Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Институт: ИВТИ

Направление подготовки: 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Название предмета: Непрерывные математические модели

КУРСОВАЯ РАБОТА

Тема: Программная реализация математической модели стоимости опционов

СТУДЕНТ

/ Гольцов М.Н.
(подпись) *(Фамилия и инициалы)*

Группа А-05м-23
(номер учебной группы)

АТТЕСТАЦИЯ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

(Оценка)

/ Ижуткин В.С.
(подпись) *(Фамилия и инициалы проверяющего)*

Москва, 2024

Оглавление

Введение

Динамическое моделирование опционов приобретает все большую значимость в современной финансовой практике из-за необходимости точной оценки стоимости производных инструментов и управления рисками на волатильных рынках. Классические подходы часто не учитывают стохастическую природу волатильности и скачки цен, что ограничивает их применимость в условиях нестабильности.

В этой курсовой работе рассматриваются три модели с разными особенностями: модель Блэка-Шоулза предполагает постоянную волатильность и нормальное распределение доходностей; модель Бейтса добавляет компонент скачков для учета резких изменений цен, таких как кризисы или новости; модель Хестона вводит стохастическую волатильность, отражающую изменчивость рыночных условий.

Приведённая работа направлена на создание компьютерной модели для визуализации динамики стоимости опционов при различных параметрах. Интерфейс будет включать интерактивные элементы, такие как ползунки для настройки волатильности, коэффициентов дрейфа и интенсивности скачков. Это позволит анализировать чувствительность моделей к разным рыночным сценариям и оценивать влияние параметров на стоимость опционов.

Математические модели опционов

Модель Блэка-Шоулза

Общая информация

Модель Блэка-Шоулза используется для оценки стоимости опционов. Она основана на предположении, что цена базового актива следует геометрическому броуновскому движению с постоянной волатильностью и без скачков.

Основные предположения

1. Цена базового актива S изменяется согласно следующему стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{1.1}$$

, где:

- S_t — текущая цена актива.
- μ — средняя доходность.
- σ — постоянная волатильность.
- W_t — стандартное броуновское движение.

2. Безрисковая процентная ставка *r* постоянна
3. На рынке отсутствуют арбитражные возможности
4. Торговля происходит непрерывно, транзакционные издержки отсутствуют
5. Базовый актив не выплачивает дивидендов (в классической модели)

Уравнение:

Уравнение Блэка-Шоулза для цены опциона V(*S*, *t*):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1.2}$$

Применение:

Используется для вычисления стоимости европейских опционов (погашаемых только в момент экспирации).

Модель Бейтса

Общая информация

Модель Бейтса расширяет модель Блэка-Шоулза, добавляя скачки в динамику цен базового актива. Это позволяет учитывать внезапные изменения рынка, которые не описываются классическим броуновским движением.

Основные предположения

1. Цена актива S_t подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS_t = S_t\left(\left(r - \kappa_J\right)dt + \sigma dW_t + (J-1)dq_t\right) \tag{2.1}$$

, где:

- λ — интенсивность скачков (количество скачков в единицу времени).
- J — случайная величина, описывающая размер скачка (обычно $J \sim logN(\mu_J, \sigma_J^2)$).
- q_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ.
- $\kappa_J = \mathrm{E}[J-1]$ — средний вклад скачков.

2. Динамика цены состоит из двух компонентов:
   a. Непрерывная часть (обычное броуновское движение)
   b. Дискретные скачки, моделируемые пуассоновским процессом

3. Волатильность σ остается постоянной

Уравнение:

Комбинация уравнения Блэка-Шоулза и дополнения, описывающего скачки:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV + \lambda \mathrm{E}[V(SJ,t) - V(S,t)] = 0 \tag{2.2}$$

Применение:

Используется для оценки деривативов, где рынок подвержен неожиданным скачкам, например, во время кризисов или крупных новостей.

Модель Хестона

Общая информация

Модель Хестона описывает стохастическую волатильность, позволяя учитывать изменчивость волатильности во времени. Это делает модель более реалистичной для оценки деривативов.

Основные предположения

1. Цена актива S_t подчиняется уравнению:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sqrt{v_t} dW_t^S \tag{3.1}$$

, где: v_t — мгновенная (случайная) волатильность.

2. Волатильность v_t описывается следующим уравнением:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^v \tag{3.2}$$

, где:

- κ — скорость восстановления к среднему.
- θ — долгосрочный уровень волатильности.
- σ_v — волатильность волатильности (интенсивность флуктуаций).
- W_t^v — броуновское движение для волатильности.

3. Волатильность σ остается постоянной

$$dW_t^S * dW_t^v = \rho \, dt \tag{3.2}$$

, где: ρ — коэффициент корреляции между ценой актива и волатильностью.

Уравнение:

Комбинация уравнения Блэка-Шоулза и дополнения, описывающего скачки:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \sigma_v v S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial v} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial V}{\partial v} - rV = 0 \tag{2.2}$$

Применение:

Используется для оценки сложных деривативов, таких как опционы с длительным сроком экспирации, где волатильность может существенно меняться.

Итоговое сравнение

Таблица№1 – Итоговое сравнение моделей

Модель	***Особенность***	***Применение***
Блэк-Шоулз	Постоянная волатильность	Стандартные европейские опционы
Бейтс	Волатильность + скачки	Рынки с резкими изменениями
Хестон	Стохастическая волатильность	Сложные деривативы с изменяющейся волатильностью

Компьютерная модель опционов

Созданное приложение предназначено для моделирования стоимости опционов с использованием моделей Блэка-Шоулза, Бейтса, Хестона. С помощью динамических ползунков пользователь может настроить интересующую его модель. Подробнее опишем интерфейс программы.

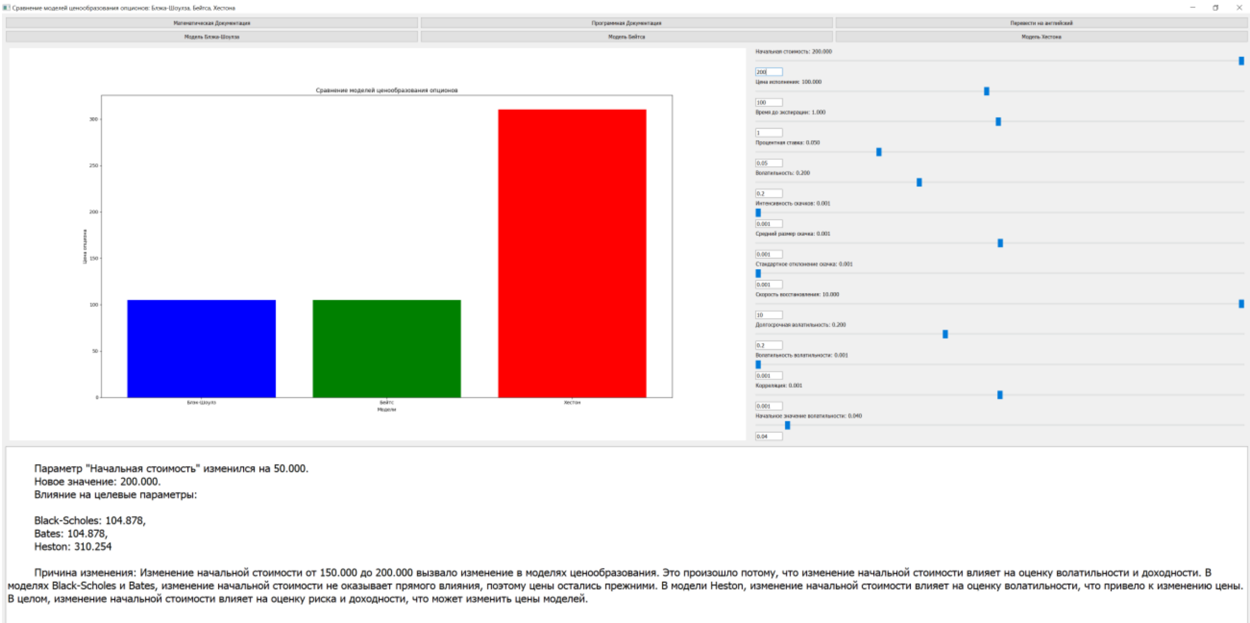

Рисунок №1 – Начальный интерфейс программы

Интерфейс можно условно разделить на несколько компонентов:

Рисунок №2 – Компоненты программы

1 – Кнопки для интерфейса

- Математическая документация – Документация содержащая описание математической модели
- Программная документация – Документация содержащая описание программной реализации модели

- Перевести на английский – Кнопка интерфейса, позволяющая пользователю переводить интерфейс на английский язык
- Модель Блека-Шоулза – Элемент интерфейса, позволяющий посмотреть отдельно график прогнозирующий стоимость опциона согласно модели Блека-Шоулза
- Модель Бейтса – Элемент интерфейса, позволяющий посмотреть отдельно график прогнозирующий стоимость опциона согласно модели Бейтса
- Модель Хестона – Элемент интерфейса, позволяющий посмотреть отдельно график прогнозирующий стоимость опциона согласно модели Хестона

2 – Столбчатые диаграммы, показывающие предсказание стоимости опционов каждой из модели

3 – Динамически изменяемые ползунки, влияющие на расчёт предсказания моделей

4 – Описание изменений, объясняющие колебания целевой переменной

Кроме того, пользователю предоставляется возможность прочитать необходимую для понимания информацию об исследуемых моделях. Это можно сделать с помощью разделов “Математическая документация”; “Программная документация”

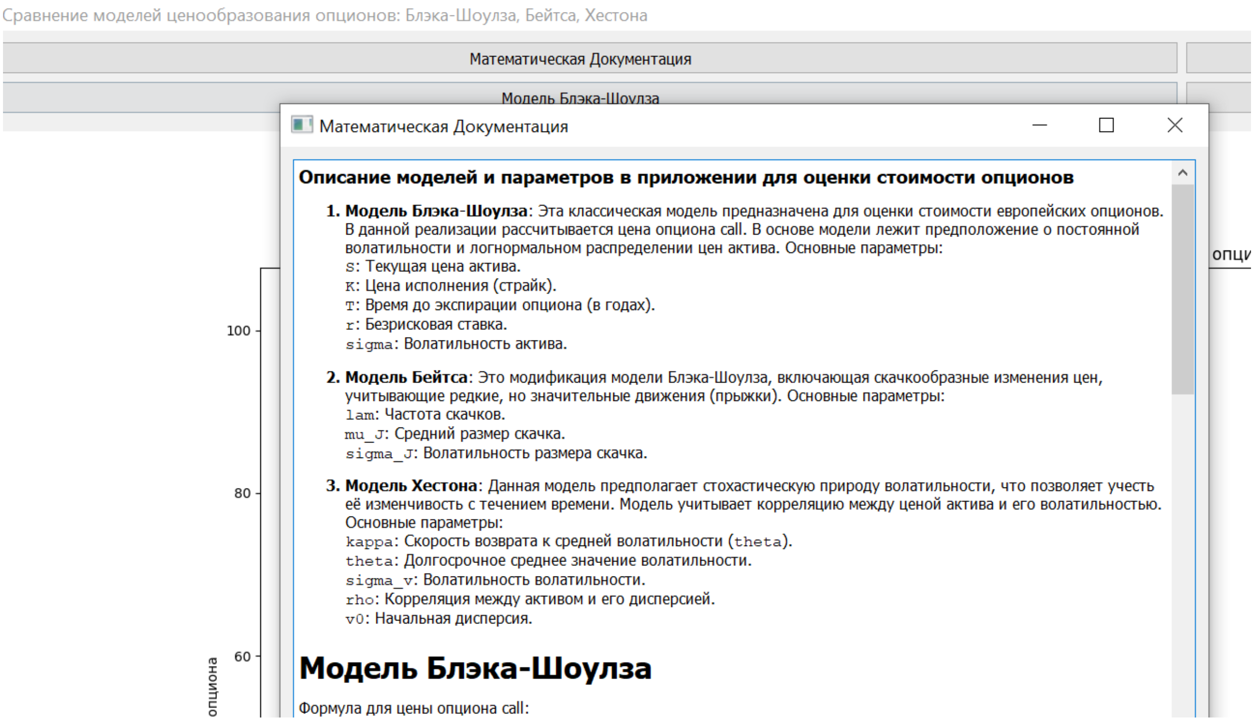

Рисунок №3 – Математическая документация

После изменения исследуемых параметров пользователю предоставляется возможность посмотреть на график каждой из моделей. Тогда для начального состояния:

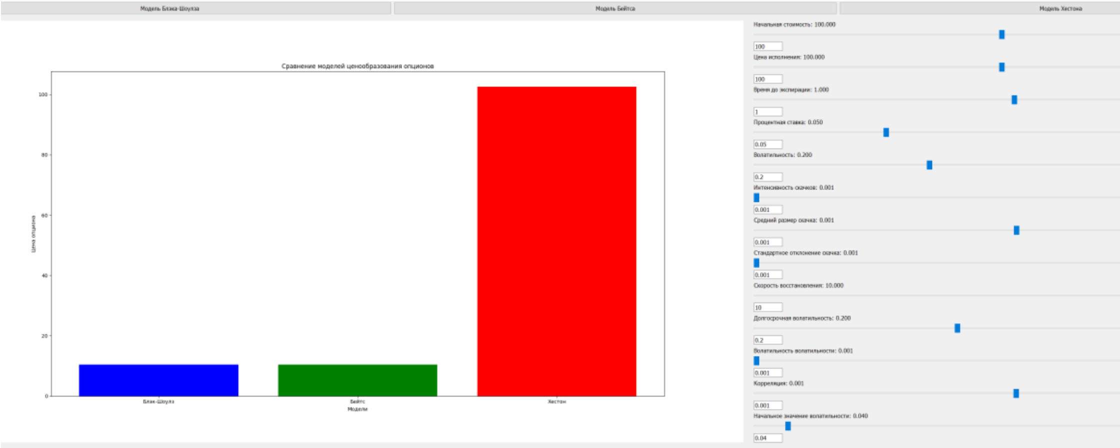

Рисунок №4 – Исходное состояние

Будут получены следующие графики

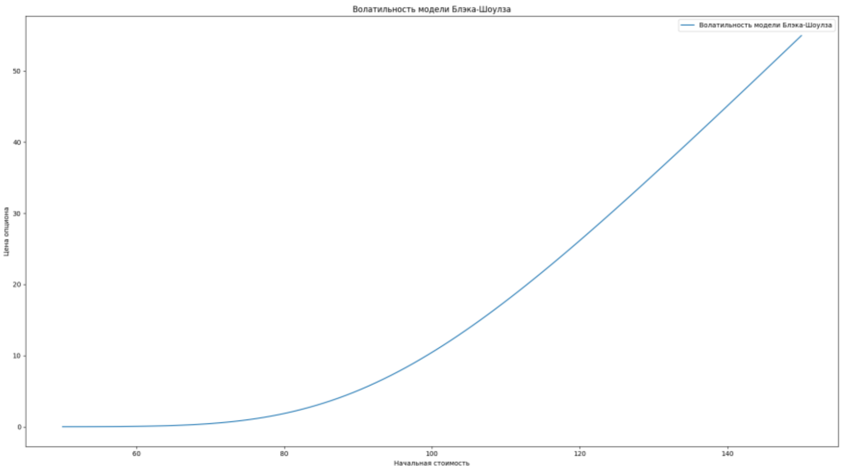

Рисунок №5 – Модель Блека-Шоулза

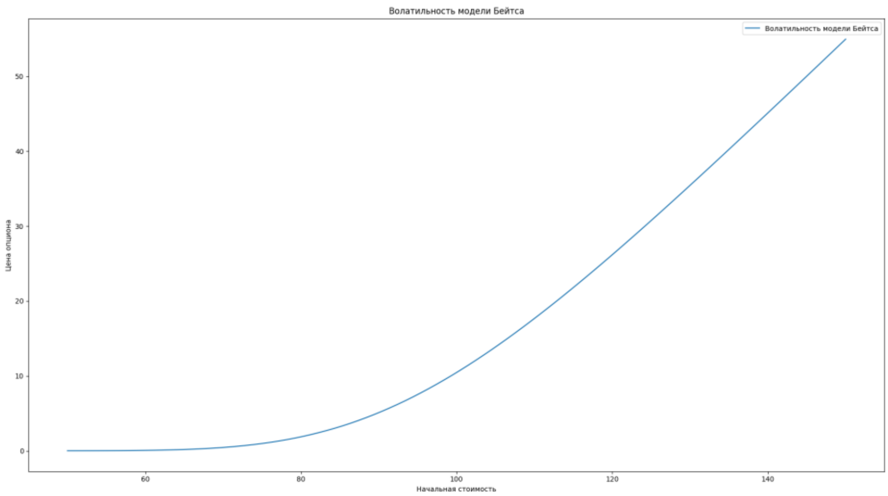

Рисунок №6 – Модель Бейтса

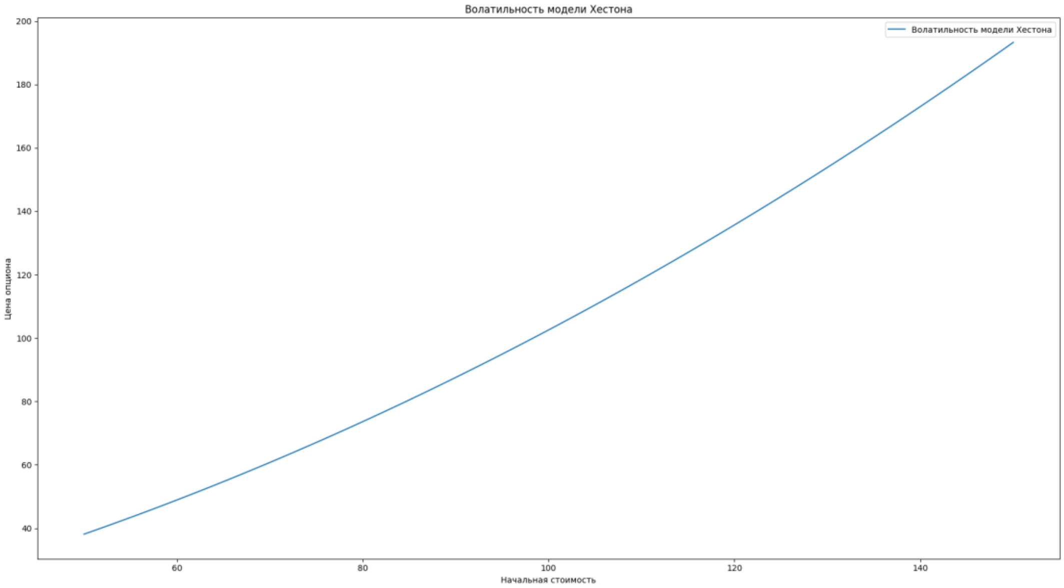

Рисунок №7 – Модель Хестона

В ходе исследования мы применили модель Llama для формирования описания причин и связей между целевой переменной и изменяемыми параметрами. Модель давала результаты, аргументирующие поведения графиков.

Параметр "Начальная стоимость" изменился на 50.000.
Новое значение: 150.000.
Влияние на целевые параметры:

Black-Scholes: 55.627,
Bates: 55.627,
Heston: 194.102

Причина изменения: Изменение начальной стоимости от 100.000 до 150.000 вызвало изменения в моделях Black-Scholes и Bates, поскольку они учитывают изменение базовой стоимости для расчета волатильности и доходности. Это, в свою очередь, влияет на оценку цены. В модели Heston, которая учитывает изменение волатильности, изменение начальной стоимости также влияет на оценку цены, поскольку изменение базовой стоимости влияет на изменение волатильности.

Рисунок №8 – Сформированное описание

Заключение

Динамическое моделирование опционов становится все более актуальным в условиях современных финансовых рынков, где точная оценка стоимости производных инструментов и эффективное управление рисками играют ключевую роль. Классические модели, такие как модель Блэка-Шоулза, ограничены в своей способности учитывать стохастическую природу волатильности и резкие изменения цен. В этой курсовой работе мы проанализировали три модели, каждая из которых предлагает уникальные подходы к моделированию: модель Блэка-Шоулза с постоянной волатильностью, модель Бейтса с учетом скачков цен и модель Хестона, отражающая стохастическую волатильность.

Создали компьютерную модель для визуализации динамики стоимости опционов при различных параметрах которая позволит пользователям глубже понять поведение опционов в ответ на изменения рыночных условий. Интерактивный интерфейс с элементами управления, такими как ползунки для настройки ключевых параметров, обеспечил возможность анализа чувствительности моделей к различным сценариям. Это не только повысило уровень понимания пользователей о влиянии параметров на стоимость опционов, но и стало полезным инструментом для принятия обоснованных инвестиционных решений в условиях высокой волатильности рынка.

Таким образом, результаты данной работы подчеркивают важность адаптивного подхода к моделированию опционов и его применения в практике финансового анализа и управления рисками.