기수 : 13기 이름 : 이진우

25-2 DSL 정규 세션

Mathematics for ML 과제

☑	본 과제는 학회 정규 세션「Mathematics for Machine Learning」의 내용을 다루며, 개념의 적용과 실제 활용 사례에 대한 이해를 돕기 위해 기획되었습니다. 해당 과제는 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트(💡)를 적극 활용하시고 학회원 간 토론 및 Slack 질의응답을 적극 활용하여 해결해주십시오. 단, 답안 표절이나 LLM 의 남용은 금지합니다.
☑	각 문제에서 요구하는 방법에 맞게 해결하며, 서술형 문제들은 따로 작성하시어 .pdf 파일로 답안을 작성하여 제출해 주십시오.
☑	7/30 (수) 23 시 59 분까지 Github 에 .pdf 파일을 제출해 주십시오. Github 에 제출하는 방법을 모른다면 학술부 (강승우, 조지성, 한연주)로 문의 주시기 바랍니다.

문제 1 Entropy and Mutual Information

다음은 어느 드라마의 한 장면 중 일부입니다.

"…지는 분은 물론 벌칙이 있습니다. 아마 영화에서 보신 적이 있으실 겁니다, 러시안룰렛이라고. 이 권총에 총알 하나를 넣고 닫습니다. 그리고 지는 분 쪽으로 방아쇠를 당길 겁니다. 죽을 확률이 1/6, 살 확률은 5/6. 생각보다 나쁘지 않죠? *(중략)* …조금 지루한 감이 없지 않아 있네요. 그럼 이제 확률을 뒤집어 볼까요? 권총에 총알 다섯 개를 넣고 닫습니다. 확률은 1/6, 죽을 확률은 5/6. 자, 다시 시작하겠습니다."

그러나 사실은 두 상황 모두 엔트로피의 측면에서의 지루함, 즉 불확실성은 같습니다! 총알이 발사될 확률이 각각 1/6, 5/6 인 베르누이 분포를 따르기 때문에, 엔트로피의 정의를 따라 계산하면 같은 값이 나오는 것이죠.

이 문제에서는 이처럼 주어진 사건들이 이산적인 경우 엔트로피의 성질을 알아보고, 직접 계산해보며 엔트로피와 Mutual Information 이 가진 의미를 알아보고자 합니다.

1-1 ✍️: 주사위를 던졌을 때 나오는 눈의 사건을 X 라 하고, 각 눈이 나올 확률을 p_i $(0 \le p_i \le 1,$ $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1)$ 이라 할 때, 아래의 조건에서 주사위의 엔트로피 $H(X)$를 각각 구하세요. $H(X)$는 언제 최대가 되는지 간단한 이유 (내지는 직관)와 함께 서술하세요.

> 💡 엔트로피의 정의: $H(X) = \sum_{x \in X} p(x) \log_2\{1/p(x)\} = \sum_{x \in X} -p(x) \log_2\{p(x)\}$

Max

1) 공정한 주사위 (모든 $p_i = 1/6$) $H = -6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6$

2) 모든 눈이 6 인 주사위 $P_6 = 1$, $H = -(1)\log_2 1 = 0$

3) 짝수 눈이 나올 확률이 홀수 눈이 나올 확률의 2 배인 주사위(짝수 각각 및 홀수 각각의 확률은 동일) P_1, P_2

$P_1 = 2P_2$, $3P_2 + 3P_1 = 1$

$\rightarrow P_1 = \frac{1}{9}, P_2 = \frac{2}{9}$

$H = \log_2 9$

4) 1 이 나올 확률이 0.5, 나머지 눈이 나올 확률이 각각 0.1 인 주사위

$P(x=1) = 0.5$, $0.5 + 0.5\log_2 10$

1-2 ✍️: 임의의 이산확률변수 X 에 대하여 X 가 가질 수 있는 값의 집합을 $\mathcal{X}$라 합시다. 예를 들어, 동전을 1 회 던졌을 때의 $\mathcal{X} = \{Head, Tail\}$ 로 $|\mathcal{X}| = 2$입니다. 이때 엔트로피 $H(X)$가 가질 수 있는 값의 범위가 $0 \leq H(X) \leq \log_2 |\mathcal{X}|$임을 증명하세요.

> 💡 좌측 부등식의 경우, 확률 값의 성질을 활용해 증명 가능합니다.
> 💡 우측 부등식의 경우, 아래의 Jensen's Inequality 를 활용해 증명 가능합니다.
> - Jensen's Inequality: $\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X])$ for a convex f, and $\mathbb{E}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}[X])$ for a concave f
> (Bonus Question: Jensen's Inequality 는 어떻게 증명할까요? Hint: 수학적 귀납법으로 n=2 부터...!)

* 동일할때 최대

1-3 ✍️: 어떤 지역 주민들의 흡연 여부 (X)와 폐암 발병 여부 (X)에 대한 설문 조사를 실시하여 다음과 같은 결합 확률 분포를 얻었다고 가정합니다. 여기서 X = 1 은 폐암 발병, X = 0 은 폐암 미발명을 의미하며, Y = 1 은 흡연, Y = 0 은 비흡연을 의미합니다. 아래 질문에 답해주세요.

P(X,Y)	Y = 0 (비흡연)	Y = 1 (흡연)
X = 0 (폐암 미발병)	0.45	0.15
X = 1 (폐암 발병)	0.1	0.3

1) 폐암 발병 여부 X 와 흡연 여부 Y 의 엔트로피 H(X), H(Y)를 계산하시오.

$H(Y) = -(0.6 \log_2 0.6 + 0.4 \log_2 0.4)$, $H(X) = -(0.55 \log_2 0.55 + 0.45 \log_2 0.45)$

2) X 와 Y 의 결합 엔트로피 H(X, Y)를 계산하시오.

$H(X,Y) = -\sum_{x,y} P(x,y) \log_2 P(x,y) = 1.78$ bits

3) 흡연 여부 Y 에 대한 정보가 주어졌을 때, 폐암 발병 여부 X 의 조건부 엔트로피 H(X | Y)를 계산하시오.

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 0.79$ bits

4) 폐암 발병 여부 X 와 흡연 여부 Y 의 Mutual Information I(X ; Y)을 계산하시오.

$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0.18$ bits

5) 4)의 결과로 나온 I(X ; Y)의 의미를 통계적 관점에서 간략하게 해석하고,
I(X ; Y)값이 0 일 경우와, H(X)와 같을 경우 각각 어떤 의미를 갖는지 설명하시오.

> 💡 엔트로피 계산 시 log 의 밑은 2 로 계산하면 됩니다.
> 💡 단위는 비트(bits)를 이용하며, log 계산 값은 근사치로만 이용하시면 됩니다.

독립

X가 Y로 완전히 결정

$$H(x) = -\sum_{x\in X} p(x)\log_2(p(x))$$

i) 좌측 부등식

$$0 \le -\sum_{x\in X} p(x)\log_2(p(x))$$

$0 \le p(x) \le 1$ 이므로, $\log_2(p(x)) < 0$,

$p=1$ 일때, $p(x)\cdot\log_2(p(x)) = 0$ 이므로 등호도 성립

$\therefore\ 0 \le H(x)$

ii) 우측 부등식

$$-p\log_2 p = -p\cdot\frac{\ln p}{\ln 2} \quad \frac{d}{dp}\left(-p\cdot\frac{\ln p}{\ln 2}\right) = -\left(\frac{\ln p}{\ln 2} + \cancel{p}\cdot\frac{1}{\cancel{p}\ln 2}\right) = -\left(\frac{\ln p+1}{\ln 2}\right)$$

$\frac{d^2}{dp^2}\left(-p\cdot\frac{\ln p}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{p\ln 2}$. $-\frac{1}{p\ln 2}$ 은 $[0,1]$ 에서 음수이므로, concave

$\therefore E[f(X)] \le f(E[X])$

이므로 $H(X)$ 에서

$$H(X) = E(-\log_2 p(x)) = -\sum_{x\in X} p(x)\log_2 p(x)$$

$$\therefore E(-\log_2 p(x)) \le -\log_2 E(p(x))$$

$$H(X) \le -\log_2 E(p(x))$$

이므로 균등분포에서 최댓값 $\left(p = \frac{1}{|X|}\right)$

$$H(X)_{max} = -\sum_{x\in X}\frac{1}{|X|}\cdot\log_2\left(\frac{1}{|X|}\right) = -|X|\cdot\frac{1}{|X|}\cdot\log_2\left(\frac{1}{|X|}\right)$$

$$= \log_2|X|$$

$\therefore$ 우측부등식 $\rightarrow H(X) \le \log_2|X|$

$$\therefore\ 0 \le H(X) \le \log_2|X|$$

① Jenson's Inequality

귀납법 사용시 일반적인 경우

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

i) $n=2$ 일때

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \ \ldots\ ①$$

가중치들의 합이 1이므로,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \ \ldots\ ②$$

①,②를 정리하면

$$f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1)f(x_2) \ ③$$

③은 Convex의 정의와 같다

$$(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$$

$\therefore\ n=2$일때 성립

ii) $n=k$일때 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$

성립 가정.

$n=k+1$ 일때 =

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1}$$

$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1$ 로 가중치 재설정

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}f(x_i) \ge f\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i\right)$$

양변에 $(1-\lambda_{k+1})$을 곱한 후, $\lambda_{k+1}f(x_{k+1})$을 더한다

$$\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i) \ge (1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i\right) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1})$$

Convex 정의에 의해

$$(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i\right) + \lambda_{k+1}x_{k+1}) \ge$$

$$f\left(\underbrace{(1-\lambda_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}x_i\right) + \lambda_{k+1}x_{k+1}}\right)$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i + \lambda_{k+1}x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i$$

$\therefore \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i) \ge f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\right)$ $\therefore$ $n=k+1$일때도 성립

문제 2	SVD and Data Compression

선형대수학은 머신러닝과 딥러닝의 원리를 수학적으로 분석하는 과정에서 사용되는 핵심적인 내용 중 하나로, 그 중에서도 가장 중요한 개념은 바로 SVD (Singular Value Decomposition, 특이값 분해) 입니다. SVD 를 이해하기 위해 우선 고유값과 고유벡터를 활용한 대각화 (Diagonalization)에 대해 알아보겠습니다.

2-1 ✍️: 대각화 (Diagonalization)의 정의와 계산 과정은 다음과 같습니다.

💡 정의: 임의의 정방행렬 A 를 고유값과 고유벡터를 통해 대각행렬의 형태로 선형 변환하는 과정이며, 이를 수식으로 표현하면 $D = P^{-1}AP$를 만족하는 대각행렬 D 를 찾는 것입니다. 만약 A 가 n 개의 독립인 고유벡터를 가지고 있다면 (= 가역이라면) A 는 대각화 가능하며, 이때 대각행렬의 원소는 A 의 고유값으로 구성됩니다.

💡 과정:

1) A 에 대한 고유값과 이에 대응하는 고유벡터를 찾은 후 각각 $p_1, p_2, \dots, p_n$으로 놓습니다.
2) 고유벡터로 구성된 행렬 $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$을 만들고 $D = P^{-1}AP$을 구합니다.

다음 정방행렬을 대각화했을 때 나오는 대각행렬 D 와 고유벡터 행렬 P 를 각각 구하세요.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$

$= -\lambda \cdot [(2-\lambda)\cdot(-3-\lambda) - (1\cdot 0)] - 2\cdot[(1\cdot 0) - (2-\lambda)]$

$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 2(\lambda - 2)$

$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4$

$= (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)$

$\lambda = -2, -1, 2$

$\therefore D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

i) $\lambda = 2 \rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

ii) $\lambda = -1 \rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

iii) $\lambda = -2 \rightarrow A - \lambda I \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2-3 ✍️: 특이값 분해 (SVD, Singular Value Decomposition)은 대각화와 달리 모든 크기의 행렬에 대해 적용이 가능하며, 그 계산 과정은 다음과 같습니다.

> 💡 1) 항상 대칭 행렬을 이루는 두 행렬 B^TB, BB^T를 계산하고, 이들의 고유값을 계산해 특이값 σ와 고유벡터를 통해 직교대각화하여 $B^TB = VDV^T, BB^T = UDU^T$를 구합니다.
> 2) 0 이 아닌 특이값들을 내림차순으로 나열하여 Σ를 구성하고, 이들을 모두 활용해 $A = U\Sigma V^T$를 구합니다.
>
> 계산 방법에 대한 구체적인 과정은 다음의 영상 자료 (링크)를 반드시 참고하여 문제를 풀어주세요.

다음 행렬에 특이값 분해를 적용하였을 때 나오는 행렬 U, Σ, V^T를 각각 구하세요.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B^TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(B^TB - \lambda I) = 0$

$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = 0$

$\lambda = 3, 1$

i) $\lambda = 3$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$, $x_1 = x_2$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\lambda = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_1 = -x_2$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = 1$

$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$

i) $\lambda_1 = 3$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x = 0$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ii) $\lambda_2 = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

iii) $\lambda_3 = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0$ $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

문제 3	Optimization Theory

최적화는 다양한 분야에서 많이 쓰이는 개념이지만, 특히 머신러닝에서는 최적의 정답을 찾기 위해 필수적으로 사용되는 개념입니다. 정규세션으로 이를 간단하게 배워보았고, 직접 수식으로 문제를 풀어보며 해당 개념을 익히고자 합니다.

3-1 ✍️: 정규세션에서 살펴본 것과 같이, Logistic Regression 의 목적함수는 아래와 같습니다.

$$\min_{w} \sum_{i=1}^{m} \{-y^{(i)} \log(\hat{y}^{(i)}) - (1 - y^{(i)}) \log(1 - \hat{y}^{(i)})\}$$

최적해를 구하기 위해서는 먼저 내부의 목적 함수가 convex function 인지 여부를 판단해야 합니다. 내부 목적 함수 $-y^{(i)} \log(\hat{y}^{(i)}) - (1 - y^{(i)}) \log(1 - \hat{y}^{(i)})$가 convex function 임을 보이세요.

- 💡 $y^{(i)}$ 을 Logistic Function 식을 활용하면 $\hat{y}^{(i)} = \frac{1}{1+e^{-w^T x^{(i)}}}$과 같이 표현할 수 있습니다.
- 💡 목적 함수를 두 부분으로 나누어서 각각 Convex 하다는 것을 증명하면 됩니다.
- 💡 convexity 를 증명하기 위해서는 w 에 대해 2 번 미분하여, 0 보다 크다는 것을 보이면 됩니다.

$z = w^T x$, $\hat{y} = \sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ $\quad \ell(z;y) = -[y \log \hat{y} + (1-y) \log(1-\hat{y})]$

ℓ은 미분 (이차미분) → Convex.

$\ell(z;y) = y\ell(z;1) + (1-y)\ell(z;0)$ 는 convex , $\ell(w^T x; y)$ convex

3-2 ✍️: Minimization 에 대한 Gradient Descent Algorithm 은 아래와 같습니다.

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$$x_{t+1} = x_t - \gamma \nabla_x f(x_t)$$

$\nabla_x f(x_t)$: $f(x_t)$ 에 대해서 x_t 지점에서 미분한 값

다음과 같은 Loss function 과 시작점에서 t = 2 일 때 나오는 값, 즉 x_2의 값을 구하세요.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x \quad \to f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 1$$

$$x_0 = 1, \qquad \gamma = 0.2 \qquad x_{t+1} = x_t - \gamma \nabla_x f(x_t)$$

Step 1 : $f'(x_0) = 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 1 = -7$, $x_1 = 2.4$

Step 2 : $f'(2.4) = 4(2.4)^2 - 6(2.4)^2 - 6(2.4) + 1 = 17.34$, $x_2 = 0.43$

3-3 ✍️: 라그랑주 승수법은 아래와 같습니다.

💡 라그랑주 승수(Lagrange Multiplier)는 제약 조건이 있는 최적화 문제를 제약 조건이 없는 문제로 변환하여 최적해를 찾기 위한 보조 변수를 말합니다. 제약 조건이 없을 때는 단순히 ▽f(x)=0 으로 최적점을 찾을 수 있지만, 제약조건 g(x)가 있을 때는 최적해는 제약을 만족하면서 f(x)를 최소화하는 지점이 되어야 합니다. 이를 위해 제약 조건과 목적함수를 결합한 새로운 함수 (lagrangian)을 만들고, 그 stationary point 를 찾아서 목적함수 최적화와 제약 만족을 동시에 달성할 수 있습니다.

제약 조건이 있는 최적화 문제:

$$\min_x f(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

→ 이를 다음과 같은 **Lagrangian 함수**로 바꿉니다:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

25-2 Mathematics for ML #2 세션 자료 中

사진의 λ가 라그랑주 승수입니다. 제약조건을 penalty 처럼 반영하여 이를 만족시키는 해를 찾아낼 수 있습니다.

다음 조건을 만족하는 $f(x, y)$의 최솟값을 라그랑주 승수법을 이용해 구하세요.

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad s.t. \quad x + y \geq 2$$

1) 주어진 목적 함수와 제약 조건을 이용하여 lagrangian $L(x, y, \lambda)$을 설정하세요.

$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2 - \lambda(x+y-2) \quad (\lambda \geq 0)$

2) $L(x, y, \lambda)$을 각 변수에 대해 편미분하고, 그 값이 0 이 되는 stationary point 조건을 제시하세요.

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 \qquad x = \lambda/2, \quad y = \lambda/2$

3) 위에서 얻은 조건들을 만족하는 x, y, λ 의 값을 계산하세요.

$x+y-2 \geq 0,$ $\lambda \geq 0, \quad \lambda(x+y-2) = 0, \qquad \lambda(\lambda-2) = 0, \quad \lambda \in (0, 2) \qquad \lambda = 2, \quad x = 1, \quad y = 1$

4) 구한 $f(x, y)$값을 목적함수 $f(x, y)$에 대입하여 최솟값을 계산하세요.

$f(1,1) = 1^2+1^2 = 2$

Reference
- 24-1 기초과제 2 (10 기 신재우)
- 24-2 기초과제 (11 기 김현진, 김정우)
- 25-1 Mathematics for ML 과제 (12 기 김민규)
- Information Theory for Data Science, Prof. Son, Fall 2024, Yonsei Univ.

Data Science Lab

담당자: 13 기 조지성
xiwang01@yonsei.ac.kr