L16: Endomorfismi (30)

Argomenti lezione:

- Introduzione
- Endomorfismi
- Cambiamento di base
- Esercizi

marcella.sama@uniroma3.it

Introduzione

Obiettivo lezione:

Studiare particolari omomorfismi di spazi vettoriali in cui lo spazio di partenza e lo spazio di arrivo **coincidono.**

Vedremo:

Come rappresentare questi omomorfismi per mezzo di **matrici**.

Stabiliremo come variano le matrici rappresentative al **variare delle basi** scelte.

Definizione: Dato uno spazio vettoriale V, un **endomorfismo** di V è un omomorfismo $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$.

Segue che possiamo utilizzare per gli endomorfismi le stesse definizioni e gli stessi risultati visti per gli omomorfismi.

marcella.sama@uniroma3.it

Endomorfismo

marcella.sama@uniroma3.it

Endomorfismi

Definizione: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Fissata una base di V, formata dai vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$, possiamo esprimere ciascun vettore $f(e_j)$ come combinazione lineare dei vettori della base $e_1, e_2, \dots, e_n$:

$$f(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n$$

$$\boxed{f(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots + a_{n2} e_n}$$

$$\dots$$

$$f(e_n) = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice A di $M(n, n, R)$ è **associata all'endomorfismo** (ovvero è **matrice rappresentativa** di) $\boldsymbol{f}$ rispetto alla base $e_1, e_2, \dots, e_n$.

La j-esima colonna di A è data dalle componenti del vettore $f(e_j)$ rispetto alla base formata da $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Endomorfismi

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita.
Sia data una base per V formata dai vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$.
Se A è una matrice di $M(n, n, R)$, chiamiamo **endomorfismo associato alla matrice A** rispetto alle basi fissate l'omomorfismo f :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} f(e_1) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n \\ f(e_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots + a_{n2} e_n \\ \ldots \\ f(e_n) = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \ldots + a_{nn} e_n \end{array}$$

Vale a dire l'endomorfismo f la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi assegnate è esattamente la matrice A.

Endomorfismi

Esercizio: Consideriamo l'endomorfismo $f : R^3[x] \rightarrow R^3[x]$:

$f(a + bx + cx^2) := (3a + c) + (a + b)\,x + c\,x^2$

Se vogliamo ora determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica, dobbiamo determinare le immagini dei vettori della base canonica e decomporli rispetto alla base canonica stessa.

$$f(1) = 3 + x = \mathbf{3}\ 1 + \mathbf{1}\ x + \mathbf{0}\ x^2$$

$$f(x) = x = \mathbf{0}\ 1 + \mathbf{1}\ x + \mathbf{0}\ x^2$$

$$f(x^2) = 1 + x^2 = \mathbf{1}\ 1 + \mathbf{0}\ x + \mathbf{1}\ x^2$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è allora:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Endomorfismi

Esercizio: Consideriamo l'endomorfismo $f : R^3 [x] \rightarrow R^3 [x]$:

$f(a + bx + cx^2) := (3a + c) + (a + b)\, x + c\, x^2$

Ora vogliamo rappresentare f rispetto a un'altra base, ovvero quella formata dai polinomi $p_1(x) := 1 + x + x^2$, $p_2(x) := 1 + x$, $p_3(x) := 1$.

Calcolando le immagini di tali vettori, si ha: $f(p_1(x)) = 4 + 2x + x^2$.

[$f(\, p_1(x)\,) = f(\, 1 + x + x^2\,)$ da cui $a = b = c = 1$ segue $4 + 2x + x^2$]

Endomorfismi

<u>Esercizio</u>: Consideriamo l'endomorfismo $f : R^3[x] \to R^3[x]$:

$f(a + bx + cx^2) := (3a + c) + (a + b)\,x + c\,x^2$

Ora vogliamo rappresentare f rispetto a un'altra base, ovvero quella formata dai polinomi $p_1(x) := 1 + x + x^2$, $p_2(x) := 1 + x$, $p_3(x) := 1$.

Calcolando le immagini di tali vettori, si ha: $f(p_1(x)) = 4 + 2x + x^2$.

Decomponiamo $f(p_1(x))$ rispetto alla base: $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$.

$$f(p_1(x)) = 4 + 2x + x^2 = \mathbf{1}(1 + x + x^2) + \mathbf{1}(1 + x) + \mathbf{2}\ \ 1$$

Analogamente: $f(p_2(x)) = 3 + 2x = \mathbf{0}(1 + x + x^2) + \mathbf{2}(1 + x) + \mathbf{1}\ \ 1$

$$f(p_3(x)) = \quad 3 + x = \mathbf{0}(1 + x + x^2) + \mathbf{1}(1 + x) + \mathbf{2}\ \ 1$$

Dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai polinomi $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ è $\boldsymbol{A'}$:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Endomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia $f : M(2, 2, R) \to M(2, 2, R)$ l'endomorfismo:

$f(A) := A + {}^tA$

Determinare la matrice A rappresentativa di f rispetto alla base:

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(E_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4,$$

$$f(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + E_2 + E_3 + 0E_4,$$

$$f(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_1 + E_2 + E_3 + 0E_4,$$

$$f(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 2E_4.$$

$$\Rightarrow A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A <u>non</u> è una matrice diagonale

Endomorfismi

Esercizio: Sia $f : M(2, 2, R) \rightarrow M(2, 2, R)$ l'endomorfismo:

$f(A) := A + {}^tA$

Determinare la matrice A' rappresentativa di f rispetto alla base:

$$E'_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E'_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E'_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E'_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E'_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E'_1 + 0E'_2 + 0E'_3 + 0E'_4,$$

$$f(E'_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E'_1 + 0E'_2 + 0E'_3 + 0E'_4,$$

$$f(E'_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0E'_1 + 0E'_2 + 2E'_3 + 0E'_4,$$

$$f(E'_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0E'_1 + 0E'_2 + 0E'_3 + 2E'_4.$$

$$\Rightarrow A' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A' è una **matrice diagonale**

marcella.sama@uniroma3.it

Cambiamento di base

Cambiamento di base

Abbiamo visto nel precedente esercizio che, cambiando base, cambia la matrice rappresentativa dell'endomorfismo.

Ci chiediamo, *in generale*, come cambia tale matrice.

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n. Si considerino due basi di V :

una base formata dai vettori e_1 , e_2 , … , e_n

l'altra base formata dai vettori e_1', e_2', … , e_n'

La matrice $\boldsymbol{M}$ in $M(n, n, R)$ la cui j-esima colonna è data dalle componenti del vettore e_j' rispetto alla base formata dai vettori e_1 , e_2 , … , e_n è detta **matrice di passaggio** dalla base formata da e_1 , e_2 , … , e_n alla base formata da e_1', e_2', … , e_n'.

marcella.sama@uniroma3.it

Cambiamento di base

Esercizio: Consideriamo di nuovo lo spazio vettoriale $R^3[x]$,
la sua base canonica: $q_1(x) := 1,\ q_2(x) := x,\ q_3(x) := x^2$
e la base formata da $p_1(x) := 1 + x + x^2,\ p_2(x) := 1 + x,\ p_3(x) := 1.$

Per trovare la matrice $\boldsymbol{M}$ di passaggio dalla base canonica alla seconda base dobbiamo esprimere ciascuno dei $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ come combinazione lineare dei $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$. Abbiamo:

$$p_1(x) = \mathbf{1}\ q_1(x) + \mathbf{1}\ q_2(x) + \mathbf{1}\ q_3(x)$$
$$p_2(x) = \mathbf{1}\ q_1(x) + \mathbf{1}\ q_2(x) + \mathbf{0}\ q_3(x)$$
$$p_3(x) = \mathbf{1}\ q_1(x) + \mathbf{0}\ q_2(x) + \mathbf{0}\ q_3(x)$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cambiamento di base

Teorema: La matrice di passaggio $\boldsymbol{M}$ da una base di uno spazio vettoriale V a un'altra base è invertibile.

Dimostrazione: Se M è la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ alla base formata dai vettori $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, le colonne di M danno le componenti di $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ rispetto alla base formata dai vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Sappiamo che il rango di M è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori $e_1', e_2', \ldots, e_n'$.

Poiché i vettori $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ formano una base per V abbiamo che $rk\ M = dim\ V$, ovvero $det\ M \neq 0$, ovvero M è invertibile.

Cambiamento di base

<u>Teorema</u>: Date due basi di uno spazio vettoriale V sia M la matrice di passaggio dalla prima base alla seconda base. La matrice di passaggio dalla seconda base alla prima base è allora $\boldsymbol{M^{-1}}$.

<u>Esempio</u>: Consideriamo di nuovo lo spazio vettoriale $R^3[x]$,

la sua base canonica: $q_1(x) := 1,\ q_2(x) := x,\ q_3(x) := x^2$

e la base formata da $p_1(x) := 1 + x + x^2,\ p_2(x) := 1 + x,\ p_3(x) := 1$.

La matrice M di passaggio dalla base canonica alla seconda base è:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Domanda</u>: Come si determina la matrice M' di passaggio dalla seconda base alla base canonica?

Cambiamento di base

<u>Esempio (seguito)</u>: base canonica: $q_1(x) := 1$, $q_2(x) := x$, $q_3(x) := x^2$ e base formata da $p_1(x) := 1 + x + x^2$, $p_2(x) := 1 + x$, $p_3(x) := 1$.

<u>Domanda</u>: Come si determina la matrice M' di passaggio dalla seconda base alla base canonica?

Esprimiamo i polinomi della base canonica come combinazione lineare dei polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$:

- Poiché $q_1(x) = p_3(x)$ allora $q_1(x) = \mathbf{0}\, p_1(x) + \mathbf{0}\, p_2(x) + \mathbf{1}\, p_3(x)$.
- Per decomporre $q_2(x)$ effettuiamo i seguenti passaggi:

$x = h_1(1 + x + x^2) + h_2(1 + x) + h_3(1) = (h_1+h_2+h_3) + (h_1+h_2)x + h_1x^2$

$h_1+h_2+h_3 = 0$, $h_1+h_2 = 1$, $h_1 = 0$ da cui: $h_1 = \mathbf{0}$, $h_2 = \mathbf{1}$, $h_3 = \mathbf{-1}$.

- Per decomporre $q_3(x)$ effettuiamo i seguenti passaggi:

$x^2 = h_1(1 + x + x^2) + h_2(1 + x) + h_3(1) = (h_1+h_2+h_3) + (h_1+h_2)x + h_1x^2$

$h_1+h_2+h_3 = 0$, $h_1+h_2 = 0$, $h_1 = 1$ da cui: $h_1 = \mathbf{1}$, $h_2 = \mathbf{-1}$, $h_3 = \mathbf{0}$.

Cambiamento di base

Esprimiamo i polinomi della base canonica come combinazione lineare dei polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$:

- Poiché $q_1(x) = p_3(x)$ allora $q_1(x) = \mathbf{0}\, p1(x) + \mathbf{0}\, p_2(x) + \mathbf{1}\, p_3(x)$.
- Per decomporre $q_2(x)$ effettuiamo i seguenti passaggi:

$x = h_1(1 + x + x^2) + h_2(1 + x) + h_3(1) = (h_1+h_2+h_3) + (h_1+h_2)x + h_1x^2$

$h_1+h_2+h_3 = 0$, $h_1+h_2 = 1$, $h_1 = 0$ da cui: $h_1 = \mathbf{0}$, $h_2 = \mathbf{1}$, $h_3 = \mathbf{-1}$.

- Per decomporre $q_3(x)$ effettuiamo i seguenti passaggi:

$x^2 = h_1(1 + x + x^2) + h_2(1 + x) + h_3(1) = (h_1+h_2+h_3) + (h_1+h_2)x + h_1x^2$

$h_1+h_2+h_3 = 0$, $h_1+h_2 = 0$, $h_1 = 1$ da cui: $h_1 = \mathbf{1}$, $h_2 = \mathbf{-1}$, $h_3 = \mathbf{0}$.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $M\,M' = I$, cioè $\boldsymbol{M' = M^{-1}}$

Cambiamento di base

<u>Teorema</u>: Sia f un endomorfismo di V di dimensione finita.
Sia A la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$. Sia A' la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata dai vettori $e_1', e_2', \dots, e_n'$. Sia M la matrice di passaggio dalla base formata dai vettori $e_1, e_2, \dots, e_n$ alla base formata dai vettori $e_1', e_2', \dots, e_n'$. Allora si ha: $\boldsymbol{A' = M^{-1} A M}$

<u>Esercizio</u>: Prendiamo di nuovo l'endomorfismo $f : R^3[x] \to R^3[x]$:
$f(a + bx + cx^2) := (3a + c) + (a + b)x + cx^2$. Calcolare $A' = M^{-1} A M$.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica

matrice rappresentativa di f rispetto ad un'altra base

matrice di passaggio

Cambiamento di base

<u>Esercizio</u>: Sia $f: R^2 \to R^2$ l'endomorfismo che rispetto alla base canonica di R^2 [ovvero $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$] si rappresenta con la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vogliamo determinare la matrice rappresentativa A' di f rispetto alla base di R^2 formata dai vettori $e_1' := (1, 2)$, $e_2' := (1, -1)$.

Calcoliamo la matrice di passaggio dalla base canonica all'altra base:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= 1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2' &= 1\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2. \end{aligned} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A' = M^{-1}AM}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cambiamento di base

Esercizio: Sia $f : R^2 \to R^2$ l'endomorfismo che rispetto alla base canonica di R^2 [ovvero $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$] si rappresenta con la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vogliamo *di nuovo* determinare la matrice rappresentativa A' di f rispetto alla base di R^2 formata dai vettori $e_1' := (1, 2)$, $e_2' := (1, -1)$.

- Stavolta usiamo la definizione di matrice rappresentativa:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le componenti di $\boldsymbol{e_1}'$ rispetto alla base canonica sono (1, 2)

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{e}_1') = -2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 = (-2, 3)$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{e}_1') = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1' - \frac{7}{3}\boldsymbol{e}_2'$$

Decomponiamo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e_1}')$ rispetto alla base formata dai vettori e_1' e e_2'.

Cambiamento di base

Esercizio: Sia $f : R^2 \to R^2$ l'endomorfismo che rispetto alla base canonica di R^2 [ovvero $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$] si rappresenta con la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vogliamo *di nuovo* determinare la matrice rappresentativa A' di f rispetto alla base di R^2 formata dai vettori $e_1' := (1, 2)$, $e_2' := (1, -1)$.

• Stavolta usiamo la definizione di matrice rappresentativa:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le componenti di $\boldsymbol{e_2}'$ rispetto alla base canonica sono $(1, -1)$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{e}_2') = \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1' + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2'$$

Decomponiamo $\boldsymbol{f(e_2')}$ rispetto alla base formata dai vettori e_1' e e_2'.

Cambiamento di base

Esercizio: Sia $f: R^2 \to R^2$ l'endomorfismo che rispetto alla base canonica di R^2 [ovvero $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$] si rappresenta con la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vogliamo *di nuovo* determinare la matrice rappresentativa A' di f rispetto alla base di R^2 formata dai vettori $e_1' := (1, 2)$, $e_2' := (1, -1)$.

• Stavolta usiamo la definizione di matrice rappresentativa:

$$\Rightarrow \quad f(e_1') = \frac{1}{3}e_1' - \frac{7}{3}e_2'$$

$$\Rightarrow \quad f(e_2') = e_1 = \frac{1}{3}e_1' + \frac{2}{3}e_2'$$

$$\Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cambiamento di base

Il teorema appena visto ci dice che se due matrici A e B rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse ,
allora esiste una matrice invertibile $\boldsymbol{M}$ tale che $\boldsymbol{B = M^{-1} A\, M}$.

Definizione: Siano date due matrici A e B appartenenti a $M\,(n, n, R)$.
La matrice B si dice **simile** alla matrice A se e solo se esiste una matrice $\boldsymbol{M}$ in $GL(n, R)$ [insieme delle matrici invertibili di $M\,(n, n, R)$] tale che $\boldsymbol{B = M^{-1} A\, M}$.

Segue che le matrici rappresentative di uno stesso endomorfismo sono *tutte simili fra loro*.

Endomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia f l'endomorfismo di R^3 definito dalle condizioni:

$$f(\boldsymbol{e}'_1) = (1,1,1)$$
$$f(\boldsymbol{e}'_2) = (1,1,1)$$
$$f(\boldsymbol{e}'_3) = (1,1,1)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base formata da:

$\boldsymbol{e}'_1 := (1,-1,0)$, $\boldsymbol{e}'_2 := (1,0,-1)$, $\boldsymbol{e}'_3 := (1,1,1)$

$$f(\boldsymbol{e}'_1) = 0\boldsymbol{e}'_1 + 0\boldsymbol{e}'_2 + 1\boldsymbol{e}'_3$$
$$f(\boldsymbol{e}'_2) = 0\boldsymbol{e}'_1 + 0\boldsymbol{e}'_2 + 1\boldsymbol{e}'_3$$
$$f(\boldsymbol{e}'_3) = 0\boldsymbol{e}'_1 + 0\boldsymbol{e}'_2 + 1\boldsymbol{e}'_3$$

$$\Rightarrow \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Endomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia f l'endomorfismo di R^3 definito dalle condizioni:

$$f(\boldsymbol{e}'_1) = (1,1,1) \qquad \boldsymbol{e}'_1 := (1,-1,0),\ \boldsymbol{e}'_2 := (1,0,-1),\ \boldsymbol{e}'_3 := (1,1,1)$$

$$f(\boldsymbol{e}'_2) = (1,1,1)$$

$$f(\boldsymbol{e}'_3) = (1,1,1)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla <u>base canonica</u>.

$$(1,0,0) = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_3,$$

$$(0,1,0) = -\frac{2}{3}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_3, \quad \Longrightarrow \quad M := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(0,0,1) = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}'_3.$$

$$A' = M^{-1}AM \quad \Longrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Endomorfismi

Esercizio: Sia f l'endomorfismo di R^3 definito dalle condizioni:

$$f(\boldsymbol{e}'_1) = (1,1,1) \qquad \boldsymbol{e}'_1 := (1,-1,0),\ \boldsymbol{e}'_2 := (1,0,-1),\ \boldsymbol{e}'_3 := (1,1,1)$$

$$f(\boldsymbol{e}'_2) = (1,1,1)$$

$$f(\boldsymbol{e}'_3) = (1,1,1)$$

Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

Per evitare di calcolare M^{-1}, possiamo (in alternativa) calcolare:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_1) + \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_2) + \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_3) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) = (1,1,1) \\ f(0,1,0) &= -\frac{2}{3}f(\boldsymbol{e}'_1) + \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_2) + \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_3) \\ &= -\frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) = (0,0,0) \\ f(0,0,1) &= \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_1) - \frac{2}{3}f(\boldsymbol{e}'_2) + \frac{1}{3}f(\boldsymbol{e}'_3) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,1,1) = (0,0,0) \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Endomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia f l'endomorfismo di R^4 e A la matrice rispetto alla base: $\boldsymbol{e}_1 := (1,1,0,0), \boldsymbol{e}_2 := (0,1,2,0), \boldsymbol{e}_3 := (0,1,1,-1), \boldsymbol{e}_4 := (0,2,0,1)$

Determinare nucleo e immagine di f

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'<u>immagine</u> di f è generata da :

$$1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4 = (1,2,1,-1)$$

$$\Rightarrow \quad 0\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 + 0\boldsymbol{e}_4 = (0,3,4,-2)$$

$$0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3 + 1\boldsymbol{e}_4 = (0,2,0,1)$$

Endomorfismi

<u>Esercizio</u>: Sia f l'endomorfismo di R^4 e A la matrice rispetto alla base: $\boldsymbol{e}_1 := (1,1,0,0), \boldsymbol{e}_2 := (0,1,2,0), \boldsymbol{e}_3 := (0,1,1,-1), \boldsymbol{e}_4 := (0,2,0,1)$

Determinare nucleo e immagine di f

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il <u>nucleo</u> di f si trova risolvendo il sistema omogeneo associato ad A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Le soluzioni sono $(-2t, -t, -t, t)$

Per $t = 1$ si ha: $(-2, -1, -1, 1)$

Una base del nucleo è:

$$-2\boldsymbol{e}_1 - 1\boldsymbol{e}_2 - 1\boldsymbol{e}_3 + 1\boldsymbol{e}_4 =$$
$$= (-2, -2, -3, 2)$$