# 1-1. 중심극한정리란?

모집단의 분포와 상관 없이 표본의 크기가 충분히 크다면, 표본평균들의 분포가 모집단의 모수를 기반으로 한 정규분포를 이룬다는 점을 이룬다.
중심극한정리는 독립적인 확률 변수들의 합이 정규분포에 가까워진다는 원리를 통해, 다양한 현상을 정규분포를 기반으로 모델링할 수 있는 기초를 제공한다.

## 1-2. 중심극한정리와 구간추정

구간 추정
- 모분산 O → 정규분포
- 모분산 X
  - $n \geq 30$ → 정규분포
  - $n < 30$ → t분포

모집단의 분포가 정규분포라는 가정이 없어도 중심극한 정리를 이용하면 표본평균의 분포가 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\therefore \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$

모집단의 분포, 표본평균 몰라도 중심극한정리로 가정해 구할 수 있다.

## 1-3.

slutsky's theorem : $X_n \xrightarrow{d} X$ and $Y_n \xrightarrow{p} c$

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} Xc$$

$$X_n / Y_n \xrightarrow{d} X/c \quad (\text{if } c \neq 0)$$

$S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

$\therefore \frac{S}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2-1.

표본분산을 모분산으로 나누고 n-1을 곱한 값은 카이제곱분포(n-1)을 따른다.

$Z^2 = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$

$V = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$

$= \sum \left(\frac{X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2$

$= \sum \left[ \left(\frac{X_i - X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2 \right]$

$= \sum \left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 + n\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\right)^2$

$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$

②에 의해 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 와 $\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$ 는 독립

양변에 mgf를 취하면

$(1-2t)^{-n/2} = E[\exp\{t(n-1)S^2/\sigma^2\}](1-2t)^{-1/2}$

= 자유도 n인 카이제곱분포의 mgf = ($\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$의 mgf) x ($Z^2$의 mgf)

$Z^2$ 적률생성함수는 자유도 1인 카이제곱함수의 mgf

$\therefore \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$의 mgf는 자유도 n-1 카이제곱분포의 mgf

2-2.

$T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 는 자유도 n-1인 t분포이다.

$$T = \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

① $\bar{X}$는 $N(\mu, \sigma^2)$를 따른다.

② $\bar{X}$와 $S^2$는 독립이다.

③ $(n-1)S^2/\sigma^2$는 $\chi^2(n-1)$분포를 따른다.

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$이고, $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 이므로

$T \sim t(n-1)$

3-1.

$H_0$: DSL 학회원의 키 > 비 DSL 학회원의 키

$H_1$: DSL 학회원의 키 ≤ 비 DSL 학회원의 키

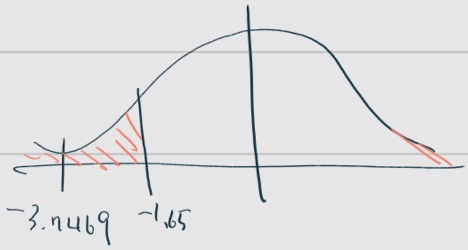
$t = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{S_p^2}{n_1} + \dfrac{S_p^2}{n_2}}}$, $df = 101 + 101 - 2 = 200$

$S_p^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$$s_p^2 = \frac{(101-1)\cdot 7.05 + (101-1)\cdot 7.05}{101+101-2} = \frac{\cancel{200}\times 7.05}{\cancel{200}}$$

$$t = \frac{178.5-179.9}{\sqrt{\frac{7.05}{101}\times 2}} = -3.7469\ldots$$

$$t_{\alpha=200,\,0.05} = 1.65$$




영가설 기각. DSL 학회원들이 평균키는 비 DSL 학회원들보다 크지 않다.