  ipotizziamo per assurdo che esista una funzione totale iniettiva f e scegliamo un qualunque elemento b di B

  se $|f^{-1}(b)|\geq 2 \Rightarrow$ contraddizione $\Rightarrow$ teorema dimostrato

  se $|f^{-1}(b)|\leq 1$ consideriamo

  $A'=A-\{f^{-1}(b)\}$ e $B'=B-\{b\}$

  $|A'| \geq n+1 > |B'| = n$

  applichiamo l'ipotesi induttiva $\Rightarrow$ contraddizione

Considerazioni sul pidgeonhole principle

- il pidgeonhole principle mette in relazione la numerosità degli insiemi con le proprietà delle funzioni che hanno gli insiemi come domini o codomini
- in particolare se esiste una funzione biettiva

$$f: A \rightarrow B$$

  - esiste una funzione totale ed iniettiva $f: A \rightarrow B$
  - esiste una funzione totale ed iniettiva $f^{-1}: B \rightarrow A$
  - per il pidgeonhole principle non può essere $|B| > |A|$ né $|A| > |B|$

Cardinalità di insiemi infiniti

- due insiemi sono *equinumerosi* se esiste una biiezione tra essi
- la relazione di equinumerosità è una relazione di equivalenza
- possiamo ora dare una definizione rigorosa di *cardinalità di un insieme finito* A:

  $|A|=0$ se $A=\emptyset$

  $|A|=n$ se A è equinumeroso a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

Numerabilità

- insiemi numerabili
  - un insieme è *numerabile* se è equinumeroso a N
  - un insieme ha cardinalità *aleph zero* ($\aleph_0$) se è equinumeroso a N, cioè se è numerabile
- insiemi contabili
  - un insieme è *contabile* se è finito o numerabile
  - sottoinsiemi di insiemi contabili sono contabili

Numerabilità: $\aleph_0 + k = \aleph_0$

teorema:

per ogni intero k, l'insieme N_k degli interi maggiori o uguali a k è numerabile

dimostrazione:

biiezione con N

N:	0	1	2	3	4	…
N_k:	k+0	k+1	k+2	k+3	k+4	…

Numerabilità degli interi relativi

teorema:

l'insieme Z degli interi relativi è numerabile

dimostrazione:

biiezione con N

Z:	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	…
N:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…

Numerabilità dei numeri pari ($\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$)

teorema:

l'insieme P dei numeri pari è numerabile

dimostrazione:

biiezione con N

P:	0	2	4	6	8	10	12	14	16	…
N:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…

Numerabilità: $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

teorema:

l'insieme N^2 delle coppie di naturali è numerabile

dimostrazione:

tecnica usata da Cantor per mostrare la numerabilità di Q

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	3	6	10
1	2	4	7	11	
2	5	8	12		
3	9	13			
4	14				

osservazione:

per ogni $n \in N$, se A è numerabile, anche A^n è numerabile

Insiemi non numerabili

per dimostrare la non numerabilità di un insieme si usa la *tecnica di diagonalizzazione* di Cantor

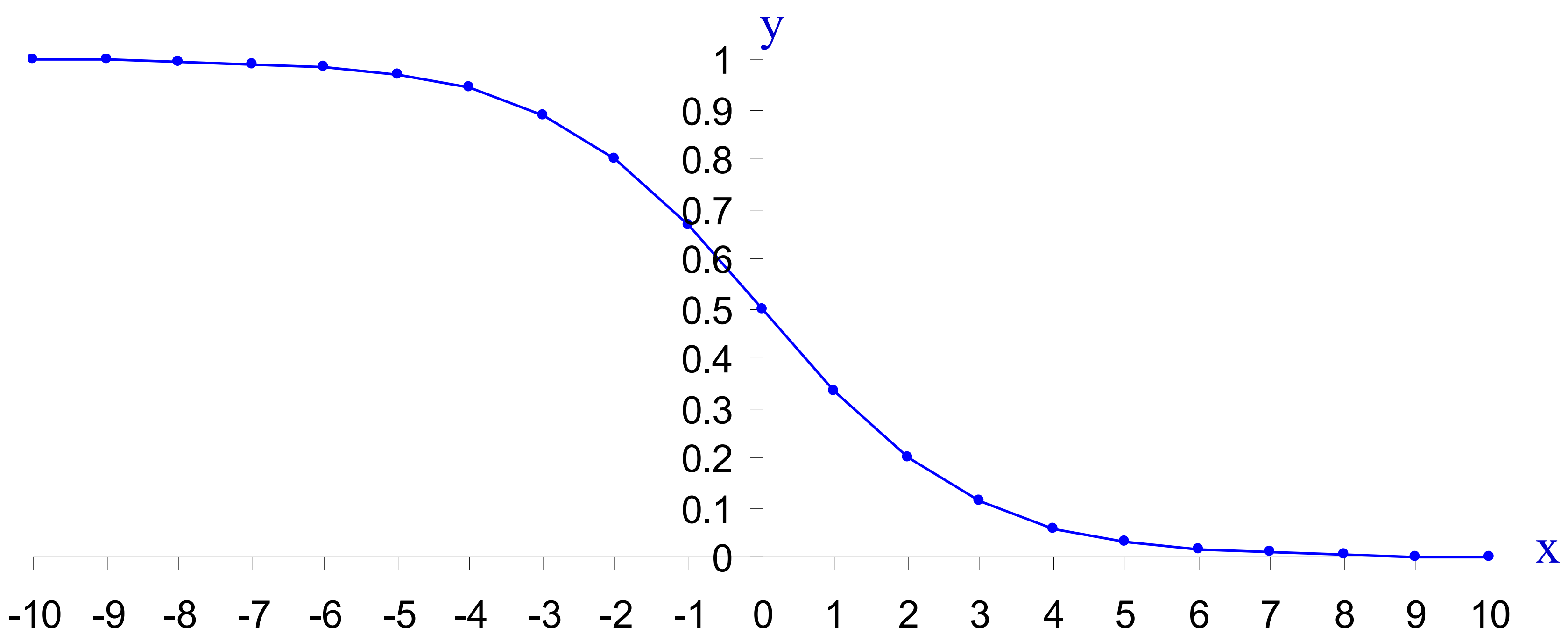
teorema: R non è numerabile

dimostrazione:

1. dimostriamo che R è equinumeroso a (0,1)
2. dimostriamo che (0,1) non è numerabile

Insiemi non numerabili

(0,1) e R sono equinumerosi: una biiezione è data, per esempio, dalla funzione $y = \dfrac{1}{(2^x+1)}$



Insiemi non numerabili

- Supponiamo per assurdo che una enumerazione di (0,1) esista, denotiamo con Φ_i l'iesimo elemento di (0,1)
- consideriamo $r \in (0,1)$ che ha come i-esima cifra della mantissa (i=1, 2, …) un valore diverso da 0, da 9, e dal valore della i-esima cifra di Φ_i

Insiemi non numerabili

cifre delle mantisse di Φ_i :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
$\boldsymbol{\Phi_1}$	5	1	0	4	3	9	6	…
$\boldsymbol{\Phi_2}$	2	4	1	0	0	0	0	…
$\boldsymbol{\Phi_3}$	7	9	8	5	3	7	7	…
$\boldsymbol{\Phi_4}$	0	0	4	6	0	3	1	…

r	6	5	1	7	…	…	…	…

r, detto *elemento diagonale*, non fa parte della enumerazione, in quanto differisce da ogni elemento della enumerazione in almeno una cifra, e ciò è assurdo

Nota sulla scelta delle cifre di **r**

- le cifre dell'elemento diagonale **r** sono scelte in modo da essere diverse da 0 e da 9
  - non si può generare la mantissa 0000… che non appartiene all'insieme
  - non si possono generare numeri terminanti con 9 periodico che corrispondono ad una seconda rappresentazione di un numero non-periodico
    - 0.999… coincide con 1
    - 0.123999… coincide con 0.124

Insiemi non numerabili

teorema: P(N) non è numerabile

dimostrazione:

supponiamo per assurdo che lo sia

sia $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ una sua enumerazione

a ciascun P_i associamo la sequenza

$b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \ldots$, dove

$$b_{ij}=0 \text{ se } j \notin P_i$$
$$b_{ij}=1 \text{ se } j \in P_i$$

Insiemi non numerabili

costruiamo ora l'insieme **P** (diagonale) con sequenza p_0, p_1, …, p_k,… dove

$$p_k = 1 - b_{kk}$$

P differisce da ogni P_i, in quanto

$$i \in P \Leftrightarrow i \notin P_i$$

osservazione: la non numerabilità di P(N) vale anche per l'insieme delle parti di ogni insieme di cardinalità $\aleph_0$

Cardinalità transfinite

teorema: R è equinumeroso a P(N) ed è quindi continuo

dimostrazione:

è sufficiente mostrare che la proprietà vale per i reali in (0,1), vista la biiezione tra R e (0,1)

uso della rappresentazione binaria della mantissa e del concetto di funzione caratteristica

Cardinalità transfinite – notazione aleph

- se un insieme finito ha cardinalità *n*, il suo insieme delle parti ha cardinalità 2^n
- analogamente, se un insieme infinito ha cardinalità $\aleph_0$ denotiamo con $2^{\aleph_0}$ la cardinalità del suo insieme delle parti
- gli insiemi con cardinalità $2^{\aleph_0}$ sono detti *continui*
- Cantor ha dimostrato che esistono infiniti cardinali transfiniti ($\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, …)

Conseguenze della teoria

- vedremo come considerazioni relative alla cardinalità di insiemi infiniti daranno interessanti spunti sull'idea di calcolabilità
- per il momento ci limitiamo alla seguente riflessione
  - un linguaggio è un sottoinsieme di Σ^*
    - qual è la cardinalità di Σ^*?
    - qual è la cardinalità di $P(\Sigma^*)$?
    - quanti linguaggi esistono?
  - un programma in un linguaggio di programmazione qualsiasi può essere considerato come una sequenza finita di caratteri
    - quanti sono i possibili programmi che possiamo scrivere?