Q1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

⇒ determinant는 행렬 A로 형성되는 상자의 부피와 관련이 있다.

(2)

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow (\lambda-1) \times \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\{(\lambda-2)(\lambda-3) - 0\} = 0$$

$\therefore$ Eigenvalues of A : $\lambda = 1, 2, 3$

① $\lambda = 1$ 인 경우

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ -2z = 0 \end{matrix}$$

⇒ 대응하는 eigenvector는...

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② $\lambda = 2$ 인 경우

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x - z = 0 \\ -3z = 0 \\ -z = 0 \end{matrix}$$

⇒ 대응하는 eigenvector는...

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③ $\lambda = 3$ 인 경우

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x - z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{matrix}$$

⇒ 대응하는 eigenvector는...

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ 선형 변환을 하였을 때, 어떤 벡터 x의 방향은 바뀌지 않고, 크기만 λ배 만큼 변했을 때,

λ를 고유값이라 하고, x는 고유 벡터이다.

$\boxed{Q2}$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - B = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -3 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B) = 0 \rightarrow \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1) = 0 \qquad \therefore D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ Eigenvalues of B : $\lambda = 0, 1$

① $\lambda = 0$ 인 경우

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -3x - z = 0 \\ z = -3x \end{matrix} \Rightarrow$$

대응하는 eigenvector는...

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② $\lambda = 1$ 인 경우

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ -3x = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

대응하는 eigenvector는...

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{Q3}$ '당첨' 이라는 단어를 포함하는 메일이 스팸일 확률은...

$$P(\text{Spam} \mid \text{'당첨'}) = \frac{P(\text{Spam}, \text{'당첨'})}{P(\text{'당첨'})} = \frac{P(\text{'당첨'} \mid \text{Spam}) \times P(\text{Spam})}{P(\text{'당첨'} \mid \text{Spam}) \times P(\text{Spam}) + P(\text{'당첨'} \mid \text{Not Spam}) \times P(\text{Not Spam})}$$

$$= \frac{0.5 \times 0.2}{0.5 \times 0.2 + 0.01 \times 0.8} = \frac{0.1}{0.1 + 0.008} \approx 0.9259$$

$\therefore$ 약 92.6%

Q4

(2) $P(Hit) = \frac{9}{15}$ $P(Out) = \frac{6}{15}$

$$H(X) = \sum_i P_i \log_2\left(\frac{1}{P_i}\right) = \frac{9}{15}\log_2\left(\frac{15}{9}\right) + \frac{6}{15}\log_2\left(\frac{15}{6}\right)$$

$$= \frac{3}{5}(\log_2 5 - \log_2 3) + \frac{2}{5}(\log_2 5 - 1) \approx 0.971 \quad \therefore \text{약 } 0.971$$

(3) 다른 팀의 엔트로피를 계산해보면...

$P(Hit) = \frac{4}{15}$ $P(Out) = \frac{11}{15}$

$$H(X) = \sum_i P_i \log_2\left(\frac{1}{P_i}\right) = \frac{4}{15}\log_2\left(\frac{15}{4}\right) + \frac{11}{15}\log_2\left(\frac{15}{11}\right) \approx 0.837 \rightarrow \text{약 } 0.837$$

⇒ (3) 다른 팀의 엔트로피가 (2) 팀의 엔트로피보다 작으므로,

(3) 두번째 팀의 스윙결과는 한 쪽으로 더 치우친 반면,

(2) 첫번째 팀의 스윙결과는 비교적 고르게 분포함을 알 수 있다.

Q5 Convex Optimization of Logistic Regression

① Loss function of Logistic Regression : $\underbrace{\min_w \sum_{i=1}^{m} -y^{(i)} \log \frac{1}{1+e^{-w^T x^{(i)}}} - (1-y^{(i)}) \log \frac{e^{-w^T x^{(i)}}}{1+e^{-w^T x^{(i)}}}}_{J(w)}$

$-\log \frac{e^{-w^T x^{(i)}}}{1+e^{-w^T x^{(i)}}} = w^T x - \log \frac{1}{1+e^{-w^T x^{(i)}}}$ 이고, Hessian은 positive semi definite → convex!

⇒ $J(w)$가 convex 하다는 것은, $\nabla J(w) = 0$ 을 의미하고, $w = w^*$

② 로지스틱 회귀의 최적화는 주로 로그 손실 함수를 사용함! 로그 손실 함수는 다음과 같다.

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[y^{(i)}\log(h_\theta x^{(i)}) + (1-y^{(i)})\log(1-h_\theta(x^{(i)}))\right]$$

→ 비용함수 $J(\theta)$를 최소화하는 θ 값을 찾기 위해 경사 하강법을 사용하여 최적화를 진행한다.

다음의 경사하강법 식으로 모델 파라미터 조정! $\theta_j = \theta_j - \alpha \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j}$