기수 : 14 **이름 :** 신동준

25-2 DSL 정규 세션

기초과제

- ☑ 본 과제는「통계학입문」,「통계방법론」및「수리통계학(1)」일부 내용을 다루며, NumPy 와 Pandas 의 활용 연습을 돕기 위해 기획되었습니다. 평가를 위한 것이 아니므로, 주어진 힌트(👐)를 적극 활용하시고 학회원 간 토론, Slack 의 질의응답을 활용하시어 해결해주십시오. 단, 답안 표절은 금지합니다.
- ☑ 서술형 문제는 ✎ , 코딩 문제는 © 으로 표기가 되어 있습니다. 각 문제에서 요구하는 방법에 맞게 해결하며, 서술형 문제들은 따로 작성하시어 pdf 로 제출해주시고 코드 문제들은 ipynb 파일에 답안을 작성하시어 제출해주십시오.
- ☑ **7/20 (일) 23 시 59 분까지** Github 에 PDF 파일과 ipynb 파일을 zip 파일로 압축하여 제출해주십시오. Github 에 제출하는 방법을 모르다면 학술부장 혹은 과제 질의응답을 위한 오픈채팅방을 활용해주십시오.

문제 1 (Weak) Law of Large Numbers

큰 수의 법칙은 표본 평균의 수렴성을 보장하는 법칙으로, 중심극한정리(CLT)와 더불어 통계학에서 중요한 법칙입니다. 예를 들어, 큰 수의 법칙은 몬테카를로(Monte Carlo) 방법론의 이론적 기반을 제공합니다. 이 문제에서는 큰 수의 약한 법칙의 정의를 확인하고, 이를 코드를 통해 확인해 보겠습니다.

1-1 ✎ : 큰 수의 약한 법칙(Weak Law of Large Numbers)의 정의를 서술하시고 증명하시오.

👐 Hogg(8 판) 5 장 1 절

정의

$\{X_n\}$이 평균 μ와 공통분산 σ^2을 가진, iid인 확률변수들의 열이고 $\sigma^2<\infty$, $\bar{X}_n=\frac{\sum X_i}{n}$이면, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$이다.

즉, $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n-\mu|\geq\varepsilon)=0$ 이다.

증명

using 체비셰프 부등식 $\left(P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}\right)$

$P(|\bar{X}_n-\mu|\geq k)=P\left(|\bar{X}_n-\mu|\geq k\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\leq\frac{\sigma^2}{nk^2}=0$ as $n\to\infty$

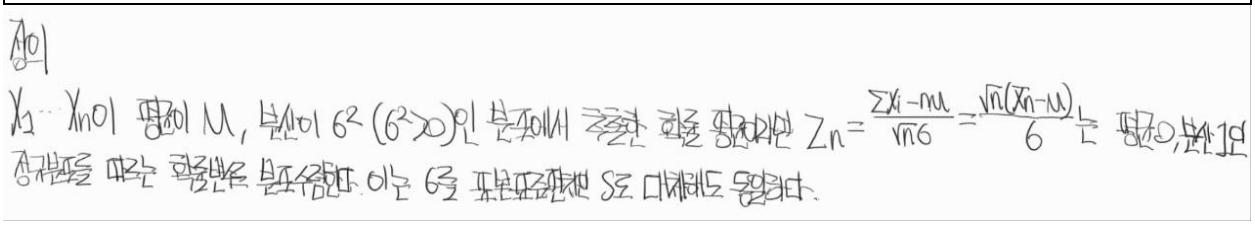
$\therefore \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

문제 2 Central Limit Theorem

중심극한정리는 확률변수의 합 형태 (Sum of Random Variables)의 극한분포를 손쉽게 구할 수 있도록 해 주기에 통계학에서 가장 자주 사용하는 정리입니다. 이 문제에서는 중심극한정리의 정의와 그 활용에 대해 짚어보겠습니다.

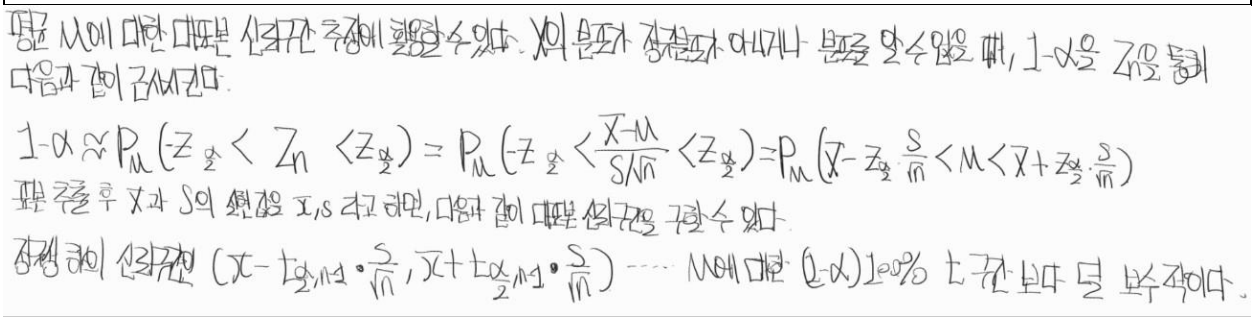
2-1 ✎ : 중심극한정리(Central Limit Theorem)의 정의를 서술하시오.

- 통계학입문 (3 판) 7 장 참고
- Hogg(8 판) 4 장 2 절, 5 장 3 절 참고



2-2 ✎ : 중심극한정리가 통계적 추론 중 "구간추정"에서 어떻게 활용되는지 서술하시오.

- Hogg(8 판) 4 장 2 절



문제 3 모분산에 관한 추론

카이제곱 분포는 모집단의 모분산 추정에 유용하게 쓰이며, 정규분포에서의 랜덤표본에서 표본분산과 관계되는 분포입니다. 표준정규분포를 따르는 서로 독립인 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3,…, Z_k 가 있을 때, $V = Z_1, + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_k \Rightarrow V \sim$ 자유도가 k 인 X^2 분포를 따른다고 할 수 있습니다. 대개 모분산에 관한 추론에 사용되며, 검정통계량으로 $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2\,(n-1)$ 가 쓰입니다.

3-1 ✎ : 플라스틱 판을 제조하는 공장이 있다. 판 두께의 표준편차가 1.5mm 를 넘으면 공정 상에 이상이 있는 것으로 간주합니다. 오늘 아침 10 개의 판을 무작위 추출하여 두께를 측정한 결과가 다음과 같았습니다.

$$\{226,\ 228,\ 226,\ 225,\ 232,\ 225\ \ 227,\ 229,\ 228,,\ 230\}$$

해당 판 두께의 분포가 정규분포를 따른다고 할 때, 공정에 이상이 있는지를 검정하세요.

a) ✎ 귀무가설과 대립가설을 설정하시오.

a) $H_0: \sigma^2 = 2.25$ vs $H_1: \sigma^2 > 2.25$ (우측 단측 검정)

b) ✎ 유의수준 5%에서의 가설검정을 수행하고 판 두께의 분산에 대한 90% 신뢰구간을 구하시오.

✋ 어떤 검정통계량이 어떤 분포를 따르는지, 언제 귀무가설을 기각하는지 정해야 합니다.

b) $\bar{x} = 227.6$ $s^2 = 4.4889$

$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{9 \times 4.4889}{2.25} \approx 17.98$ ∨ $\chi^2_{0.05}(9) \approx 16.92$, χ^2가 16.92보다 크면 귀무가설 기각,

17.98 > 16.92이므로, 귀무가설 기각, 공정에 이상이 있음 (유의수준 0.05일 때에)

90% 신뢰구간 $\Leftrightarrow \alpha = 0.1$

$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \right) = \left(\frac{9 \cdot 4.4889}{\chi^2_{0.95}}, \frac{9 \cdot 4.4889}{\chi^2_{0.05}} \right) \approx (2.39, 12.13)$

문제 4 통계적 방법론

t 검정은 모집단이 정규분포를 따르지만 모표준편차를 모를 때, 모평균에 대한 가설검정 방법입니다. 대개 두 집단의 모평균이 서로 차이가 있는지 파악하고자 할 때 사용하며, 표본평균의 차이와 표준편차의 비율을 확인하여 통계적 결론을 도출합니다. ANOVA Test 의 경우 집단이 2 개보다 많은 경우 모평균에 차이가 있는지 파악하고자 할 때 사용되며, 이것은 코드로만 살펴보겠습니다.

4-1 ✎ **:** 어떤 학우가 DSL 학회원(동문 포함)의 평균 키가 DSL 학회원이 아닌 사람의 평균 키보다 크다고 주장하여, 실제로 그러한지 통계적 검정을 수행하려고 합니다. 며칠간 표본을 수집한 결과 다음과 같은 값을 얻었습니다.

표본 수: 총 250 명, 각 125 명
측정에 응한 DSL 학회원들의 평균 키 : 173.5cm / 표준편차 : 7.05cm
측정에 응한, DSL 학회원이 아닌 사람들의 평균 키 : 171.4cm / 표준편차 : 7.05cm

a) ✎ 귀무가설과 대립가설을 설정하시오.

a) $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 > \mu_2$

b) ✎ 유의수준 5%에서의 가설검정을 수행하고 결론을 도출하시오. (단, 키는 정규분포를 따르며 각 집단의 분산은 같다고 가정한다.)

✋ 통계학입문(3 판) 7 장 참고
✋ 어떤 검정통계량이 어떤 분포를 따르는지, 언제 귀무가설을 기각하는지 정해야 합니다.

b) $\bar{x}_1 = 177.5$, $\bar{x}_2 = 177.4$, $S = S_1 = S_2 = 7.05$, $n_1 = n_2 = 125$

$Z = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}} = (177.5 - 177.4) / \sqrt{\frac{7.05^2}{125} + \frac{7.05^2}{125}} \approx 2.854$ $Z_{0.05} = 1.645$

$Z = 2.354 > 1.645 = Z_{0.05}$ 이므로, 귀무가설 기각;

DSL 학생의 평균키가 아닌 사람의 키보다 큼 (유의수준 0.05 하에서)

4-2 © : 한 학우가 이번에는 각 학회의 평균 키가 똑같다는 주장을 하였습니다. 해당 학우가 제공한 ESC 학회의 학회원별 키 데이터를 활용해 가설검정을 진행하고자 합니다. 데이터는 heights.csv 파일에 저장되어 있습니다.

a) ✎ 귀무가설과 대립가설을 설정하시오.

a) $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$