1

1-1) 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 분포의 확률표본의 관측값을 $X_1, \cdots, X_n$ 이라고 할 때,

$n \to \infty$ 일 때 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ or $\dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$ 에 수렴한다.

∴ 중심극한정리를 이용해 모집단의 분포는 알지 못하더라도 표본평균의 극한분포가 표준 정규분포로 수렴한다는 것을 알 수 있다.

1-2) CLT를 이용해 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \to N(0,1)$ as $n \to \infty$ 임을 구할 수 있으면,

$1-\alpha = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 를 이용해 모집단의 분포를 몰라도

표본평균과 표본표준편차를 이용해 μ에 대한 구간을 추정할 수 있어서 유용하다.

1-3)

i) $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \bar{X}^2\right) \xrightarrow{P} 1\cdot\left(E(X_i^2)-\mu^2\right) = \sigma^2$

$\therefore S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

ii) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\sigma}{S}\,\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

iii) $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 \Rightarrow \dfrac{S}{\sigma} \xrightarrow{P} 1$, $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{P} N(0,1)$

by slutcky's theorem, $\dfrac{S}{\sigma}\cdot\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

#2

2-1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

증명) $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(X_i-\bar{X}) + (\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right)^2 \qquad \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 \cancelto{0}{- 2\cdot\frac{(X_i-\bar{X})(\bar{X}-\mu)}{\sigma}} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

$$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \qquad \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2_1$$

$\downarrow$ 양변 mgf

$$E[e^{tV}] = E\left[\exp\{t(n-1)S^2/\sigma^2\} \cdot \exp\left\{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right\}\right] \quad , \quad S^2, \bar{X}\text{는 독립.}$$

$$= E[\exp\{t(n-1)S^2/\sigma^2\}] \cdot (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore E[\exp\{t(n-1)S^2/\sigma^2\}] = (1-2t)^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} = (1-2t)^{\frac{1-n}{2}} = (1-2t)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

2-2) $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

t분포 : $\dfrac{\text{표준정규분포}}{\sqrt{\dfrac{\text{카이제곱분포}}{\text{자유도}}}}$. 독립.

증명)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \rightarrow \text{분모·분자 } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{로 나누기}$$

$$= \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\cancel{\sqrt{n}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\sigma}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2} \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{n-1}}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}. \\ \bar{X},\ S\text{는 독립.} \end{cases}$$

∴ T는 자유도 n−1인 t분포를 따른다.

#3

3-1) $n_1 = 101$ μ_D : 측정에 응한 DSL 학회원들의 평균 키. 178.5 / 7.05

$n_2 = 101$ μ : 측정에 응한 DSL 학회원이 아닌 사람들의 평균 키. 179.9 / 7.05

(a) $H_0 : \mu_D = \mu$, $H_1 : \mu_D > \mu$

(b) $\alpha = 0.05$

$$t = \frac{(178.5 - 179.9) - 0}{\sqrt{\frac{2\cdot(7.05)^2}{101}}} = -1.411187132 \qquad \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{(7.05)^2}{101}$$

$$df = \frac{\left(\frac{2\cdot(7.05)^2}{101}\right)^2}{\frac{1}{100}\left(\frac{s_1^4}{n_1^2} + \frac{s_2^4}{n_2^2}\right)} = \frac{\frac{\cancel{4\cdot(7.05)^4}}{\cancel{101^2}}}{\frac{1}{100}\left(\frac{\cancel{4\cdot(7.05)^4}}{2\cdot\cancel{101^2}}\right)} = 200$$

신뢰구간 : $(178.5 - 179.9) \pm \underset{\overset{\shortparallel}{1.972}}{t_{200,\ 0.025}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot(7.05)^2}{101}} \Rightarrow (-3.356,\ 0.5563)$

검정통계량이 신뢰구간에 포함되므로 H_0 기각 X.

∴ 학회원들의 평균 키가 학회원이 아닌 사람보다 크다고 할 수 없다.