1-1

정의) $\{X_n\}$은 평균 μ와 분산 $\sigma^2 < \infty$을 가지는 iid 확률 변수 수열이라고 할 때

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 라 하면 $\forall \epsilon > 0$에 대해 $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$ 이다.

증명) $E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{\mu} = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu = \mu$

$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{Var(X_n)}_{\sigma^2} = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Chebyshev's Inequality : $\forall \epsilon > 0$, $P(|X-\mu| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$

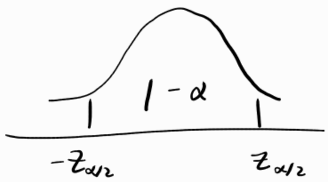
이 이론에 의하여 $P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$

2-1) $X_1, X_2, \cdots X_n$을 평균 μ와 분산 σ^2을 갖는 분포의 random sample 이라고 할 때 확률 변수 $W_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 의 분포는 $n\to\infty$ 일때 $N(0,1)$로 수렴한다.

2-2) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 의 분포가 $N(0,1)$에 근사하므로 (CLT)

$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$



$\rightarrow P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$ 이고

이를 통해 μ에 대한 신뢰구간을 구할 수 있다.

3-1)

a) 귀무가설 $H_0 : \sigma \leq 1.5$

대립가설 $H_1 : \sigma > 1.5$

b) 판 두께의 분포가 정규분포를 따르므로

검정통계량 $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 은 자유도가 $n-1$인 카이제곱 분포를 따른다.

$n = 10$

$\bar{X} = \frac{2276}{10} = 227.6$

$s^2 = \frac{1}{9} \sum (x - 227.6)^2 = 5.16$

$\chi^2 = \frac{9 \times 5.16}{1.5^2} = 20.64$

기각역 R : $\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(9) = 16.92$ (χ^2이 기각역에 포함)

$\therefore$ σ 가 1.5 보다 크다고 할 수 있으므로

공정에 이상이 있다.

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\sqrt{\frac{9 \times 5.16}{\underbrace{\chi^2_{0.05}(9)}_{16.92}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{9 \times 5.16}{\underbrace{\chi^2_{0.95}(9)}_{3.33}}} \right) = 0.9$$

σ에 대한 90% 신뢰구간

$= (1.66, 3.73)$

4-1)

μ_1 : DSL 평균키 μ_2 : DSL X 평균키

a) 귀무가설 H_0 : $\mu_1 \leq \mu_2$

대립가설 H_1 : $\mu_1 > \mu_2$

b) 키가 정규분포를 따르고 두 집단의 분산이 같으므로

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$ 는 자유도 n_1+n_2-2인 t분포를 따른다

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = 7.05 \quad (\because S_1 = S_2 = 7.05)$$

$$t = \frac{173.5 - 171.4}{7.05\sqrt{\frac{1}{125}+\frac{1}{125}}} = 2.35$$

기각역 R : $t \geq t_{0.05}(248)$ (기각역에 포함)

1.65

$\therefore$ DSL 학회원의 평균키가 학회원이 아닌 사람의 평균 키보다 크다고 할 수 있다.

4-2)

a) 귀무가설 H_0 : $\mu_1 = \mu_3$

대립가설 H_1 : $\mu_1 \neq \mu_3$