※1. (1) $\det(A) = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 1 \cdot (6-0) - 0 \cdot (0-0) + 1 \cdot (0-0)$

$= 6.$

3차원 공간에서 세 벡터로 이루어진 일종의 평행육면체이다.

이때, $\det(A)$의 절댓값은 평행육면체의 부피라고 할 수 있다.

(2) $(A-\lambda I)v = 0$ 이므로 $\det(A-\lambda I) = 0$ 이다.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

$\therefore \lambda = 1$ or $\lambda = 2$ or $\lambda = 3.$

$$(A-I)v_{(\lambda=1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} v_3 = 0 \\ v_2 + 3v_3 = 0 \\ 2v_3 = 0. \end{cases} \quad \therefore v_{(\lambda=1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(A-2I)v_{(\lambda=2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} -v_1 + v_3 = 0. \\ 3v_3 = 0. \\ 3v_3 = 0 \end{cases} \quad \therefore v_{(\lambda=2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-3I)v_{(\lambda=3)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} -2v_1 + v_3 = 0 \\ -v_2 + 3v_3 = 0 \\ 0 \end{cases} \quad \therefore v_{(\lambda=3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

eigenvalue는 eigenvector의 길이를 변하게 하는 배수라고 할 수 있고,

eigenvector는 선형 변환이 일어나더라도 방향이 변하지 않는 0이 아닌 벡터이다.

※2. $(B-\lambda I)v=0$ 이므로 $\det(B-\lambda I)=0$ 이다.

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)=0 \quad \therefore \lambda=0 \text{ or } \lambda=1$$

$$(B)V_{(\lambda=0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 3V_1+V_3=0 \end{cases} \quad \therefore V_{(\lambda=0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(B-I)V_{(\lambda=1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} -V_1=0 \\ -V_2=0 \\ 3V_1=0 \end{cases} \quad \therefore V_{(\lambda=1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(P)=4.$$

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore B = PDP^{-1}$

※3 $$P(\text{Spam}\,|\,\text{'당첨'}) = \frac{P(\text{Spam} \cap \text{'당첨'})}{P(\text{'당첨'})} = \frac{0.2\times0.5}{0.2\times0.5+0.8\times0.01} = \frac{100}{108} = \frac{25}{27}.$$

#4. (2) 확률변수 X가 'Hit' 또는 'out'이고, X가 확률분포 P를 따른다고 하자.

$$H(X) = \frac{9}{15}\cdot\log_2\frac{15}{9} + \frac{6}{15}\cdot\log_2\frac{15}{6}$$

$$= \frac{3}{5}(\log_2 5 - \log_2 3) + \frac{2}{5}(\log_2 5 - \log_2 3)$$

$$= \log_2 5 + \frac{1}{5}\log_2 3.$$

(3) 다른 팀 타자의 기록을 보면, $\frac{4}{15}$의 확률로 'Hit' $\frac{11}{15}$의 확률로 'out'이고

이러한 확률분포를 Q라고 하자.

P와 Q의 KL divergence를 계산할 수 있다.

$$KL(P\|Q) = \frac{9}{15}\log_2\frac{9}{4} + \frac{6}{15}\log_2\frac{6}{11}$$

$$= \frac{3}{5}(2\log_2 3 - 2) + \frac{2}{5}(1 + \log_2 3 - \log_2 11)$$

$$= \frac{8}{5}\log_2 3 - \frac{2}{5}\log_2 11 - \frac{4}{5}.$$

#5. loss function : $-f(w) = y\cdot\log(\hat{y}) + (1-y)\cdot\log(1-\hat{y}) \leftarrow \hat{y} = \frac{1}{1+e^{-z}}.$

since $z = w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n$,

we can say that $-f(w) = y\cdot\log\left(\frac{e^{wx}}{1+e^{wx}}\right) + (1-y)\cdot\log\left(\frac{e^{wx}}{1+e^{wx}}\right)$

$$= y\cdot\log e^{wx} - \log(1+e^{wx}) = xyw - \log(1+e^{wx})$$

so, $\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{1+e^{wx}}\cdot xe^{wx} - xy$. $\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = \frac{x^2e^{wx}}{(1+e^{wx})^2} \geq 0 \Rightarrow$ convex!