Réfraction de la houle

Réfraction de la houle

Pb : Pourquoi les crêtes de vague semblent arriver parallèlement au rivage ?

Plan : I/Théorie de la houle linéaire

- 1-Hypothèses
- 2-Modèle de la houle
  - a) Modèle de la houle en eau profonde
  - b) Modèle de la houle en eau peu profonde

II/ Réfraction de la houle

- 1-Vérification expérimentale
- 2-Simulation numérique

Choix du sujet

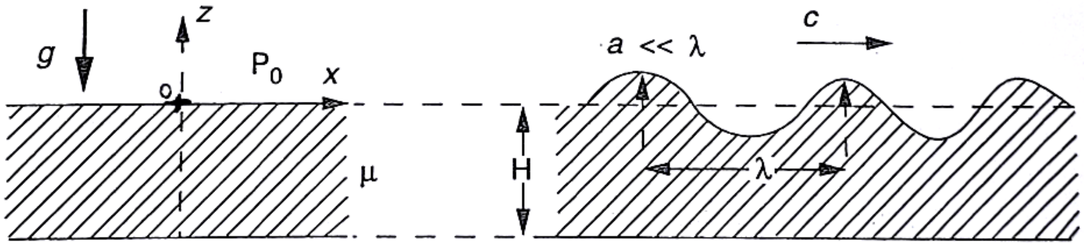
I/Théorie de la houle linéaire

1-Hypothèses:

-Fluide non visqueux

-Écoulement irrotationnel: $rot(\vec{v}) = \vec{0}$

-Fluide incompressible: $\mu(x, z, t) = \mu_0$



-Étude en deux dimensions

-a (hauteur de houle) vérifie: $a \ll \lambda$

-La région $z > 0$ est occupée par l'atmosphère de pression uniforme P_0

-Le champ de pesanteur est uniforme $\vec{g} = -g\vec{e_z}\ avec\ g = 9,8\ m.s^{-2}$

I/Théorie de la houle linéaire

2-Modèle de la houle :

CONSÉQUENCE DE L'INCOMPRESSIBILITÉ

$$div(\vec{v}) = 0$$

ÉQUATION D'EULER :

$$\mu(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{grad}(\vec{v})) = \mu\vec{g} - \vec{grad}P$$

I/Théorie de la houle linéaire

2-Modèle de la houle :

REMARQUES :

*Notations : $P(x,z,t) = P_e(z) + p(x,z,t)$

$$\begin{cases} v_x = u(x,z,t) \\ v_y = 0 \\ v_z = w(x,z,t) \end{cases}$$

*Considérerons un régime dans lequel les grandeurs (p,u et w) sont de la forme $\underline{g} = g_M i(z) \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$

avec $g = Re(\underline{g})$

I/Théorie de la houle linéaire

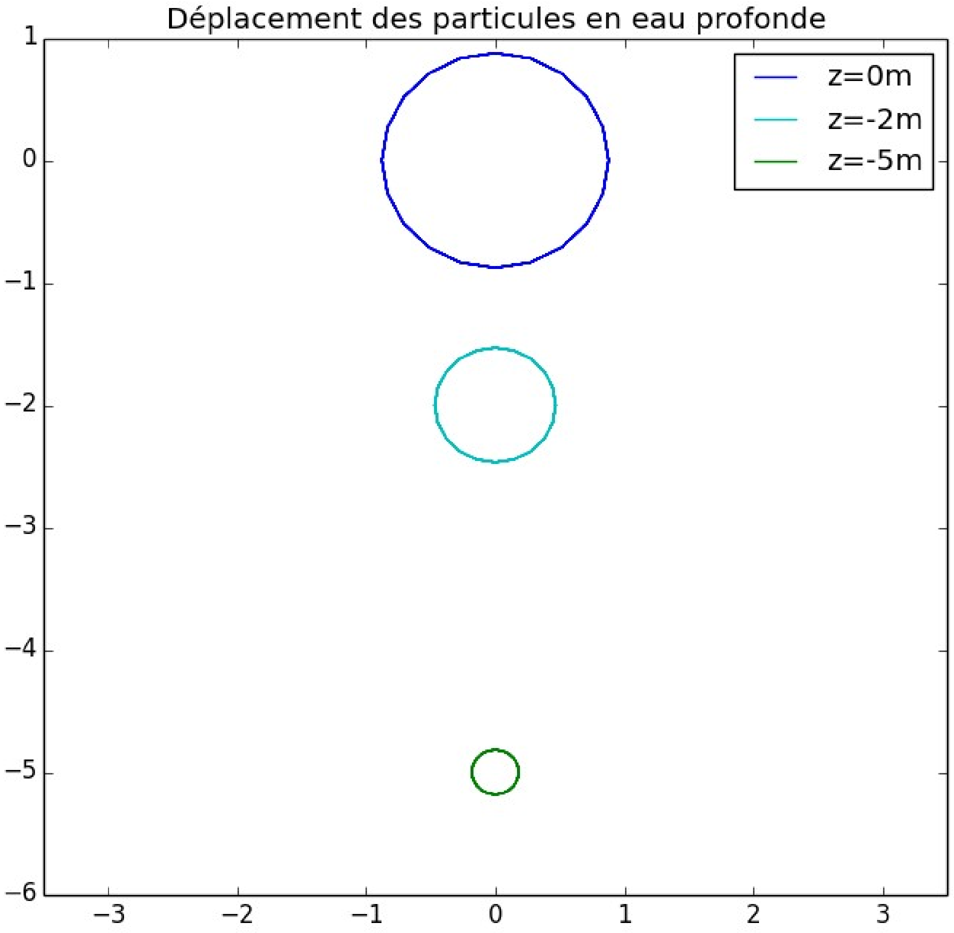
2-Modèle de la houle :

a) Modèle de la houle en eau profonde

cf Annexe A

$$\vec{v} = V_0 \mathrm{e}^{kz} (\cos{(kx - \omega t)} \vec{e_x} + \sin{(kx - \omega t)} \vec{e_z})$$

Programme informatique cf Annexe B



I/Théorie de la houle linéaire

<u>2-Modèle de la houle :</u>

a) Modèle de la houle en eau profonde

<u>Notations :</u> On pose $\begin{cases} u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} X = x + \xi(x,z,t) \\ Z = z + \zeta(x,z,t) \end{cases}$

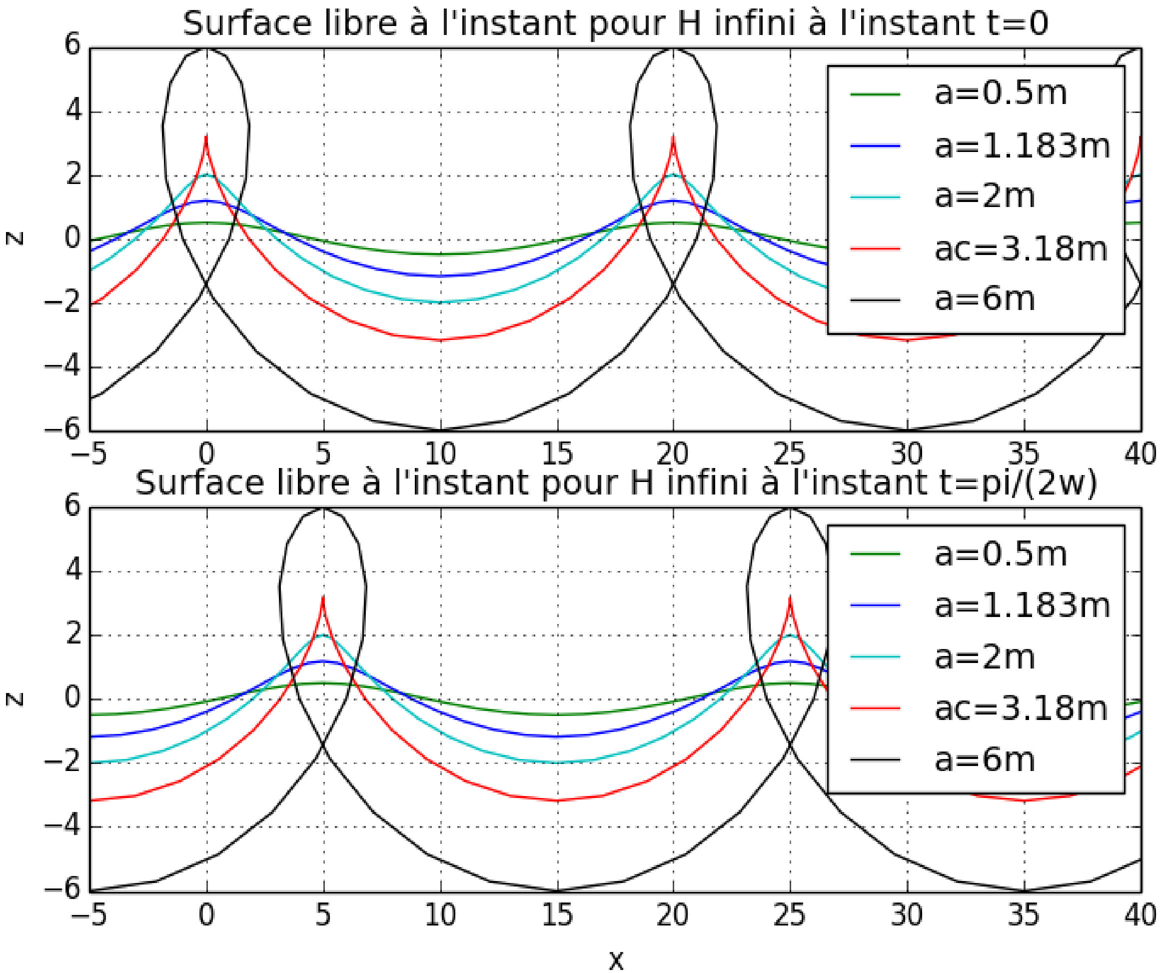
D'où, en posant $a = \frac{V_0}{\omega} = \frac{kA}{\mu\omega^2}$

$$X = x - a\sin(kx - \omega t) \quad (7)$$

$$Z = a\cos(kx - \omega t) \quad (8)$$

Programme informatique cf Annexe C

Point de rebroussement : $a_c = \frac{\lambda}{2\pi}$



I/Théorie de la houle linéaire

2-Modèle de la houle :

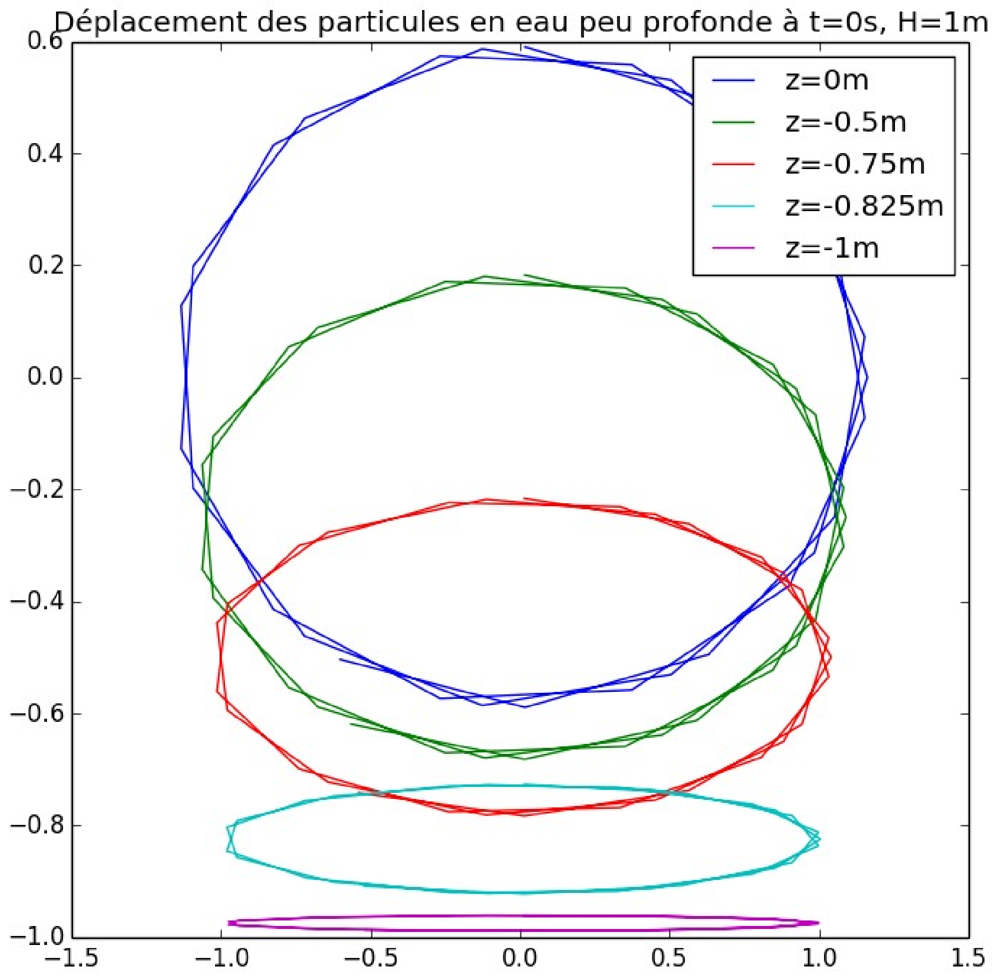
b) Modèle de la houle en eau peu profonde

Condition : $w_{z=-H} = 0$

cf Annexe D

$$\begin{cases} u = V_0[\frac{ch(k(z+H))}{ch(kH)}]\cos{(kx-\omega t)} \\ w = V_0[\frac{sh(k(z+H))}{ch(kH)}]\sin{(kx-\omega t)} \end{cases}$$

Programme informatique cf Annexe E



I/Théorie de la houle linéaire

<u>2-Modèle de la houle :</u>

b) Modèle de la houle en eau peu profonde

<u>Notations :</u> On pose $\begin{cases} u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{cases}$

Alors, $\begin{cases} X = x + \xi(x,z,t) \\ Z = z + \zeta(x,z,t) \end{cases}$

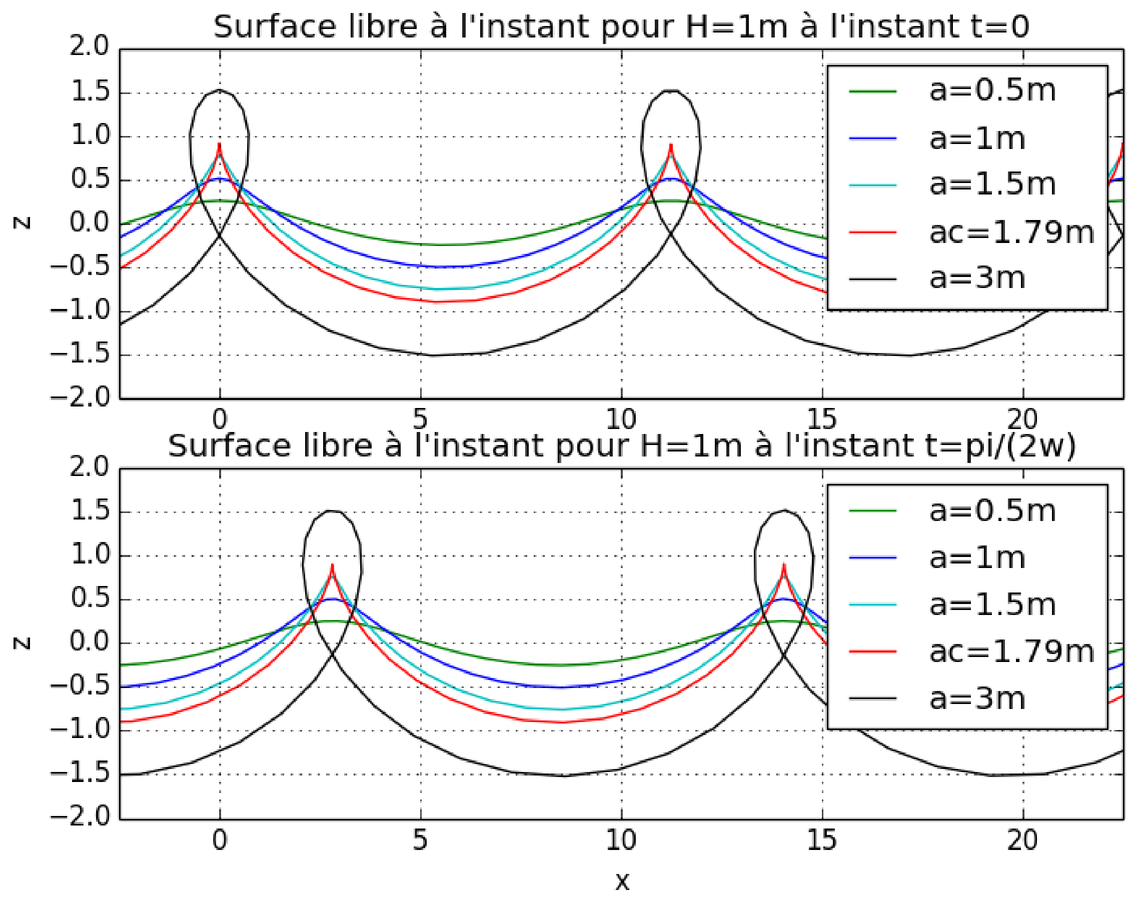
D'où, en posant $a = \frac{V_0}{\omega} = \frac{kA}{\mu\omega^2}$

$$X = x - a\sin(kx - \omega t) \quad (7')$$

$$Z = a th(kH)\cos(kx - \omega t) \quad (8')$$

Programme informatique cf Annexe F

Point de rebroussement : $a_c = \frac{\lambda}{2\pi}$



I/Théorie de la houle linéaire

2-Modèle de la houle :

b) Modèle de la houle en eau peu profonde

Relation de dispersion et vitesse de groupe :

$$P = P_e(Z) + p(x, Z, t)$$

cf Annexe D $P = P_0 - \mu g Z + A[ch(kZ) + th(kH)sh(kZ)]$

Or $A = \frac{a\mu\omega^2}{K}$

D'où $P = P_0 - \mu g Z + \frac{\mu\omega^2}{k} a[ch(kZ) + th(kH)sh(kZ)]$

c'est-à-dire d'après (8')

$$\mu g Z = \frac{\mu\omega^2}{k} \frac{Z}{th(kH)}[ch(kZ) + th(kH)sh(kZ)]$$

Ie $gkth(kH) = \omega^2[ch(kZ) + th(kH)sh(kZ)]$

Or $a \ll \lambda$ donc $kZ \ll 1$

Donc $gkth(kH) = \omega^2$ (9')

Dans la limite $H \ll \lambda$

On obtient $\omega = k\sqrt{gH}$ (9'')

D'où $c = \sqrt{gH}$

Bibliographie

-François Marin, Hydrodynamique marine (La houle, les fonds marins et le littoral Cours logiciel et exercices corrigés), Édition Ellipses

-Olivier Thual, Hydrodynamique de l'environnement, Les éditions de l'École Polytechnique

-Jean-Pierre SARMANT, Exercices et problèmes de mécanique: 2ème année MP, PC, PSI, PT, Édition Lavoisier/ Tec&Doc Collection de Sciences-Physiques p.104-106

ANNEXES

I/ Théorie de la houle linéaire

Notations : $P(x,z,t) = P_e(z) + p(x,z,t)$

A

$$\begin{cases} v_x = u(x,z,t) \\ v_y = 0 \\ v_z = w(x,z,t) \end{cases}$$

Démonstration du modèle de la houle en eau profonde-Vitesse (1/2)

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ (1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\frac{u \partial u}{\partial x} + \frac{w \partial u}{\partial z}) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} & (2) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\frac{u \partial w}{\partial x} + \frac{w \partial w}{\partial z}) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} & (3) \end{cases}$$

Considérerons un régime dans lequel les grandeurs (p,u et w) sont de la forme $\underline{g} = g_M i(z) \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}$

avec $g = Re(\underline{g})$

$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik$
$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$

$ik\underline{u} + \frac{\partial \underline{w}}{\partial z} = 0$ (1')

$\mu i \omega \underline{u} = ik\underline{p}$ (2') $\Longleftrightarrow$ $\underline{u} = \frac{k\underline{p}}{\mu\omega}$

$\mu i \omega \underline{w} = \frac{\partial \underline{p}}{\partial z}$ (3')

On dérive (3') par rapport à z $\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial z^2} = \mu i \omega \frac{\partial \underline{w}}{\partial z}$

En injectant (1') puis (2'), on a $\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial z^2} = k^2 \underline{p}$

d'où $\frac{\partial^2 p_M}{\partial z^2} = k^2 p_M$ (4')

Une solution générale de (4) peut-être cherchée sous la forme $P_M = A\mathrm{e}^{kz} + B\mathrm{e}^{-kz}$

Devant convenir pour $z \rightarrow -\infty$

on a nécessairement $B = 0$ donc $P_M = A\mathrm{e}^{kz}$

ANNEXES

I/ Théorie de la houle linéaire

Démonstration du modèle de la houle en eau profonde-Vitesse (2/2)

u est de la forme $u = U_0(z)\cos(kx - \omega t)$

En prenant la partie réelle dans (2'), on a

$U_0(z)\cos(kx - \omega t) = \frac{k}{\mu\omega} A e^{kz}$

On en déduit avec $kx - \omega t \equiv 0$ **que** $U_0(z) = \frac{kA}{\mu\omega}$

D'où $u = V_0 e^{kz}\cos(kx - \omega t)$ (5)

Avec $V_0 = \frac{ka}{\mu\omega}$

De même, v est de la forme $w = W_0(z)\cos(kx - \omega t)$

En prenant la partie réelle de (3'), on a

$Ake^{kz} = -\mu\omega W_0(z)\sin(kx - \omega t)$

On en déduit avec $kx - \omega t \equiv \frac{\pi}{2}$ **que** $W_0(z) = \frac{kA}{\mu\omega}$

D'où $w = V_0 e^{kz}\sin(kx - \omega t)$ (6)

ANNEXES

B

I/ Théorie de la houle linéaire

Déplacement des particules en eau profonde

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

"""Paramétrage"""
a=0.5
L=20
c=np.sqrt((9.81*L)/(2*np.pi))
k=2*np.pi/L
w=k*c

t_1=0
v0=a*w
x=np.arange(-50,50,1)

z0=0
z1=-2
z2=-5

U=[[z0,[]],[z1,[]],[z2,[]]]
W=[[],[],[]]


"""Déplacement des particules en eau profonde"""

for i in x:
    A=k*i
    for j in range(3):
        U[j][1].append(v0*(np.exp(k*U[j][0]))*np.cos(A))
        W[j].append(v0*(np.exp(k*U[j][0]))*np.sin(A)+U[j][0])


plt.plot(U[0][1],W[0], label="z=0m")
plt.plot(U[1][1],W[1], 'c', label="z=-2m")
plt.plot(U[2][1],W[2], label="z=-5m")
plt.xlim(-3.5,3.5)
plt.title("Déplacement des particules en eau profonde")
plt.legend()
plt.show()
```

ANNEXES

C

I/ Théorie de la houle linéaire

Profil de la houle pour diverses amplitudes (EP)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

"""Paramétrage"""
L=20
c=np.sqrt((9.81*L)/(2*np.pi))
k=2*np.pi/L
w=k*c

a_1=0.5
a_2=1.183
a_3=2
ac=3.18
a_4=6

t_1=0
t_2=np.pi/(2*w)

x=np.arange(-10,60,1)
X=[[a_1,[],[]],[a_2,[],[]],[a_3,[],[]],[ac,[],[]],[a_4,[],[]]]
Z=[[[],[]],[[],[]],[[],[]],[[],[]],[[],[]]]

"""Profil de la houle pour diverses amplitudes et aux instants t=0 et
t=pi/(2w)"""
for i in x:
    A=np.sin(k*i-w*t_1)
    B=np.cos(k*i-w*t_1)
    C=np.sin(k*i-w*t_2)
    D=np.cos(k*i-w*t_2)
    for j in range(5):
        X[j][1].append(i-X[j][0]*A)
        Z[j][0].append(X[j][0]*B)
        X[j][2].append(i-X[j][0]*C)
        Z[j][1].append(X[j][0]*D)
```

```
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(X[0][1],Z[0][0], 'g', label="a=0.5m")
plt.plot(X[1][1],Z[1][0], 'b', label="a=1.183m")
plt.plot(X[2][1],Z[2][0], 'c', label="a=2m")
plt.plot(X[3][1],Z[3][0], 'r', label="ac=3.18m")
plt.plot(X[4][1],Z[4][0], 'k', label="a=6m")
plt.xlim(-5,40)
plt.grid()
plt.ylabel("z")
plt.title("Surface libre à l'instant pour H infini à l'instant t=0")
plt.legend()

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(X[0][2],Z[0][1], 'g', label="a=0.5m")
plt.plot(X[1][2],Z[1][1], 'b', label="a=1.183m")
plt.plot(X[2][2],Z[2][1], 'c', label="a=2m")
plt.plot(X[3][2],Z[3][1], 'r', label="ac=3.18m")
plt.plot(X[4][2],Z[4][1], 'k', label="a=6m")
plt.xlim(-5,40)
plt.grid()
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("z")
plt.title("Surface libre à l'instant pour H infini à l'instant t=pi/(2w)")
plt.legend()

plt.show()
```

ANNEXES

I/ Théorie de la houle linéaire

D Démonstration du modèle de la houle en eau peu profonde

On cherche à présent une solution générale de (4) de la forme $P_M = Ach(kz) + Bsh(kz)$
(en gardant la signification attribuée à la constante d'intégration A)

Or d'après (3'), on a $\mu i \omega \underline{w} = \frac{\partial p}{\partial z}$

Or $w_{z=-H} = 0$
Donc $Aksh(kH) + Bkch(kH) = 0$

ie $B = Ath(kH)$

En procédant comme en A

On en déduit :

$$\begin{cases} u = V_0[\frac{ch(k(z+H))}{ch(kH)}]\cos(kx - \omega t) & (5') \\ w = V_0[\frac{sh(k(z+H))}{ch(kH)}]\sin(kx - \omega t) & (6') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = -a[\frac{ch(k(z+H))}{ch(kH)}]\sin(kx - \omega t) \\ \zeta = a[\frac{sh(k(z+H))}{ch(kH)}]\cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

Détails (5') :

u est de la forme $u = U_0(z)\cos(kx - \omega t)$

En prenant la partie réelle dans (2'), on a

ANNEXES

E

I/ Théorie de la houle linéaire

Déplacement des particules en eau peu profonde

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

"""Paramétrage"""
x_3=np.arange(-15,15,1)
z0=0
z1=-0.25
z2=-0.5
z3=-0.825
z4=-0.975

H=1
k=0.56

U=[[z0,[]],[z1,[]],[z2,[]],[z3,[]],[z4,[]]]
W=[[],[],[],[],[]]

"""Déplacement des particules en eau peu profonde"""
def ch(x):
    return (np.exp(x)+np.exp(-x))/2

def sh(x):
    return (np.exp(x)-np.exp(-x))/2

def th(x):
    return sh(x)/ch(x)

for i in x_3:
    E=k*H
    F=k*i
    for j in range(5):
        U[j][1].append(np.cos(F)*ch(k*U[j][0]+E))
        W[j].append(np.sin(F)*sh(k*U[j][0]+E)+U[j][0])

plt.plot(U[0][1],W[0], label="z=0m")
plt.plot(U[1][1],W[1], label="z=-0.5m")
plt.plot(U[2][1],W[2], label="z=-0.75m")
plt.plot(U[3][1],W[3], label="z=-0.825m")
plt.plot(U[4][1],W[4], label="z=-1m")

plt.title("Déplacement des particules en eau peu profonde à t=0s, H=1m")
plt.legend()
plt.show()
```

ANNEXES

F

I/ Théorie de la houle linéaire

Profil de la houle pour diverses amplitudes (EPP)

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

"""Paramétrages"""
H=1
c=np.sqrt(9.81*H)
w=1.75
k=w/c

T=(np.exp(k*H)-np.exp(-k*H))/(np.exp(k*H)+np.exp(-k*H))

a_1=0.5
a_2=1
a_3=1.5
ac=1/k
a_4=3

t_1=0
t_2=np.pi/(2*w)

x=np.arange(-10,40,0.5)
X=[[a_1,[],[]],[a_2,[],[]],[a_3,[],[]],[ac,[],[]],[a_4,[],[]]]
Z=[[[],[]],[[],[]],[[],[]],[[],[]],[[],[]]]

"""Profil de la houle pour diverses amplitudes et aux instants t=0 et
t=pi/(2w)"""
for i in x:
    A=np.sin(k*i-w*t_1)
    B=np.cos(k*i-w*t_1)
    C=np.sin(k*i-w*t_2)
    D=np.cos(k*i-w*t_2)
    for j in range(5):
        X[j][1].append(i-X[j][0]*A)
        Z[j][0].append(T*X[j][0]*B)
        X[j][2].append(i-X[j][0]*C)
        Z[j][1].append(T*X[j][0]*D)
```

```python
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(X[0][1],Z[0][0], 'g', label="a=0.5m")
plt.plot(X[1][1],Z[1][0], 'b', label="a=1m")
plt.plot(X[2][1],Z[2][0], 'c', label="a=1.5m")
plt.plot(X[3][1],Z[3][0], 'r', label="ac=1.79m")
plt.plot(X[4][1],Z[4][0], 'k', label="a=3m")
plt.xlim(-2.5,22.5)
plt.grid()
plt.ylabel("z")
plt.title("Surface libre à l'instant pour H=1m à l'instant t=0")
plt.legend()

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(X[0][2],Z[0][1], 'g', label="a=0.5m")
plt.plot(X[1][2],Z[1][1], 'b', label="a=1m")
plt.plot(X[2][2],Z[2][1], 'c', label="a=1.5m")
plt.plot(X[3][2],Z[3][1], 'r', label="ac=1.79m")
plt.plot(X[4][2],Z[4][1], 'k', label="a=3m")
plt.xlim(-2.5,22.5)
plt.grid()
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("z")
plt.title("Surface libre à l'instant pour H=1m à l'instant t=pi/(2w)")
plt.legend()

plt.show()
```