1-1

<Weak Law of Large Numbers>

Let $\{X_n\}$ be a sequence of iid random variables having common mean μ and variance $\sigma^2 < \infty$

Let $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ Then $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

proof) $E(\bar{X}_n) = \mu \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

By Chebyshev's Theorem, $P[|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon] = P[|\bar{X}_n - \mu| \geq \frac{\epsilon\sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{P} 0.$ as $n \to \infty$

2-1

<Central Limit Theorem>

Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ denote the observation of a random sample from a distribution that has mean μ and variance $\sigma^2 > 0$.

Then the random variable $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1)$

2-2

표본이 정규분포를 따른다고 가정할 때, 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad s = \text{표준편차}$$

이때 X의 모집단 분포가 정규 분포가 아니더라도 n이 충분히 크면
$\bar{X}$는 CLT를 통해 정규분포로 근사되어 신뢰구간을 계산할 수 있게 된다.

3-1

a) $H_0: \sigma = 1.5 \qquad H_a: \sigma > 1.5$

b) $n = 10, \quad s^2 \approx 5.156$

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 이기 때문에 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \chi^2_{\alpha, n-1}$ 일 때 H_0을 기각할 수 있다.

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \approx 20.604 > \chi^2_{0.05, 9} \approx 16.919$ 따라서 귀무가설을 기각한다.

$$90\%\ CI : \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.95, 9}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.05, 9}} \right) = \left(\frac{9 \cdot 5.156}{16.919}, \frac{9 \cdot 5.156}{3.325} \right)$$

$$= (2.74, 13.93)$$

4-1

a) μ_D = DSL의 평균 키, μ_E = ELSE의 평균 키라고 하자.

$$H_0 : \mu_D = \mu_E \quad vs. \quad H_\alpha : \mu_D > \mu_E$$

$$H_0 : \mu_D - \mu_E = 0 \quad vs \quad H_\alpha : \mu_D - \mu_E > 0$$

b) t-statistics $t^* = \dfrac{(\bar{X}_D - \bar{X}_E) - (\mu_D - \mu_E)}{\sqrt{\dfrac{(n_D - 1)S_D^2 + (n_E - 1)S_E^2}{n_D + n_E - 2}\left(\dfrac{1}{n_D} + \dfrac{1}{n_E}\right)}} \sim t_{n_D + n_E - 2}$

$t^* > t_{0.05,\, n_D + n_E - 2}$ 이면 귀무가설을 기각할 수 있다.

$$t^* = \frac{(173.5 - 171.4)}{\sqrt{\frac{124 \cdot 7.205^2 + 124 \cdot 7.205^2}{248}\left(\frac{2}{125}\right)}} = 2.35 > t_{0.05,248} = 1.651$$ 따라서 귀무가설을 기각한다.

따라서 DSL 회원들의 평균 키가 DSL 회원이 아닌 학생의 평균 키보다 크다고 할 수 있다.

4-2

$H_0 : \mu_{DSL} = \mu_{ELSE} = \mu_{ESC}$ vs H_α : at least two of them are different