Лекции по глобальной оптимизации

(119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН)
e-mail: mposypkin@gmail.com

Оглавление

Глава 1

Общая постановка задачи оптимизации

1.1 Основные обозначения

$B(\delta, c) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - c\| \leq \delta\}$ — шар радиуса δ с центром в точке c.

1.2 Общая постановка и основные понятия

В общем виде задача глобальной оптимизации состоит в нахождении минимума (максимума) функции $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на заданном множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, которое называется *допустимым множеством*. Задачу глобальной оптимизации в общем виде можно записать следующим образом:

$$f(x) \to \min, x \in X. \tag{1.1}$$

Множество X может быть задано различными способами. Приведем несколько возможных формулировок.

Следует отличать задачи глобальной оптимизации от задач локальной оптимизации.

Таблица 1.1. Различные варианты задания допустимого множества.

$X = \{x \in \mathbb{R}^n \| a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n\}$	параллелепипедные ограничения
$X = \{x \in \mathbb{R}^n \| g_j(x) \leq 0, \}, j = 1, \ldots, m\}$	функциональные ограничения типа неравенства
$X = \{x \in \mathbb{Z}^n \| g_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, m\}$	задачи дискретной оптимизации

Определение 1 ***Глобальным минимумом*** *функции $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется точка $x^* \in X$ такая, что $f(x_*) \leq f(x)$ для всех $x \in X$.*

Точку, в которой достигается глобальный минимум, будем обозначать через x^* .

Определение 2 ***Локальным минимумом*** *функции $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется точка $x^{loc} \in X$ такая, что $f(x^{loc}) \leq f(x)$ для всех $x \in B(\delta, x^{loc}) \cap X$ для некоторого $\delta > 0$.*

Найти глобальный оптимум удается далеко не для каждой задачи. Поэтому вводится понятие приближенного решения.

Определение 3 Допустимая точка $x^\varepsilon \in X$ называется ***глобальным ε-минимумом*** *исходной задачи (1.1), если $f(x^\varepsilon) \geq f(x_*) \geq f(x^\varepsilon) - \varepsilon$.*

Важными понятиями, широко применяемыми в методах глобальной оптимизации, являются понятия миноранты и мажоранты.

Определение 4 ***Минорантой (мажорантой) функции*** *$f(x)$ на множестве X называется функция $g(x)$ такая что, $f(x) \geq g(x)$ ($f(x) \leq g(x)$) для всех $x \in X$.*

Миноранта (мажоранта) $g(x)$ функции $f(x)$ называется опорной в точке $c \in X$, если $f(c) = g(c)$.

Пример 1 Функция $4x-3$ является опорной минорантой, а функция x^4 — опорной мажорантой для функции $f(x) = 2x^2 - 1$ в точке $c = 1$. При этом $X = (-\infty, +\infty)$.

1.3 Теория покрытий и метод ветвей и границ

Определение 5 Пусть $\mu(x)$ — миноранта функции $f(x)$ на множестве Y. Будем говорить, что подмножество Y ***ε-минорируется точкой*** *x, если $\min_{y\in Y} \mu(y) \geq f(x) - \varepsilon$.*

Теорема 1 Если $\{X_1, \ldots, X_k\}$ — совокупность множеств, ε-минорируемых точками $R = \{x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ и пусть точка некоторая точка глобального минимума принадлежит объединению этих множеств: $x^* \in \cup_{j=1}^k X_j$. Тогда точка $x^\varepsilon \in R$, такая что $f(x^\varepsilon) = \min_{x\in R} f(x)$ будет глобальным ε-минимумом задачи (1.1).

Доказательство. Найдется такое $j \in 1, \dots, k$, что $x^* \in X_j$. Тогда

$$f(x^*) \geq f(x^{(j)}) - \varepsilon \geq f(x^\varepsilon) - \varepsilon,$$

что по определению и означает глобальную ε-минимальность точки x^ε.
□

Метод ветвей и границ (МВГ) является базовой схемой для реализации многих алгоритмов глобальной оптимизации. Основная идея метода состоит в том, чтобы декомпозировать исходную задачу на подзадачи. Подзадача исключается из дальнейшего рассмотрения, если выполнено *правило отсева*. В чем состоят правила отсева будет детально объяснено далее. Рассмотрим общую схему МВГ для задачи оптимизации в постановке (1.1).

Правила отсева — это правила, позволяющие не обрабатывать подзадачу, если ее решение не приведет к улучшению уже ранее найденного допустимого решения, т.н. *рекорда.* Определим базовое правило отсева по рекорду. Пусть требуется найти ε-решение задачи 1.1. Рассмотрим подзадачу S исходной задачи вида:

$$f(x) \to \min, x \in Y, \tag{1.2}$$

где Y — некоторое непустое подмножество X.

Определение 6 Подзадача S удовлетворяет правилу отсева по рекорду, если множество Y ε-минорируется рекордом x_r.

Общая схема метода ветвей и границ выглядит следующим образом:

1. Поместить в список подзадач Q исходную задачу.

2. Установить начальное значение рекорда $f_r = +\infty$

3. Если $Q = \varnothing$ то завершить программу.

4. Извлечь из списка Q подзадачу S.

5. Обновить рекорд, сравнив его некоторой точкой y из допустимого множества Y подзадачи S. Если $f_r > f(y)$, то положить $x_r = y$, $f_r = f(x_r)$.

6. Проверить выполнение правил отсева для S. Если хотя бы одно правило выполнено, перейти к шагу 2.

7. Разбить S на две подзадачи, которые поместить в список Q и выполнить переход к шагу 2.

Алгоритм заканчивается, когда список подзадач становится пустым. Очевидно, что объединение множеств, соответствующих отсеянным подзадачам, полностью покроет допустимое множество X. Согласно теореме, найденный рекорд x_r будет глобальным ε-минимумом исходной задачи.

Глава 2

Оптимизация непрерывных одномерных функций

Эта глава посвящена исследованию следующей задачи. Дана непрерывная функция $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Требуется найти минимум этой функции на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) \to \min, x \in [a, b]. \tag{2.1}$$

2.1 Липшицева одномерная оптимизация

Определение 7 Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, если существует такое положительное действительное число L, что

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \text{ для любых } x, y \in [a, b]. \tag{2.2}$$

Величину L принято называть константой Липшица для функции $f(x)$. Заметим, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2.2), то $\mu(x) = f(c) - L|c - x|$ будет минорантой, а $\nu(x) = f(c) + L|c - x|$ — мажорантой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ для любого $c \in [a, b]$.

Утверждение 1 Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию (2.2)*. Тогда для любых $c \in [a, b], x \in [a, b]$ справедливо соотношение:*

$$f(c) - L|x - c| \leq f(x) \leq f(c) + L|x - c|.$$

Константа Липшица определяется неоднозначно. Если L — константа Липшица для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$, то любое число $L' > L$ также будет константой Липшица для $f(x)$. Таким образом существует

L^* — точная нижняя грань всех констант Липшица для функции $f(x)$ на заданном интервале $[a, b]$, которая также является константой Липшица. Эту величину мы будем называть *минимальной константой Липшица.*

2.1.1 Липшицевы оценки

Рассмотрим функцию $f(x)$ на интервале $[a, b]$. Пусть L — константа Липшица для этой функции на $[a, b]$. Наиболее простой является *центральная Липшицева оценка*, свойства которой сформулированы в следующем утверждении.

Утверждение 2 Для любой точки c из интервала $[a, b]$ функция $g_c(x) = f(c) - L|x - c|$ будет минорантой, а функций $G_c(x) = f(c) + L|x - c|$ — мажорантой для $f(x)$. При этом, минимум миноранты g_c^* и максимум мажоранты G_c^* вычисляются по формулам

$$g_c^* = f(c) - L\max(c - a, b - c),\ G_c^* = f(c) + L\max(c - a, b - c).$$

Заметим, что значения g_c^* и G_c^* зависят от выбора точки c в интервале $[a, b]$. Следующее утверждение обосновывает интуитивный вывод о том, что оптимально выбирать точку c в центре интервала $[a, b]$.

Утверждение 3 Максимальное значение минимума миноранты составляет

$$g_c^* = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{L(b-a)}{2},$$

минимальное значение максимума мажоранты составляет

$$G_c^* = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{L(b-a)}{2}.$$

Доказательство. Положим $m = (a + b)/2$. Пусть $a \le c < m$. Заметим, что $f(c) \le f(m) + L(m - c)$. Следовательно,

$$g_c^* = f(c) - L\max(c - a, b - c) \le f(m) + L(m - c) - L(b - c) = f(m) - L(b - m).$$

Так как $f(c) \ge f(m) - L(m - c)$, то

$$G_c^* = f(c) + L\max(c - a, b - c) \ge f(m) - L(m - c) + L(b - c) = f(m) + L(b - m).$$

Так как $b - m = (b - a)/2$, то утверждение доказано. □

Альтернативную оценку можно получить с использованием значением на концах интервала. Эта миноранта была впервые предложена Пиявским, поэтому будем обозначать ее индексом p. Из свойств Липшицевости с очевидностью следует, что функция

$$g_p(x) = \max(f(a) - L(x-a), f(b) - L(b-x))$$

будет минорантой, а функция

$$G_p(x) = \min(f(a) + L(x-a), f(b) + L(b-x))$$

мажорантой функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

Несложно установить, что минимум миноранты определяется по формуле:

$$g_p^* = \min_{x \in [a,b]} g(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{L(b-a)}{2} \tag{2.3}$$

и достигается в точке

$$\check{c}_p^* = \frac{f(a) - f(b)}{2L} + \frac{a+b}{2}. \tag{2.4}$$

Максимум мажоранты составляет:

$$G_p^* = \min_{x \in [a,b]} g(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{L(b-a)}{2}$$

и достигается в точке

$$\hat{c}_p^* = \frac{f(b) - f(a)}{2L} + \frac{a+b}{2}.$$

Так как для выпуклой функции $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$, а для вогнутой функции $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4 Если $f(x)$ *— выпуклая функция на интервале* $[a, b]$, *то*

$$g_c^* \leq g_p^*, G_c^* \leq G_p^*.$$

Если $f(x)$ *— вогнутая функция на интервале* $[a, b]$, *то*

$$g_c^* \geq g_p^*, G_c^* \geq G_p^*.$$

Таким образом, центральная нижняя оценка точнее для вогнутой функции и менее точна для выпуклой функции по сравнению с оценкой Пиявского. Для верхней оценки ситуация обратная.

$x_r = a$
$x = a$
повторять
  $x := \min(x + \delta, b)$
  если $f(x) < f(x_r)$ **, тогда**
    $x_r := x$
  конец условия
до тех пор, пока $x < b$;
вернуть x_r

Алгоритм 1: Метод равномерной сетки.

2.1.2 Метод равномерной сетки

Простейшим методом одномерной оптимизации является *метод равномерной сетки.*

Утверждение 5 Решение x_r будет глобальным ε-минимумом для задачи 2.1 с $\varepsilon = \delta L/2$.

Упражнение 1 Докажите утверждение 5.

2.1.3 Метод Евтушенко

Основным недостатком метода равномерной сетки является отсутствие учета значения текущего рекорда. Алгоритм, предложенный Ю.Г. Евтушенко , позволяет уменьшить число итераций за счет более длинного смещения, вычисленного с использованием текущего значения рекорда.

$x_r = a$
$x = a$
повторять
  $x := \min\left(x + \delta + \frac{f(x) - f(x_r)}{L}, b\right)$
  если $f(x) < f(x_r)$ **, тогда**
    $x_r := x$
  конец условия
до тех пор, пока $x < b$;
вернуть x_r

Алгоритм 2: Метод Евтушенко.

Утверждение 6 Решение x_r будет глобальным ε-минимумом для задачи 2.1 с $\varepsilon = \delta L/2$.

Доказательство. Метод Евтушенко генерирует последовательность точек $\{x_i\}$, $x_1 = a$, $x_n = b$. Пусть $x_i \le x^* \le x_{i+1}$. Заметим, что

$$x_{i+1} - x_i \le \delta + \frac{f(x_i) - f(x_r)}{L}, i = 1, \ldots, n-1.$$

Построим миноранту Пиявского для точек x_i, x_{i+1}. Ее минимум вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} g_p^* &= \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{L}{2}(x_{i+1} - x_i) \\ &\ge \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{L}{2}\left(\delta + \frac{f(x_i) - f(x_r)}{L}\right) \\ &= \frac{f(x_{i+1})}{2} + \frac{f(x_r)}{2} - \frac{\delta L}{2} \ge f(x_b) - \frac{\delta L}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$f(x^*) \ge f(x_b) - \frac{\delta L}{2},$$

откуда получим $f(x_b) \le f(x^*) + \frac{\delta L}{2}$. Тем самым утверждение доказано. □

2.1.4 Метод Пиявского

Метод Пиявского является одним из наиболее известных и первых методов одномерной глобальной оптимизации, предложенных в работе . В этом методе на каждом шаге строится выбирается интервал с самым маленьким значением оценки и на нем строится миноранта Пиявского. Процесс продолжается до условия окончания, когда минимум миноранты и рекорд отличаются не более, чем на ε.

В процессе работы алгоритма значение целевой функции вычисляется в различных точках из допустимого множества, в результате чего происходит обновление рекорда x_r. Обозначим через $x_r^{(k)}$ рекордную точку на k-м шаге. Также минимальное значение нижней границы по всем множествам текущего списка на шаге k обозначим через F_k. Пусть $\Delta_k = f\left(x_r^{(k)}\right) - F_k$.

Лемма 1 Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered} f\left(x_r^{(k)}\right) \ge f\left(x_r^{(k+1)}\right), \\ F_k \le F_{k+1}, \\ \Delta_k \ge \Delta_{k+1}. \end{gathered}$$

$c = \frac{f(a)-f(b)}{2L} + \frac{a+b}{2}$
$lb = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{L(b-a)}{2}$
$lst = \{(a, b, c, lb)\}$
$x_r = c$
Пока $lst \neq \varnothing$ **:**
  удалить из lst все элементы с $lb > f(x_r) - \varepsilon$
  выбрать из lst элемент $\{(a^*, b^*, c^*, lb^*)\}$ с минимальным lb'
  $c_1 = \frac{f(a^*)-f(c^*)}{2L} + \frac{a^*+c^*}{2}$
  если $f(c_1) < f(x_r)$ **, тогда**
    $x_r := c_1$
  конец условия
  $lb_1 = \frac{f(a^*)+f(c^*)}{2} - \frac{L(c^*-a^*)}{2}$
  $c_2 = \frac{f(c^*)-f(b^*)}{2L} + \frac{c^*+b^*}{2}$
  если $f(c_2) < f(x_r)$ **, тогда**
    $x_r := c_2$
  конец условия
  $lb_2 = \frac{f(b^*)+f(c^*)}{2} - \frac{L(b^*-c^*)}{2}$
  если $lb_1 < f(x_r) - \varepsilon$ **, тогда**
    $lst := lst \cup \{(a^*, c^*, c_1, lb_1))\}$
  конец условия
  если $lb_2 < f(x_r) - \varepsilon$ **, тогда**
    $lst := lst \cup \{(c^*, b^*, c_2, lb_2))\}$
  конец условия
конец цикла
вернуть x_r

Алгоритм 3: Метод Пиявского.

Лемма 2 Пусть результате декомпозиции подзадачи (a, b, c, lb) в методе Пиявского получаются две подзадачи (a, c, c', lb'), (c, b, c'', lb''). Тогда

$$lb' = lb'' = \frac{f(c) + lb}{2}.$$

Доказательство. Согласно формуле (2.3)

$$lb' = \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{L(c-a)}{2}.$$

По формуле (2.4)

$$c = \frac{f(a) - f(b)}{2L} + \frac{a+b}{2}.$$

Следовательно, $c - a = \frac{f(a)-f(b)}{2L} + \frac{b-a}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} lb' &= \frac{f(a) + f(c)}{2} - \frac{f(a) - f(b)}{4} - \frac{L(b-a)}{4} \\ &= \frac{f(c)}{2} + \frac{f(a) - f(b)}{4} - \frac{L(b-a)}{4} = \frac{f(c) + lb}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $lb'' = \frac{f(c)+lb}{2}$. Лемма доказана.$\square$

Теорема 2 Для метода Пиявского $\Delta_{2k} \le \frac{\Delta_k}{2}$.

Доказательство. Пусть на шаге k в списке A_k находится l_k элементов. Так как на каждом шаге алгоритма добавляется не более одного элемента в список, то $l_k \le k$. Так как на каждом шаге для дробления выбирается подзадача с наименьшей нижней оценкой, то на каком-то шаге t, $k+1 \le t \le k + l_k \le 2k$ наименьшая нижняя оценка F_t будет получена на подзадаче, полученной в результате разбиения какой-то из подзадач списка A_k. Пусть эта подзадача — (a_k, b_k, c_k, lb_k) и она подверглась декомпозиции на шаге s, $k+1 \le s \le t$. Так как для разбиения всегда выбирается подзадача с наименьшей нижней оценкой, то $F_{s-1} = lb_k$. Согласно лемме (2) нижняя оценка двух полученных в результате разбиения подзадач составит

$$F_t = \frac{f(c_k) + lb_k}{2} = \frac{f(c_k) + F_{s-1}}{2}.$$

По определению рекрода, $f\left(x_r^{(s)}\right) \le f(c_k))$. Поэтому $F_t \ge \frac{f\left(x_r^{(s)}\right) + F_{s-1}}{2}$. Применяя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{2k} &\le \Delta_t = f\left(x_r^{(t)}\right) - F_t \le f\left(x_r^{(s)}\right) - F_t \le f\left(x_r^{(s)}\right) - \frac{f\left(x_r^{(s)}\right) + F_{s-1}}{2} \\ &= \frac{f\left(x_r^{(s)}\right) - F_{s-1}}{2} \le \frac{f\left(x_r^{(s-1)}\right) - F_{s-1}}{2} = \frac{\Delta_{s-1}}{2} \le \frac{\Delta_k}{2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.□

2.1.5 Метод Гальперина

Метод Гальперина использует декомпозицию исходной задачи на несколько p подзадач. На каждом шаге производится декомпозиция всех подзадач из списка.

$c = \frac{a+b}{2}$
$\delta = b - a$
$lb = f(c) - \frac{\delta L}{2}$
$lst = \{(a, b, c, lb)\}$
$x_r = c$
Пока $lst \neq \varnothing$ **:**
  $\delta := \delta/p$
  цикл $(a', b', c', lb') \in lst$ **:**
    удалить (a', b', c', lb') из списка
    если $lb' < f(x_r) - \varepsilon$ **, тогда**
      цикл $k \in 1, \ldots, p$ **:**
        $a_k := a' + p(k-1)$
        $b_k := a_k + \delta$
        $c_k := (a_k + b_k)/2$
        если $f(c_k) < f(x_r)$ **, тогда**
          $x_r := c_k$
        конец условия
        $lst := lst \cup \left(a_k, b_k, c_k, f(c_k) - \frac{\delta L}{2}\right)$
      конец цикла
    конец условия
  конец цикла
конец цикла
вернуть x_r

Алгоритм 4: Метод Гальперина.

2.1.6 Общий вид Липшицевой миноранты

Пусть оцениваемая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке $[a, b]$ вычислена в точках $c_1, \ldots, c_k$, $c_i \in [a, b]$. Тогда функция $\phi(x) = \max_{i=1}^{k} f(c_i) - L|x - c_i|$ будет минорантой для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Точка $x_\varepsilon \in [a, b]$ будет ε-глобальными минимумом, если $\min_{x \in [a,b]} \phi(x) \geq f(x_\varepsilon) - \varepsilon$. Действительно, $f(x_\varepsilon) \leq \min_{x \in [a,b]} \phi(x) + \varepsilon \leq \min_{x \in [a,b]} f(x) =$

$f(x_*)$.

*Определение 8 Миноранту $\phi(x)$ назовем **регулярной Липшицевой минорантой**, если все ее локальные минимумы лежат на прямой $y = f(x_*) - \varepsilon$.*

Несложно показать, что если у нас есть две регулярные Липшицевы миноранты, то число точек c_i на отрезке $[a, b]$ у этих двух минорант отличается не больше чем на 1.

Алгоритм построения регулярной Липшицевой миноранты, приведенный далее, имеет только теоретическое значение, т.к. требует нахождения корня уравнения и знания оптимума решаемой задачи.

$x := root(a, f(a) + L(x - a) = f(x))$

Пока $x < b$ **:**

  $y = x + \frac{f(x) - f(x_*) + \varepsilon}{L}$

  $x := root(y, f(y) + L(x - y) - f(x))$

конец цикла

Алгоритм 5: Метод построения регулярной Липшицевой миноранты.

Приведенный алгоритм использует вспомогательную процедуру $root(z, E(x))$, которая ищет минимальный корень уравнения $E(x) = 0$, больший или равный z.

Процедура $root(z, E(x))$ достаточно сложна в общем случае. Для практической реализации можно воспользоваться линейной аппроксимацией функции $E(x)$. При этом $f(x)$ заменяется линейной аппроксимацией по двум "предыдущим" точкам ее вычисления.

2.1.7 Липшицев интервал

*Определение 9 **Липшицевым интервалом** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, называется такой интервал $[\alpha, \beta]$, что для любых $x, y \in [a, b]$, $x \leq y$ справедливо*

$$f(x) - f(y) = \lambda(x - y) \tag{2.5}$$

для некоторого $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Очевидно, что если L — константа Липшица для функции $f(x)$, то $[-L, L]$ будет Липшицевым интервалом. Обратное, как легко заметить, не верно. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[1, 2]$. Минимальная константа Липшица составляет 4, а Липшицев интервал $[2, 4]$, который не симметричен и существенно уже по сравнению с $[-4, 4]$.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2.5), c — некоторая точка интервала $[a, b]$. Тогда функция

$$g_c(x) = \begin{cases} f(c) + \beta(x - c), \text{ при } x \in [a, c], \\ f(c) + \alpha(x - c), \text{ при } x \in [c, b]. \end{cases}$$

будет минорантой, а функций

$$G_c(x) = \begin{cases} f(c) + \alpha(x - c), \text{ при } x \in [a, c], \\ f(c) + \beta(x - c), \text{ при } x \in [c, b]. \end{cases}$$

будет мажорантой для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

В силу вогнутости $g_c(x)$ ее минимум достигается на концах интервала.

$$g_c^* = \min_{x \in [a,b]} g_c(x) = \min(f(c) + \beta(a - c), f(c) + \alpha(b - c)). \tag{2.6}$$

В силу выпуклости $G_c(x)$

$$G_c^* = \max_{x \in [a,b]} g_c(x) = \max(f(c) + \alpha(a - c), f(c) + \beta(b - c)). \tag{2.7}$$

Следующая теорема, доказанная Бауманом, дает ответ на вопрос, каков оптимальный выбор точки c, при котором минимум миноранты достигает своего максимума.

Теорема 3 Точка c^*, в которой $\min_{x \in [a,b]} g_c(x)$ максимален, определяется следующим образом:

$$c^* = \begin{cases} a, \text{ если } \alpha \geq 0, \\ b, \text{ если } \beta \leq 0, \\ (\beta a - \alpha b)/(\beta - \alpha), \text{ если } \alpha < 0 < \beta. \end{cases} \tag{2.8}$$

При этом значение минимума миноранты составит

$$g_{c^*}^* = \begin{cases} f(a), \text{ если } \alpha \geq 0, \\ f(b), \text{ если } \beta \leq 0, \\ f(c^*) + \alpha\beta\frac{b-a}{\beta-\alpha}, \text{ если } \alpha < 0 < \beta. \end{cases} \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как $g_c(x)$ — миноранта для $f(x)$, то $\min_{x \in [a,b]} g_c(x) \leq f(a)$.

Если $\alpha \geq 0$, то

$$\min_{x \in [a,b]} g_a(x) = \min(f(a), f(a) + \alpha(b - a)) = f(a),$$

что доказывает первое соотношение из (2.8). Справедливость второго соотношения ($\beta \le 0$) устанавливается аналогично.

Пусть теперь $\alpha < 0 < \beta$. Положим $c^* = (\beta a - \alpha b)/(\beta - \alpha)$. Тогда

$$\beta(a - c^*) = \beta\left(\frac{\alpha b - \alpha a}{\beta - \alpha}\right) = \alpha\beta\frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\alpha(b - c^*) = \alpha\beta\frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

Тогда, согласно (2.7), имеем

$$g^*_{c^*} = f(c^*) + \alpha\beta\frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

Рассмотрим теперь c, $a \le c < c^*$. Тогда

$$f(c) + \alpha(c^* - c) \le f(c^*).$$

Прибавляя к обеим частям неравенства $\alpha(b - c^*)$, получим

$$f(c) + \alpha(b - c^*) + \alpha(c^* - c) \le f(c^*) + \alpha(b - c^*).$$

Перепишем данное неравенство в виде:

$$f(c) + \alpha(b - c) \le f(c^*) + \alpha(b - c^*) = g^*_{c^*}.$$

Согласно (2.7) отсюда получаем

$$g^*_c \le g^*_{c^*}.$$

Аналогично рассматривается случае $c^* < c \le b$. Таким образом, для любого $c \ne c^*$ справедливо

$$g^*_c \le g^*_{c^*}.$$

Тема самым теорема доказана.□

Аналогично показывается, что минимальное значение максимума мажоранты достигается в точке

$$c^* = \begin{cases} b, \text{ если } \alpha \ge 0, \\ a, \text{ если } \beta \le 0, \\ (\beta b - \alpha a)/(\beta - \alpha), \text{ если } \alpha < 0 < \beta. \end{cases} \tag{2.10}$$

При этом значение минимума миноранты составит

$$G^*_{c^*} = \begin{cases} f(b), \text{ если } \alpha \geq 0, \\ f(a), \text{ если } \beta \leq 0, \\ f(c^*) + \alpha\beta\frac{a-b}{\beta-\alpha}, \text{ если } \alpha < 0 < \beta. \end{cases} \quad (2.11)$$

Если функция удовлетворяет условию 2.5, то функции $g(x)$ и $G(x)$, задаваемые следующими соотношениями, будут минорантой и мажорантой для функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$.

$$\begin{aligned} g(x) &= \max(f(a) + \alpha(x-a), f(b) + \beta(x-b)) \\ G(x) &= \min(f(a) + \beta(x-a), f(b) + \alpha(x-b)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Минимум миноранты и максимум мажоранты легко находятся аналитически в соответствии с формулами, приведенными в следующих утверждениях.

Утверждение 7 Минимум миноранты $g(x)$, задаваемой формулой (2.12), *определяется следующим образом:*

$$\min_{x\in[a,b]} g(x) = \begin{cases} f(a), \text{ если } \alpha \geq 0, \\ f(b), \text{ если } \beta \leq 0, \\ \frac{\beta f(a)-\alpha f(b)}{\beta-\alpha} + \alpha\beta\frac{b-a}{\beta-\alpha}, \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Утверждение 8 Максимум мажоранты $G(x)$, задаваемой формулой (2.12), *определяется следующим образом:*

$$\max_{x\in[a,b]} G(x) = \begin{cases} f(b), \text{ если } \alpha \geq 0, \\ f(a), \text{ если } \beta \leq 0, \\ \frac{\alpha f(a)-\beta f(b)}{\alpha-\beta} + \alpha\beta\frac{b-a}{\alpha-\beta}, \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Глава 3

Основы интервального анализа

3.1 Основные понятия

Определение 10 ***Интервал*** — $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Определение 11 ***Ширина интервала*** — $\mathtt{wid}\,([a, b]) = b - a$.

Определение 12 ***Середина интервала*** — $\mathtt{mid}\,([a, b]) = 0.5 * (b - a)$.

Определение 13 ***Гипер-интервал (бокс, параллелепипед)*** — $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Определение 14 ***Ширина гипер-интервала*** — $\mathtt{wid}\,[a, b] = \max_{i=1}^{n} b_i - a_i$.

Определение 15 ***Центр гипер-интервала*** — $\mathtt{mid}\,[a, b] = (\mathtt{mid}\,([a_1, b_1]), \dots, \mathtt{mid}\,([a_n, b_n]))$.

Определение 16 ***Модуль интервала*** — $|[a, b]| = \max(|a|, |b|)$.

Через $x \in \mathbb{IR}^n$ будем обозначать множество всех гиперинтервалов $[a, b]$, $a \leq b$.

Через $\mathbb{IR}^{m \times n}$ будем обозначать множество всех интервальных матриц (матриц, элементы которых являются интервалами), размерности $m \times n$.

Для интервальной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ определим *ее норму* следующим образом:

$$\|\boldsymbol{A}\| = \max_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{A}_{ij}|.$$

Заметим, что при суммировании интервалов их ширины также суммируются, что сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение 9 Для любых двух интервалов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *справедливо:*

$$\mathtt{wid}\,(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathtt{wid}\,\boldsymbol{x} + \mathtt{wid}\,\boldsymbol{y}. \tag{3.1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10 Для $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$

$$\mathtt{wid}\ (\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{x} - \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x})) \le \|A\|\,\mathtt{wid}\,(\boldsymbol{x}). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{x} - \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x})$. Тогда

$$\boldsymbol{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_{ij}(\boldsymbol{x}_j - \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x}_j), i = 1, \ldots, m.$$

Заметим, что в силу симметрии интервала $\boldsymbol{x}_j - \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x}_j$

$$\mathtt{wid}\ (\boldsymbol{A}_{ij}(\boldsymbol{x}_j - \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x}_j)) = 2\left(|\boldsymbol{A}_{ij}|\cdot\frac{\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}_j}{2}\right) = |\boldsymbol{A}_{ij}|\cdot\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}_j.$$

Согласно (3.1)

$$\mathtt{wid}\,\boldsymbol{y}_i = \sum_{j=1}^{n}\mathtt{wid}\ (\boldsymbol{A}_{ij}(\boldsymbol{x}_j - \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x}_j)) = \sum_{j=1}^{n}|\boldsymbol{A}_{ij}|\cdot\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}_j \le \left(\sum_{j=1}^{n}|\boldsymbol{A}_{ij}|\right)\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}.$$

Из этого соотношения и определения нормы интервальной матрицы получаем (3.2). □

Определение 17 Функция $\boldsymbol{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ *называется* ***интервальным расширением*** *для функции* f*, если* $f(x) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$, $x \in \boldsymbol{x}$.

Определение 18 Функция $[f]^*$ *называется* ***минимальной включающей функцией*** *для функции* f*, если* $[f]^*([x])$ *совпадает с минимальным гиперинтервалом, содержащим* $f([x])$ *для всех* $[x] \in \mathbb{IR}^n$.

Определение 19 Включающая функция $[f]$ *называется конвергентной, если для любой последовательности гиперинтервалов* $[x_k]$*, такой что* $\lim_{k\to\infty} w([x_k]) = 0$ *выполняется* $\lim_{k\to\infty} w([f]([x])) \to 0$.

3.2 Интервальная арифметика и естественное интервальное расширение

Для базовых алгебраических функций можно построить точные интервальные оценки, т.е. минимальные включающие функции. Определим правила интервальной арифметики для базовых операций:

$$\begin{aligned}
\alpha \boldsymbol{x} &= [\alpha \underline{x}, \alpha \overline{y}], \\
\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}], \\
\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} &= [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}], \\
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{x}\overline{y}), \max(\underline{x}\,\underline{y}, \underline{x}\,\overline{y}, \overline{x}\,\underline{y}, \overline{x}\,\overline{y})]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Более сложным образом определяется обратная величина:

$$\frac{1}{\boldsymbol{y}} = \begin{cases} \emptyset, y = [0, 0], \\ [1/\overline{y}, 1/\underline{y}], 0 \notin [y] \\ (-\infty, 1/\underline{y}], \text{ if } \underline{y} < 0 \text{ and } \overline{y} = 0, \\ [1/\overline{y}, \infty), \text{ if } \underline{y} = 0 \text{ and } \overline{y} > 0, \\ (-\infty, \infty), \text{ if } \underline{y} < 0 \text{ and } \overline{y} > 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Деление определяется через обратную величину $\boldsymbol{x}/\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\frac{1}{\boldsymbol{y}}$.

Заметим, что для любой монотонно неубывающей функции $f(x)$ имеет место соотношение $f(\boldsymbol{x}) = [f(\underline{x}), f(\overline{x})]$. Для невозрастающей — $f(\boldsymbol{x}) = [f(\overline{x}), f(\underline{x})]$. Для немонотонных функций ситуация отличается, например: $\sin([0, \pi]) = [0, 1] \neq [0, 0] = [\sin(0), \sin(\pi)]$. Для всех элементарных функций несложно написать программы получения точных интервальных оценок.

Применяя правила интервальной арифметики и интервальные расширения для элементарных функций, несложно вычислить интервал по выражению функции.

Определение 20 Функцию $\boldsymbol{f}_\natural(x) : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$, *сопоставляющую интервалам аргументов некоторой функции* $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *интервал значений, вычисленный согласно правилам интервальной арифметики по выражению функции, будем называть* ***естественным интервальным расширением.***

Если в выражении присутствует повторное вхождение переменной, то оценки могут быть не точны. В качестве примера рассмотрим функцию

$f(x) = x(x-1)$. Эту функцию можно записать тремя эквивалентными способами:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x(x-1),\\
f_2(x) &= x^2 - x,\\
f_3(x) &= (x-1/2)^2 - 1/4
\end{aligned}
$$

Заметим, что $f([0,1]) = [-1/4, 0]$. Вычислим интервальные оценки в перечисленных случаях. Точная оценка достигается только для $f_3(x)$.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f_{1}}_{\natural}([0,1]) = [0,1] \times [-1,0] = [-1,1],\\
&\boldsymbol{f_{2}}_{\natural}([0,1]) = [0,1] - [0,1] = [-1,1],\\
&\boldsymbol{f_{3}}_{\natural}([0,1]) = ([-1/2,1/2])^2 - [1/4,1/4] = [0,1/4] - [1/4,1/4] = [-1/4,0]
\end{aligned}
$$

3.2.1 Интервальные оценки с использованием производных первого порядка

Иногда более точные оценки удается получить с использованием производных. Напомним формулировку теоремы о среднем.

Теорема 4 Пусть $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная и дифференцируемая в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда для любых точек $a \in G$, $b \in G$ найдется точка c, принадлежащая этому отрезку, такая что

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c)(b-a).$$

Рассмотрим брус $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$ и точку $c \in \boldsymbol{x}$. Согласно теореме о среднем для любого $x \in \boldsymbol{x}$ найдется такое $z \in \boldsymbol{x}$, что:

$$f(x) = f(c) + \nabla f(z)^T (x-c). \tag{3.5}$$

Рассматривая правую часть равенства (3.5) как функцию двух переменных z, x, $z \in \boldsymbol{x}$, $x \in \boldsymbol{x}$ и применяя естественное интервальное расширение, получим новое интервальное расширение:

$$\boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x}, c) = f(c) + \boldsymbol{\nabla f}_{\natural}(\boldsymbol{x})^T (\boldsymbol{x} - c). \tag{3.6}$$

Выражение (3.6) будем называть *центральной интервальной формой*. В качестве точки c часто выбирают центр бруса $\texttt{mid}\ \boldsymbol{x}$. Распишем (3.6) покомпонентно

$$f(c) + \boldsymbol{\partial_1 f}_\natural(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1 - c_1) + \boldsymbol{\partial_2 f}_\natural(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x_2} - c_2). \tag{3.7}$$

Можно получить еще более точную оценку. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x_1, x_2)$ и точку $c \in \boldsymbol{x}$, $c = (c_1, c_2)$. Применяя теорему о среднем покомпонентно, получим:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(c_1, x_2) + \partial_1(z_1, x_2)(x_1 - c_1), \\ &= f(c_1, c_2) + \partial_2 f(c_1, z_2)(x_2 - c_2) \\ &+ \partial_1 f(z_1, x_2)(x_1 - c_1), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $z_1 \in [c_1, x_1]$, $z_2 \in [c_2, x_2]$.

Рассматривая правую часть (3.8) как функцию трех переменных x, z_1, z_2, $x \in \boldsymbol{x}$, $z_1 \in \boldsymbol{x}$, $z_2 \in \boldsymbol{x}$, с помощью естественного интервального расширения, получим следующее расширение

$$\boldsymbol{f}_{mc}(\boldsymbol{x}, c) = f(c) + \boldsymbol{\partial_2 f}_\natural(c_1, \boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{x}_2 - c_2) + \boldsymbol{\partial_1 f}_\natural(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x_1} - c_1). \tag{3.9}$$

Данная форма дает более точную аппроксимацию, так как в силу изотонности по включению $\boldsymbol{\partial_2 f}_\natural(c_1, \boldsymbol{x}_2) \subseteq \boldsymbol{\partial_2 f}_\natural(\boldsymbol{x})$

Формула (3.9) может быть легко обобщена на случай n переменных:

$$f(\boldsymbol{x}) \subseteq f(c) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\partial_i f}_\natural(c_1, \ldots, c_{i-1}, \boldsymbol{x_i}, \ldots, \boldsymbol{x_n})(\boldsymbol{x_i} - c_i). \tag{3.10}$$

Формулу (3.10) будем называть *смешанной центральной формой.*

Вспомним разложение в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$f(x) = f(c) + \nabla f(c)^T(x - c) + \frac{1}{2}(x - c)^T H(\xi)(x - c), \tag{3.11}$$

где ξ — некоторая точка отрезка, соединяющего c и x.

Рассматривая правую часть (3.11) как функцию переменных x, ξ, получим формулу интервального расширения второго порядка

$$\boldsymbol{f}_{mc2} = f(x) + \nabla f(c)^T(\boldsymbol{x} - c) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - c)^T \boldsymbol{H}_\natural(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - c) \tag{3.12}$$

Для уменьшения числа операций и повышения точности вычисления оценок можно следующим образом определить матрицу H:

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x), i = j, \\ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), i > j, \\ 0, i < j. \end{cases}$$

Приведенную формулу можно уточнить далее. Рассмотрим случай двух переменных. Сначала воспользуемся разложением в ряд Тейлора по x_2.

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, c_2) + (x_2 - c_2)\partial_2 f(x_1, c_2) + \frac{1}{2}(x_2 - c_2)^2 \partial_{22}(x_1, z_{22}),$$

где $z_{22} \in [c_2, x_2]$. Раскроем далее слагаемое $f(x_1, c_2)$.

$$f(x_1, c_2) = f(c_1, c_2) + (x_1 - c_1)\partial_1 f(c_1, c_2) + \frac{1}{2}(x_2 - c_1)^2 \partial_{11}(z_{11}, c_2),$$

где $z_{11} \in [c_1, x_1]$.

Заметим, что

$$\partial_2 f(x_1, c_2) = \partial_2 f(c_1, c_2) + (x_1 - c_1)\partial_{21} f(z_{21}, c_2),$$

где $z_{21} \in [c_1, x_1]$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = {} & f(c_1, c_2) + (x_1 - c_1)\partial_1 f(c_1, c_2) + (x_2 - c_2)\partial_2 f(c_1, c_2) \\ & + (x_2 - c_2)(x_1 - c_1)\partial_{21} f(z_{21}, c_2) + \frac{1}{2}(x_2 - c_1)^2 \partial_{11}(z_{11}, c_2) + \frac{1}{2}(x_2 - c_2)^2 \partial_{22}(x_1, z_{22}). \end{aligned}$$

Эту формулу можно переписать в более компактном виде.

$$f(x) = f(c) + (x - c)^T \nabla f(c) + \frac{1}{2}(x - c)^T H(c, z, x)(x - c). \qquad (3.13)$$

При этом, матрица $H(c, z, x)$ имеет вид

$$H(c, z, x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(z_{11}, c_2) & 0 \\ 2\,\partial_{21} f(z_{21}, c_2) & \partial_{22} f(x_1, z_{22}) \end{pmatrix}$$

Заменяя в матрице $H(c, z, x)$ переменные z, x за интервалы, которым эти переменные заведомо принадлежат, получим интервальную матрицу

$$\boldsymbol{H}(c, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\partial_{11} f_\natural}(\boldsymbol{x_1}, c_2) & 0 \\ 2\,\boldsymbol{\partial_{21} f_\natural}(\boldsymbol{x_1}, c_2) & \boldsymbol{\partial_{22} f_\natural}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \end{pmatrix}$$

Рассматривая правую часть равенства (3.13) как функцию переменных x, z, построим ее естественное интервальное расширение:

$$\hat{\boldsymbol{f}}_{mc2}(\boldsymbol{x}) = f(c) + (\boldsymbol{x} - c)^T \nabla f(c) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - c)^T \boldsymbol{H}(c, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - c).$$

3.3 Скосы

Рассмотрим случай одной переменной. *Скосом* $s_f(c, x)$, где $c, x \in \mathbb{R}^n$ будем называть такое число, что $f(x) = f(c) + s_f(c, x)(x - c)$. Очевидно,

$$s_f(c,x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, x \neq c \\ \hat{s}, x = c \end{cases}$$

Где $\hat{s}$ — любое действительное число.

Определим *точный скос* следующим образом:

$$s_f(c, X) = \cup_{x \in X \setminus \{c\}} s_f(c, x).$$

Справедливо следующее включение:

$$f(X) \subseteq f(c) + s_f(c, X)(X - c).$$

На практике определение точного скоса $s_f(c, X)$ затруднительно и используется *интервальный скос*, который определяется как любой интервал, включающий точный скос. Если S — интервальный скос, то

$$f(X) \subseteq f(c) + S(X - c).$$

Интервальные скосы можно вычислять с помощью правил пересчета. Для пересчета используется тройка значений: (z, U, S), где z — значение функции в точке c, U — интервал, включающий диапазон изменения функции, S — скос.

Правила вычисления скосов:

1. Арифметические операции.

   Если $f(x) = g(x) + h(x)$, то

   $$(z_f, U_f, S_f) = (z_g + z_h, U_g + U_h, S_f + S_h).$$

   Если $f(x) = g(x) - h(x)$, то

   $$(z_f, U_f, S_f) = (z_g - z_h, U_g - U_h, S_f - S_h).$$

   Если $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, то

   $$(z_f, U_f, S_f) = (z_g \cdot z_h, U_g \cdot U_h, U_g \cdot S_h + z_h \cdot S_g).$$

   $$(z_f, U_f, S_f) = (z_g \cdot z_h, U_g \cdot U_h, U_g \cdot S_h + z_h \cdot S_g).$$

2. суперпозиция

Суперпозиция одноместных функций (сложная функция). Пусть $h(x) = f(g(x))$, а (z_g, U_g, S_g) — тройка, вычисленная для $g(x)$. Тогда

$$(z_h, U_h, S_h) = (f(z_g), [f](U_g), s_f(z_g, U_g)\, S_g),$$

Здесь предполагается, что для элементарной функции f известно, как вычислять $s_f(z, U)$ по z и U.

2. Выпуклые функции и вогнутые функции.

Утверждение 11 Для выпуклой функции $f(x)$ и точки c, $\underline{x} \le c \le \overline{x}$ справедливо

$$s_f(c, [\underline{x}, \overline{x}]) \subseteq [s_f(c, \underline{x}), s_f(c, \overline{x})].$$

Доказательство. По-определению выпуклости:

$$\begin{aligned} f(x) &\le f(c) + s_f(c, \underline{x})\,(x - c), \ \text{ если } x \le c,\\ f(x) &\le f(c) + s_f(c, \overline{x})\,(x - c), \ \text{ если } x \ge c. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Покажем, что

$$f(x) \ge f(c) + s_f(c, \underline{x})\,(x - c) \text{ при } x \ge c. \tag{3.15}$$

Пусть для некоторого $x_0 : c < x_0 < \overline{x}$ выполняется $f(x_0) < f(c) + s_f(c, \underline{x})\,(x_0 - c)$. Рассмотрим $\underline{x} < x_1 < c$. Согласно неравенству (3.14) $f(x_1) \le f(c) + s_f(c, \underline{x})\,(x_1 - c)$. Из выпуклости полуплоскости следует, что отрезок, соединяющий точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_0, f(x_0))$ весь лежит ниже прямой, задаваемой уравнением $f(c) + s_f(c, \underline{x})\,(x - c)$. Таким образом точка $(c, f(c))$, принадлежащая данной прямой, также лежит выше этого отрезка, что противоречит выпуклости функции $f(x)$. Аналогично показывается, что

$$f(x) \ge f(c) + s_f(c, \overline{x})\,(x - c), \ \text{ если } x \le c. \tag{3.16}$$

Идея доказательства проиллюстрирована на рисунке 3.1.

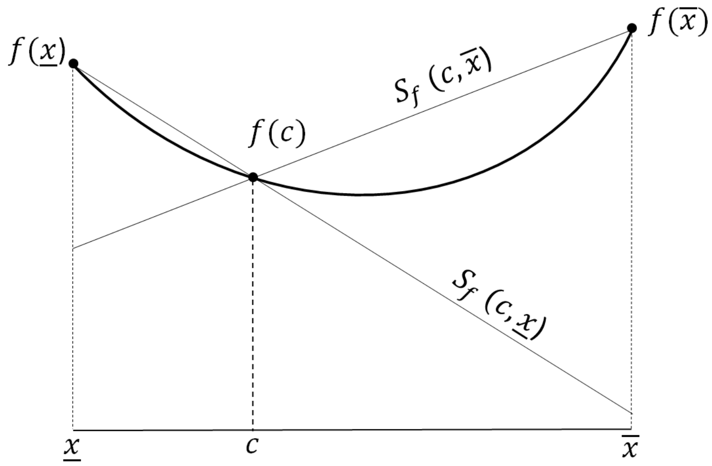
Из неравенств (3.14), (3.15), (3.16) следует, что

$$s_f(c, [\underline{x}, \overline{x}]) \subseteq [s_f(c, \underline{x}), s_f(c, \overline{x})].$$

□

Утверждение 12 Для вогнутой функции $f(x)$ справедливо

$$s_f(c, [\underline{x}, \overline{x}]) \subseteq [s_f(c, \overline{x}), s_f(c, \underline{x})].$$



Фиг. 3.1. Расчет скосов для выпуклой функции

Доказательство. Аналогично утверждению 11.

Рассмотрим теперь случай, когда c совпадает с одним из концов отрезка. Обозначим через $\partial f(x)$ субдифференциал функции $f(x)$ в точке x.

Утверждение 13 Для выпуклой функции $f(x)$ и любого $d \in \partial f(x)$ справедливо

$$\begin{aligned} s_f(\underline{x}, [\underline{x}, \overline{x}]) &\subseteq [d_f(\underline{x}), s_f(\underline{x}, \overline{x})], \\ s_f(\overline{x}, [\underline{x}, \overline{x}]) &\subseteq [s_f(\overline{x}, \underline{x}), d_f(\overline{x})]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Доказательство. Докажем первое включение (для правого скоса). По определению выпуклости

$$f(x) \leq f(\underline{x}) + s_f(\underline{x}, \overline{x})\,(x - \underline{x}), \text{ при } \underline{x} \leq x \leq \overline{x}.$$

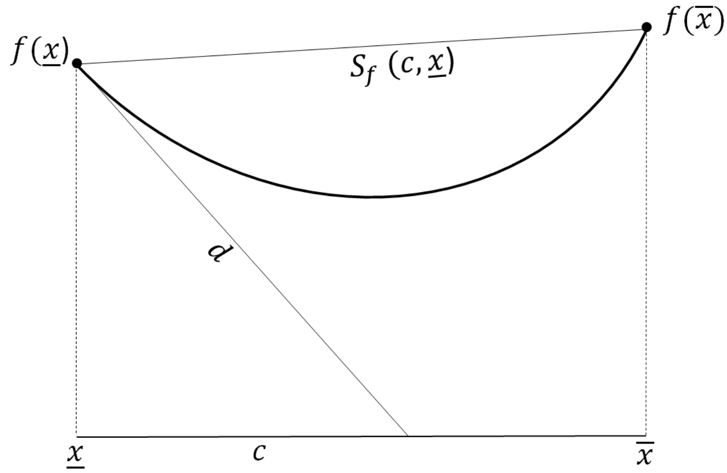
По определению субдифференциала

$$f(x) \geq f(\underline{x}) + d\,(x - \underline{x}), \text{ при } \underline{x} \leq x \leq \overline{x}.$$

Включение доказано.

Идея доказательства проиллюстрирована на рисунке 3.2. Аналогично доказывается второе включение. □

Утверждение 14 Для вогнутой функции $f(x)$ и любого $d \in \partial f(x)$ справедливо



Фиг. 3.2. Расчет правого скоса для выпуклой функции

$$
\begin{aligned}
&s_f(\underline{x}, [\underline{x}, \overline{x}]) \subseteq [s_f(\underline{x}, \overline{x}), d_f(\underline{x})],\\
&s_f(\overline{x}, [\underline{x}, \overline{x}]) \subseteq [d_f(\overline{x}), s_f(\overline{x}, \underline{x})].
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Замечание 1 В качестве d *можно взять значение односторонней производной в случае ее существование в соответствующем конце интервала.*

Замечание 2 В работе [1] предлагается оценивать скос в случае, когда $c \notin [\underline{x}, \overline{x}]$ *равным интервальному расширению производной:* $[f']([\underline{x}, \overline{x}])$. *Оценка, даваемая утверждением 13, в общем случае точнее. Например, для функции* e^x *скос в точке* 0 *на интервале* $[0, ln8]$ *в [1] предлагается оценивать как* $[e^0, e^{ln\,8}] = [1, 8]$. *Утверждение 13 позволяет получить оценку*

$$
s = \left[e^0, \frac{e^{ln\,8} - e^0}{ln\,8 - 0}\right] = \left[1, \frac{7}{ln\,8}\right] \subseteq [1, 3.37],
$$

которая существенно точнее.

3.4 Интервальный метод Ньютона

3.4.1 Одномерный случай

Пусть требуется найти корень уравнения

$$
f(x) = 0, x \in [a, b], \tag{3.19}
$$

где $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция одного переменного.

Пусть x^* — корень уравнения (3.19). По теореме о среднем,

$$f(x^*) = f(c) + f'(\xi)(x - c),$$

где $c \in [a, b]$, $\xi \in [c, x]$. Так как $f(x^*) = 0$ то,

$$f(c) + f'(\xi)(x^* - c) = 0.$$

Заметим, что если $f'(\xi) = 0$, то $f(c) = 0$ и, тем самым, корень уравнения (3.19) найден. Если $f(c) \neq 0$, то $f'(\xi) \neq 0$ и

$$x^* = c - \frac{f(c)}{f'(\xi)}.$$

Тем самым показано, что множество $\boldsymbol{x}^*$ всех корней уравнения (3.19) удовлетворяет включению

$$\boldsymbol{x}^* \subseteq \left(\boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{f(c)}}{\boldsymbol{f'(x)}}\right)_\natural = c - \frac{f(c)}{\boldsymbol{f'(x)}_\natural}. \tag{3.20}$$

Свойство (3.20) служит основой интервального метода Ньютона (алгоритм 6).

$\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{x}$
$k := 0$
Пока $\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}_k > \varepsilon$ **:**
  $c_k := \mathtt{mid}\,\boldsymbol{x}_k$
  если $f(c) = 0$ **, тогда**
    вернуть $[c_k, c_k]$
  иначе
    $\boldsymbol{x}'_k := c_k - \frac{f(c_k)}{\boldsymbol{f'(x_k)}_\natural}$
    $\boldsymbol{x}_{k+1} := \boldsymbol{x}_k \cap \boldsymbol{x}'_k$
    $k := k + 1$
  конец условия
  вернуть $\boldsymbol{x}_k$
конец цикла

Алгоритм 6: Интервальный метод Ньютона для функции одного аргумента.

Утверждение 15 Если $f(a) \cdot f(b) < 0$ *и* $0 \notin \boldsymbol{f'(x)}_\natural$, *то метод Ньютона для функции одного аргумента сходится с экспоненциальной скоростью и итоговый интервал содержит корень уравнения* (3.19).

Доказательство. Поскольку $0 \notin \boldsymbol{f'(x)}_\natural$, то, учитывая монотонность по включению естественного интервального расширения, получим $0 \notin \boldsymbol{f'(x_k)}_\natural$, $k = 0, 1, \ldots$. Пусть $\boldsymbol{f'(x_k)}_\natural = [\alpha, \beta]$. Тогда либо $\alpha_k > 0$, либо $\beta_k < 0$. Рассмотрим первый случай $\alpha_k > 0$. Предположим, что $f(c_k) > 0$. Тогда $\frac{f(c_k)}{\boldsymbol{f'(x_k)}_\natural} > 0$ и, следовательно, $c_k > \boldsymbol{x}'_k$. Поэтому $c_k \notin \boldsymbol{x}_{k+1}$, т.е. $\boldsymbol{x}_{k+1}$ целиком лежит в одной из половин отрезка $\boldsymbol{x}_k$. Значит, $\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}_{k+1} \leq \frac{\mathtt{wid}\,\boldsymbol{x}_k}{2}$, что и означает экспоненциальную скорость сходимости. Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

Тем самым мы показали экспоненциальную скорость сходимости интервального метода Ньютона. Тот факт, что результирующий интервал содержит корень уравнения следует из способа организации интерации метода и (3.20) □

3.4.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика основан на идеях, похожих на метод Ньютона, но не требует обращения интервальных матриц. Пусть требуется найти корни нелинейной системы уравнений

$$f(x) = 0, x \in \boldsymbol{x}, \tag{3.21}$$

где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{IR}^n$, а $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Пусть $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — некоторая невырожденная матрица. Рассмотрим оператор $P(x) = x - Yf(x)$. Заметим, что $P(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — также непрерывное отображение. В силу невырожденности матрицы Y система уравнений $P(x) = x$ имеет те же решения, что и система $f(x) = 0$.

Теперь применим центральную интервальную форму к оператору $P(x)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_c(\boldsymbol{x}, c) &= P(c) + \boldsymbol{\nabla P}_\natural(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{x} - c) = \\ &= c - Yf(c) + (I - Y\boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x})^T)(\boldsymbol{x} - c) \end{aligned} \tag{3.22}$$

где $c \in \boldsymbol{x}$ — некоторый вектор, а $\nabla f(x)$ — матрица Якоби, в столбцах которой располагаются градиенты функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\nabla f(x) = (\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_m(x)) .$$

Определим *отображение Кравчика*:

$$\mathcal{K}(c, Y, \boldsymbol{x}) = c - Yf(c) + (I - Y\boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x})^T)(\boldsymbol{x} - c). \tag{3.23}$$

Согласно свойствам интервальных расширений $P(\boldsymbol{x}) \subseteq K(c, \boldsymbol{x})$

Утверждение 16 *Если*

$$\mathcal{K}(c, Y, \boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x}, \tag{3.24}$$

то уравнение (3.21) *имеет решение.*

Доказательство. Из включения (3.24) следует, что

$$P(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathcal{K}(c, Y, \boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x}.$$

Согласно теореме Брауэра о неподвижной точке (теорема 6) у отображения P есть неподвижная точка $x^0 \in \boldsymbol{x}$:

$$P(x^0) = x^0.$$

Тогда $x^0 - Yf(x^0) = x^0$, следовательно, в силу невырожденности Y, $f(x^0) = 0$. □

Теперь опишем итерационный метод Кравчика. Полагая $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{X}$, выполняется следующая последовательность итераций, представленная в алгоритме 7. Ключевым параметром алгоритма 7 является величина

$$r_k = \|I - Y \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{f}_\natural(\boldsymbol{x}^k)^T\|.$$

$\boldsymbol{x}^0 := \boldsymbol{x}$
$k := 0$
$r_0 := \infty$
Пока $\mathtt{wid}\, \boldsymbol{x}^k > \varepsilon$ **:**
  $c_k := \mathtt{mid}\, \boldsymbol{x}^k$
  если $f(c_k) = 0$ **, тогда**
    вернуть $[c_k, c_k]$
  иначе
    $Y_k := \begin{cases} \left(\mathtt{mid}\,(\nabla \boldsymbol{f}_\natural(x^k))\right)^{-1}, & \text{если } r_k < r_{k-1}, \\ Y_{k-1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$
    $\boldsymbol{z}^k := \mathcal{K}(c_k, Y_k, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}})$
    $\boldsymbol{x}^{k+1} := \boldsymbol{x}^k \cap \boldsymbol{z}^k$
    $k := k + 1$
  конец условия
конец цикла
вернуть $\boldsymbol{x}_k$

Алгоритм 7: Интервальный метод Кравчика.

Заметим, что при соблюдении определенных условий, сформулированных в следующей теореме, система (3.21) имеет единственное решение и имеет место стягивание последовательности интервалов $\boldsymbol{x}^k$ к этой точке.

Теорема 5 Если $\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{x}$ *и* $r_0 < 1$, *то система* (3.21) *имеет единственное решение* x^* *и справедливы следующие три свойства:*

$$\boldsymbol{x}^k \subseteq \boldsymbol{x}^{k-1}, k = 1, \ldots, n. \tag{3.25}$$

$$r_k \leq r_{k-1}, k = 1, \ldots, n. \tag{3.26}$$

$$\mathtt{wid}\, \boldsymbol{x}^k \leq r_{k-1} \mathtt{wid}\, \boldsymbol{x}^{k-1}, k = 1, \ldots, n. \tag{3.27}$$

Доказательство. Первое свойство (3.25) следует из того, что $\boldsymbol{x}^{k+1} := \boldsymbol{x}^k \cap \boldsymbol{z}^k$. Второе свойство вытекает из правила выбора Y_k. Действительно,в силу изотонности естественного интервального расширения, мы получаем что $I - \boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x}^k) \subseteq I - \boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x}^{k-1})$. Следовательно,

$$r_k = \|I - Y \boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x}^k)^T\| \leq \|I - Y \boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x}^{k-1})^T\|.$$

Учитывая этот факт и правило

$$Y_k := \begin{cases} \left(\mathtt{mid}\,(\nabla \boldsymbol{f}_\natural(x^k))\right)^{-1}, & \text{если } r_k < r_{k-1}, \\ Y_{k-1} \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

получаем, что $r_k \leq r_{k-1}$ при $k = 1, \ldots, n$. Свойство (3.27) следует из утверждения 10. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathtt{wid}\, \mathcal{K}(c_{k-1}, Y_{k-1}, \boldsymbol{x}^{k-1}) &= \mathtt{wid}\, \left((I - Y \boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x}^{k-1})^T)(\boldsymbol{x}^{k-1} - \mathtt{mid}\, x^{k-1})\right) \\ &\leq \|I - Y \boldsymbol{\nabla f}_\natural(\boldsymbol{x}^{k-1})^T\|\, \mathtt{wid}\, \boldsymbol{x}^{k-1} = r_{k-1}\, \mathtt{wid}\, \boldsymbol{x}^{k-1}. \end{aligned}$$

Так как $\mathtt{wid}\, x^k \leq \mathtt{wid}\, \mathcal{K}(c_{k-1}, Y_{k-1}, \boldsymbol{x}^{k-1})$, то получаем требуемое соотношение. □

3.5 Интервальные матрицы

Интервальной матрицей **A**

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \ldots & \mathbf{a_{1n}} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \ldots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

называется матрица, элементами которой являются интервалы, $\mathbf{a_{ik}} \in \mathbb{IR}$. Множество интервальных $m \times n$ матриц обозначается через $\mathbb{IR}^{m \times n}$.

3.6 Покрытия

3.6.1 Основные определения

Определим норму

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Единичным шаром U в этой метрике будет гиперкуб со стороной 1: $U = [-1, 1]^n$.

Определение 21 ***Отклонением множества** A **от множества** B будем называть величину $h_\infty(A, B)$, определяемую по формуле:*

$$h_\infty(A, B) = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ : A \subseteq B + rU\}$$

*Определение 22 Величина $h(A, B) = \max(h_\infty(A, B), h_\infty(B, A))$ называется **расстоянием Хаусдорфа** между множествами A и B.*

Компактные множества P и Q называются *ненакладыющимися*, если $P \cap Q \subseteq \delta P \cup \delta Q$. Или что эквивалентно тому, что их внутренности не пересекаются: $\mathrm{int}P \cap \mathrm{int}Q = \emptyset$.

Покрытием называется конечное множество взаимно ненакладывающихся компактных множеств $\{P_j\}$, $j \in \overline{1,k}$, $\mathrm{int}P_i \cap \mathrm{int}P_j = \emptyset$, $i, j \in \overline{1,k}$.

Для любого $\varepsilon \geq 0$ и компактного множества A существует покрытие, состоящее из параллелепипедов $\{P_j\}$, $j \in \overline{1,k}$, такое что $A \subseteq P$ и $h(P, A) \leq \varepsilon$, где $P = \cup_{j\in\overline{1,k}} P_j$.

Это утверждение означает, что любое компактное множество может быть, сколь угодно точно приближено снаружи некоторым покрытием. Заметим, что этот факт перестает быть верным для приближений изнутри (например, отрезок, не параллельный осям координат в $\mathbb{R}^2$.

Компактное множество A называется *полным*, если замыкание его внутренности совпадает с ним самим $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) = A$.

Для любого $\varepsilon \geq 0$ и полного множества A существует покрытие, состоящее из параллелепипедов $\{P_j\}$, $j \in \overline{1,k}$, такое что $P \subseteq A$ и $h(P, A) \leq \varepsilon$, где $P = \cup_{j\in\overline{1,k}} P_j$.

Таким образом, полные множества могут быть приближены сколь угодно точно изнутри и снаружи с помощью покрытий параллелепипедами.

3.7 Построение покрытий для прообраза отображений

Пусть множество X определяется соотношением $f(X) = P$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$, P — параллелепипед в $\mathbb{R}^m$, а $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — заданное отображение.

3.8 Редукции

Пусть имеется система:

$$f(x) = c, x \in [a], \tag{3.28}$$

где $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $[a] \in \mathbb{IR}^n$ задающая некоторое множество решений $S \subseteq R^n$. Редукцией называется замена параллелепипеда $[a]$ на меньший параллелепипед $[a']$, такой что $S \subseteq [a'] \subseteq [a]$.

Предположим, что из системы (3.28) можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &x_1 = \phi_1(x), \\ &x_2 = \phi_2(x), \\ &\ldots, \\ &x_k = \phi_k(x). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Пусть $I_i = [\phi_i]([a])$, $i = \overline{1, k}$. Пусть $[I] = I_1 \times \cdots \times I_k \times [-\infty, \infty] \times \cdots \times [-\infty, \infty]$. Тогда замена $[a]$ на $[a'] = [a] \cap I$ является редукцией.

Пример 2 Рассмотрим уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 1$, при интервальных ограничениях $x_1 \in [0, 1/2]$, $x_2 \in [0, 1]$. Требуется применить правила сокращения.

Выразим переменные из этих уравнений:

$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2}, \tag{3.30}$$

$$x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}. \tag{3.31}$$

Используем равенство (3.30). Из него получим:

$$x_1 \in [0, 1] \cap \sqrt{1 - [0, 1/2]^2} = [\sqrt{3}/2, 1].$$

Второе равенство (3.31) не дает сокращения. Таким образом, первая итерация позволяет сократить параллелепипед до $[0, 1/2] \times [\sqrt{3}/2, 1]$. Несложно заметить, что вторая итерация не даст дополнительного сокращения.

Пример 3 Рассмотрим уравнение $x^2 = 1$, при интервальных ограничениях $x \in [0, 2]$. Требуется применить правила сокращения.

Очевидно, то для из уравнение следует следующее правило для x: $x = x - (x^2 - 1)$. Рассмотрим функцию $\phi(x) = x - (x^2 - 1)$. Преобразуя ее, получим $\phi(x) = -(x^2 - x + 1/4) + 5/4 = -(x - 1/2)^2 + 5/4$. Тогда $[\phi]([0, 2]) = -([-1/2, 3/2])^2 + 5/4 = [-9/4, 0] + 5/4 = [1, 5/4]$. Таким образом, новый интервал равен $[1, 5/4]$. Подставляя теперь новый интервал в функцию $\phi(x)$, получим $\phi([1, 5/4]) = [11/16, 1]$. Таким образом, интервал сократился до $[1, 1]$. Тем самым найдено решение задачи.

3.8.1 Редукция Гаусса-Зейделя

Рассмотрим линейную систему

$$Ax = b. \tag{3.32}$$

При этом пусть A — заданная интервальная матрица, b — заданный интервальный вектор. Требуется определить интервальный вектор x.

Система (3.32) может быть преобразована к виду

$$\begin{array}{l} (A_d + A_r)x = b, \\ A_d x = b - A_r x, \\ x = A_d^{-1}\left(b - A_r x\right) \end{array} \tag{3.33}$$

Так как матрица A_d — диагональная, то она легко обращается и в результате получается следующий алгоритм:

$$x_{k+1} = A_d^{-1}\left(b - A_r x_k\right).$$

3.8.2 Прямо-обратная редукция

Прямо-обратная редукция (forward-backward reduction) основана на технике известной из задач удовлетворения ограничений. Смысл ее состоит в том, чтобы разложить формулу на последовательность обращаемых операций, а затем исходя из целевого условия, двигаться в обратном направлении по формуле.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 4 Решить уравнение

$$x_1 e^{x_2} + sin(x_3) = 0, \tag{3.34}$$

Представим левую часть уравнения (3.34) как последовательность операций:

$$\begin{aligned}
[a_1] &= exp([x_2], \\
[a_2] &= [x_1] \cdot [a_1], \\
[a_3] &= sin([x_3]), \\
[y] &= [a_2] + [a_3]
\end{aligned}$$

Если в результате подстановки интервалов параметров $[y] \cap [0, 0] = \emptyset$, то уравнение, очевидно, не имеет решения. В противном случае полагаем $[y] = [0, 0]$ и выполняем следующую последовательность действий:

$$\begin{aligned}
[a_3] &= ([y] - [a_2]) \cap [a_3], \\
[a_2] &= ([y] - [a_3]) \cap [a_2], \\
[x_3] &= \arcsin([a_3]) \cap [x_3], \\
[a_1] &= ([a_2]/[x_1]) \cap [a_1], \\
[x_1] &= ([a_2]/[a_1]) \cap [x_1], \\
[x_2] &= \log([a_1]) \cap [x_2].
\end{aligned}$$

3.8.3 Ньютоновская редукция

Рассмотрим случай скалярной функции одного аргумента $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. По теореме о среднем найдется $\xi \in [x]$, такое что

$$f(\hat{x}) - f(x_*) = (\hat{x} - x_*)f'(\xi),$$

где $\hat{x} = m([x])$.

Так как $f(x_*) = 0$, то получим

$$f(\hat{x}) = (\hat{x} - x_*)f'(\xi).$$

Отсюда при $0 \notin [f']([x])$ имеем $x_* \in \hat{x} - f(\hat{x})/[f']([x])$.

Получаем следующую редукцию: $[x] = [x] \cap (\hat{x} - f(\hat{x})/[f']([x]))$.

Пример 5 Применить редукцию для уравнения $f(x) = 0$*, где* $[x] = [2, 5]$*,* $f(x) = x^2 - 3x$*.*

Заметим, что $\hat{x} = \frac{7}{2}$, $f(\hat{x}) = \frac{7}{4}$, $f'(x) = 2x - 3$, $[f']([x]) = [1, 7]$. Получим:

$$[x] = [x] \cap \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{4}[\frac{1}{7}, 1] \right) = [2, 5] \cap \left[\frac{7}{4}, \frac{13}{4} \right] = \left[2, \frac{13}{4} \right].$$

Рассмотрим случай многих переменных и системы уравнений. Предполагается, что число уравнений совпадает с числом переменных:

$$f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{3.35}$$

Согласно теореме о среднем:

$$f(x) = f(\hat{x}) + J(\xi)(x - \hat{x}), \tag{3.36}$$

где $\hat{x}$ — центр $[x]$, а $J(\xi)$ — Якобиан отображения f, вычисленный в некоторой точке $\xi \in [x]$.

Из соотношений (3.35) и (3.36) следует

$$f(\hat{x}) + J(\xi)(x - \hat{x}) = 0. \tag{3.37}$$

Пусть $[p]$ — решение интервальной системы $Ap = z$, где $A = J([x])$, а $z = -f(\hat{x})$. Тогда можно определить такую редукцию:

$$[x] = [x] \cap (\hat{x} + [p]). \tag{3.38}$$

3.9 Функции одной переменной

3.9.1 Редукция интервала

Редукция интервала позволяет сократить область поиска, тем самым уменьшив число шагов метода. В общем случае, если выполняется неравенство

$$h(x) \le 0,\ x \in [\underline{x}, \overline{x}], \tag{3.39}$$

редукция заключается в том, чтобы оставить ту часть интервала $[\underline{x}, \overline{x}]$, на котором неравенство справедливо. При этом, $h(x)$, как правило, является оценкой целевой функции или функции ограничений. Для распространенных полиномиальных (1-2-3 степеней) оценочных функций, неравенство (3.39) решается аналитически достаточно просто.

3.10 Нелинейные уравнения

3.10.1 Реккурентная форма записи уравнений и итерационные методы

Пусть требуется найти множество решений уравнения, записанного в реккурентной форме:

$$x = G(x), x \in \mathbf{X}, \tag{3.40}$$

где $\mathbf{X}$ — брус размерности n, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Компоненты вектор-функции $G(x)$ будем обозначать через $G_1(x), \dots, G_n(x)$.

Напомним одну из возможных формулировок известной теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 6 Каждая непрерывная функция, отображающая выпуклое компактное подмножество евклидова пространства в себя, имеет неподвижную точку в этом подмножестве.

Таким образом, если верно включение:

$$G(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{X},$$

то уравнение (3.40) имеет решение. В некоторых приложениях достаточно установление факта наличия решения.

Поставим задачу максимально точно локализовать множество решений уравнения (3.40), т.е. найти возможно меньший по диаметру брус, содержащий все множество решений данного уравнения.

Для этого применим итерационный процесс, представленный алгоритмом 8, в котором $\mathbf{G}_i(x)$ обозначает некоторое интервальное расширение функции $G_i(x)$.

функция `reccur` **($\mathbf{X}$):**
- **Входные данные:** $\mathbf{X}$ — исходный брус
- **Выходные данные:** (result, $\hat{\mathbf{X}}$)
- exstflag := sexists
- **цикл** $i \in 1, \dots, n$ **:**
  - $\tilde{X}_i := \mathbf{G_i}(\hat{X}_1 \dots, \hat{X}_{i-1}, X_i, \dots, X_n)$
  - **если** *exstflag = sexists* **и** *not* $\tilde{X}_i \subseteq X_i$ **, тогда**
    - exstflag := maybe
  - **конец условия**
  - $\hat{X}_i := \tilde{X}_i \cap X_i$
  - **если** $\hat{X}_i = \varnothing$ **, тогда**
    - **вернуть** (nosolution, $\varnothing$)
  - **конец условия**
- **конец цикла**
- **вернуть** (exstflag, $(\hat{X}_1 \times \dots \times \hat{X}_n)$)

Алгоритм 8: Функция реккурентного отображения

Входные данные: $\mathbf{X}$ — исходный брус
повторять
$\hat{\mathbf{X}} := \mathbf{X}$
$(r, \mathbf{X}) :=$ `reccur` $(\hat{\mathbf{X}})$
до тех пор, пока $r \neq nosolution$ **и** $\mathbf{wid}(\mathbf{X}) - \mathbf{wid}(\hat{\mathbf{X}}) > \varepsilon$;
вернуть $(r, \mathbf{X})$

Алгоритм 9: Итерационный процесс поиска решения

Рассмотрим способы получения реккурентного уравнения из уравнения

$$F(x) = 0, \tag{3.41}$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение.

1. *Реккурентное соотношение Кравчика*

Произведем эквивалентное преобразование уравнения (3.41):

$$x = x - \Lambda F(x), \tag{3.42}$$

где Λ — невырожденная матрица действительных чисел размера $n \times n$. Несложно показать, что из условия невырожденности Λ вытекает совпадение множеств решений уравнений (3.41) и (3.43). Функция $G(x)$ в данном случае имеет вид $G(x) = x - \Lambda F(x)$. Если для оценки каждой функции $G_i(x)$ применить центральную интервальную форму относительно точких $c \in \mathbf{X}$, то получится реккурентное соотношение Кравчика.

Это соотношение также может быть получено непосредственно. Применим к правой части теорему Лагранжа относительно точки $c \in \mathbf{X}$:

$$x = c - \Lambda F(c) + (I - \Lambda F'(\xi))(x - c) = x - \Lambda F(c) - \Lambda F'(\xi)x \tag{3.43}$$

где ξ — некоторая точка на отрезке, соединяющим c и x.

2. Расширение Хансена-Сенгупты

Другой способ получения рекуррентного уравнения предложен Хансеном-Сенгуптой и состоит в следующем. Пусть точка $c \in \mathbf{X}$. Согласно теореме Лагранжа найдется точка $\xi \in \mathbf{X}$ такая, что

$$F(x) = F(c) + F'(\xi)(x - c). \tag{3.44}$$

Тогда исходное уравнение (3.41) может быть переписано в виде:

$$F(c) + F'(\xi)(x - c) = 0. \tag{3.45}$$

Домножим обе части этого уравнения на невырожденную $n \times n$ матрицу Λ.

$$\Lambda F(c) + \Lambda F'(\xi)(x - c) = 0. \tag{3.46}$$

Вводя обозначения $A = \Lambda F(c)$, $B = \Lambda F'(\xi)$, получим

$$A + B(x - c) = 0. \tag{3.47}$$

Пусть $B = D + M$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят диагональные элементы матрицы B. Тогда (3.47) может быть переписано в виде

$$A + (D + M)(x - c) = 0. \tag{3.48}$$

или

$$Dx = Dc - A + M(c - x). \tag{3.49}$$

В случае невырожденности матрицы D получим рекуррентное уравнение:

$$x = c - D^{-1}A + D^{-1}M(c - x). \tag{3.50}$$

Пример 6 Рассмотрим недоопреде

В дальнейшем потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 17 (Лемма об отделимости) Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество. Тогда $z \notin D$ в том и только том случае, когда найдется такое $c \in \mathbb{R}^n$, что $c^T(z - x) \geq 1$ для всех $x \in D$.

Доказательство. (достаточно просто)

*Определение 23 Множество матриц $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ называется **регулярным**, если оно замкнуто, выпукло и ограничено, а все матрицы из $\mathbf{A}$ не являются сингулярными.*

*Определение 24 Рассмотрим множества $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ и функцию $G(x, t) : D \times E \to \mathbb{R}^n$. Множество матриц $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ называется **Липшицевым по переменным** x **для функции** $G(x, t)$ **на множестве** $D \times E$, если для любых $x, y \in D$, $t \in E$ найдется матрица $A \in \mathbb{A}$, такая что:*

$$G(x, t) - G(y, t) = A(x - y). \tag{3.51}$$

Важным частным случаем приведенного определения является ситуация, когда $m = 0$, т.е. множество переменных t — пусто. В этой ситуации при определении Липшицевости можно не уточнять по каким переменным выполнено условие Липшицевости.

В большинстве ситуаций на практике множество матриц является интервальной матрицей. В качестве интервальной матрицы может выступать любое интервальное расширение матрицы $\frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ на множестве $D \times E$.

Теорема 7 Пусть $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактное множество, $E \subseteq \mathbb{R}^p$ замкнутое и связное множество. Пусть $G(x_0, t_0) = 0$ для некоторых $x_0 \in D$, $t_0 \in E$ и $G(x, t) \neq 0$ при $x \in \partial D, t \in E$. Пусть также существует регулярное Липшицево множество $\mathbb{A}$ для функции $G(x, t)$ по переменным x и множеству $D \times E$. Тогда существует однозначно определяемая функция $H : E \to D$, такая что для любого $t \in E$ выполняется $G(H(t), t) = 0$.

Доказательство. Обозначим $E' = \{t \in E \,|\, G(x, t) = 0$ для некоторого $x \in D\}$. Докажем, что для каждого $t \in E'$ существует единственное $x \in D$, удовлетворяющее уравнению $G(x, t) = 0$. Предположим противное: пусть найдутся $x, y \in D$ такие, что $G(x, t) = G(y, t) = 0$. Тогда, $G(x, t) - G(y, t) = A(x - y)$, $A \in \mathbf{A}$. Так как A — невырожденная, то $x - y = A^{-1}(G(x, t) - G(y, t)) = 0$. Отсюда следует, что $x = y$. Таким образом, для всех $t \in E'$ уравнение $G(x, t) = 0$ имеет в точности одно решение, которое мы обозначим через $x = H(t)$.

Рассмотрим последовательность точек $t_k \in E'$, $k = 1, 2, \ldots$, стремящуюся к точке t_*. В силу замкнутости E, $t_* \in E$. Рассмотрим последовательность точек $x_k \in D$, $x_k = H(t_k), k = 1, 2, \ldots$. Так как D ограничено и замкнуто, то у последовательности x_k найдется точка накопления $x_* \in D$. Таким образом, существует подпоследовательность $\hat{x}_k, \hat{t}_k$, последовательности x_k, t_k, сходящаяся к x_*, t_*. Из того, что $G(\hat{x}_k, \hat{t}_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ следует, что $G(x_*, t_*) = 0$. Следовательно, $t_* \in E'$. Из этого, во-первых, следует, что E' замкнуто относительно $\mathbb{R}^p$. Во-вторых, $x_* = H(t_*)$ в силу однозначности функции H. Из этого также следует, что точка накопления в точности одна и совпадает с x_*, т.е. $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$, что означает непрерывность функции H в любой точке множества E'.

Заметим, что т.к. E' замкнуто в $\mathbb{R}^p$, $E' \subseteq E$ и E — связно, то если E' открыто в E, то значит $E' = E$. Рассмотрим точку $t_* \in E'$ и ее образ $x_* = H(t_*)$ при отображении H. Т.к. $G(x_*, t_*) = 0$, то по условиям теоремы $x_* \in int(D)$. Следовательно, найдется $\delta > 0$, такое что $x \in int(D)$ при $\|x - x_*\| \leq \delta$. Т.к. множество $\mathbf{A}$ — регулярно, то для некоторого числа $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ неравенство $\|A^{-1}\|_2 \leq \gamma$ выполняется для любого $A \in \mathbf{A}$. Т.к. функция $G(x, t)$ непрерывна в точке x_*, t_*, то найдется такая окрестность T точки t_*, что $\|G(x_*, t) - G(x_*, t_*)\| = \|G(x_*, t)\| \leq \frac{\delta}{2\gamma}$ при $t \in T$. Покажем, что $T \subseteq E'$, что и будет означать открытость E' в E.

Для этого рассмотрим некоторое $t \in T$. Определим непрерывную функцию $f(y) = \|G(y, t)\|$ и обозначим через y_* точку в которой функция $f(y)$ достигает минимума на компактном множестве D. В частности, выполняется $f(y_*) \leq f(x_*)$, т.е. $\|G(y_*, t)\| \leq \|G(x_*, t)\|$. По условиям теоремы найдется такая матрица $A_* \in \mathbf{A}$, что $G(x_*, t) - G(y_*, t) = A_*(x_* - y_*)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|x_* - y_*\| &= \|A_*^{-1}(G(x_*,t) - G(y_*,t))\| \le \|A_*^{-1}\|\|G(x_*,t) - G(y_*,t)\| \\ &\le \|A_*^{-1}\|\left(\|G(x_*,t)\| + \|G(y_*,t)\|\right) \le 2\|A_*^{-1}\|\|G(x_*,t)\| \\ &\le 2\gamma\frac{\delta}{2\gamma} = \delta.\end{aligned}$$

Значит, $y_* \in int(D)$.

Покажем, что $z_* = G(y_*,t) = 0$. Проведем доказательство "от противного". Пусть $G(y_*,t) \neq 0$. В силу регулярности множества $\mathbf{A}$, можно утверждать, что множество $K = \{A^T z_* | A \in \mathbf{A}\}$ выпукло и не содержит нулевого вектора. Тогда найдется вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой что для всех $z \in K$ выполняется $c^T z \ge 1$. В силу регулярности множества $\mathbf{A}$ существует действительное число $\alpha > 0$, такое что $\|A\| \le \alpha$ для всех A из $\mathbf{A}$. Так как $y_* \in int(D)$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon < \frac{2}{(\alpha\|c\|)^2}$ и $\tilde{y} = y_* - \varepsilon c \in D$. Тогда

$$G(\tilde{y},t) = G(y_*,t) - A(y_* - \tilde{y}) = G(y_*,t) - \varepsilon Ac$$

для некоторого $A \in \mathbf{A}$. Справедлива следующая система соотношений:

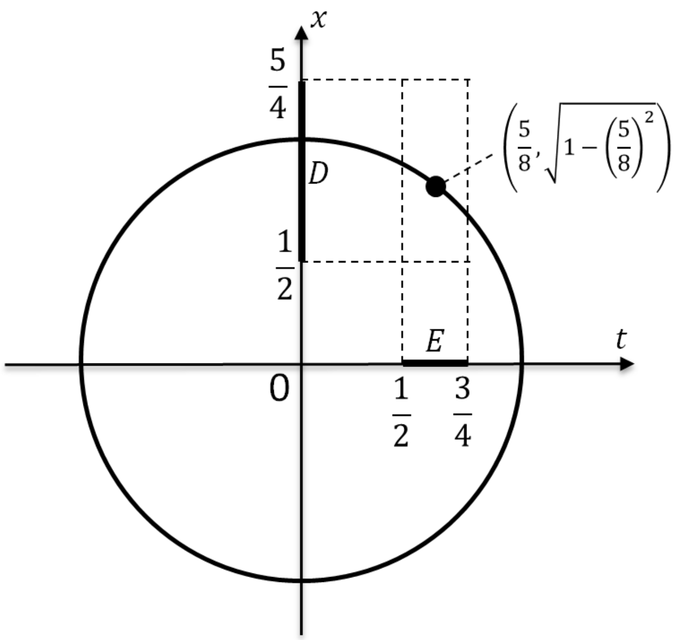
$$\begin{aligned}\|G(\tilde{y},t)\|^2 &= (G(y_*,t) - \varepsilon Ac)^T(G(y_*,t) - \varepsilon Ac) \\ &= \|G(y_*,t)\|^2 - 2\varepsilon(Ac)^T G(y_*,t) + \|\varepsilon Ac\|^2 \\ &= \|G(y_*,t)\|^2 - 2\varepsilon c^T A^T G(y_*,t) + \|\varepsilon Ac\|^2 \\ &= \|G(y_*,t)\|^2 - 2\varepsilon c^T A^T z_* + \|\varepsilon Ac\|^2 \\ &\le \|G(y_*,t)\|^2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2(\alpha\|c\|)^2 \\ &< \|G(y_*,t)\|^2 - 2\varepsilon + \varepsilon\frac{2}{(\alpha\|c\|)^2}(\alpha\|c\|)^2 = \|G(y_*,t)\|^2\end{aligned}$$

Полученное неравенство $\|G(\tilde{y},t)\|^2 < \|G(y_*,t)\|^2$ противоречит выбору y_*. Значит, $z_* = G(y_*,t) = 0$. Тем самым показано, что $t \in E'$. Т.е. $T \subseteq E'$, открытость множества E' в E установлена. Значит $E = E'$ и теорема доказана. $\square$.

Рассмотрим возможное применение доказанной теоремы (Рис. 3.3).

Пример 7 Пусть $G(x,t) = x^2 + t^2 - 1$, $E = [1/2, 3/4]$, $D = [1/2, 5/4]$. *Так как* $\frac{\partial x}{\partial t}(x,t) = 2x$, *то множество* $\{2x | x \in [1/2, 5/4]\}$ *является регулярной интервальной Липшицевой матрицей для* $G(x,t)$ *на множестве* $D \times E$ *по* x. *Очевидно, также, что* $t_0 = 5/8 \in E$, $x_0 = \sqrt{1 - (5/8)^2} \in D$ *и* $G(x_0,t_0) = 0$. *Граница множества* D *состоит из двух точек* $\partial D = \{1/2, 5/4\}$. *Поскольку*

$$G(1/2, [1/2, 3/4]) \subseteq 1/4 + [1/4, 9/16] - 1 = [-1/2, -3/16] < 0$$



Фиг. 3.3. Иллюстрация применения обобщения теоремы о неявной функции

$$G(5/4, [1/2, 3/4]) \subseteq 25/16 + [1/4, 9/16] - 1 = [29/16, 34/16] - 1 = [13/16, 18/16] > 0,$$

то $G(\partial D, E)$ *не содержит* 0. *Тем самым выполнены все условия теоремы 7. Следовательно для каждого* $t \in E$ *существует в точности одно* $x = H(t)$, *удовлетворяющее уравнению* $G(x, t) = 0$.

Литература

[1] Ratz D. An optimized interval slope arithmetic and its application. – Inst. für Angewandte Mathematik, 1996.

[2] Martello S., Toth P., Knapsack Problems. John Wiley & Sons Ltd., 1990.

[3] Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. изд. 2-е, исп. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[4] Kolesar P.J. A branch and bound algorithm for the knapsack problem // Management Science. 1967. V. 13, N 9. P. 723–735.

[5] Greenberg H., Hegerich R.L. A branch and bound algorithm for the knapsack problem // Management Science. 1970. V. 16, N 5. P. 327-332.

[6] Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М.: Наука, 1976.

[7] Гришухин В.П. Эффективность метода ветвей и границ в задачах с булевыми переменными // Исследования по дискретной оптимизации. 1976. С. 203-230.

[8] Колпаков Р.М., Посыпкин М.А., Асимптотическая оценка сложности метода ветвей и границ с ветвлением по дробной переменной для задачи о ранце. Дискретн. анализ и исслед. опер., 2008, 15:1, 58–81.

[9] Р.М. Колпаков, М.А. Посыпкин, Верхняя и нижняя оценки трудоемкости метода ветвей и границ для задачи о ранце // Дискретная математика, Т. 22, вып. 1, 2010, С. 58-73