#1-1

X_n을 공통평균 μ, 공통 분산 σ^2을 가진 iid 확률변수의 열이라고 하고,

$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ 이면 $X_n \xrightarrow{P} \mu$

proof) CLT에 의해 $\overline{X_n}$의 평균은 μ, 분산은 $\frac{\sigma^2}{n}$

Chebyshev's inequality에 의해

$P(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) = P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$

#2-1

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 평균 μ, 분산 $\sigma^2(\sigma^2 > 0)$에서 추출한 확률표본이면

$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$는 평균 0, 분산 1인 정규분포를 따르는 확률변수로 분포수렴한다.

σ를 S로 대체해도 동일.

#2-2

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 평균 μ, 분산 σ^2인 확률변수 X에 대한 확률표본이라 하자. (정규분포 X)

CLT에 의해 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}$의 분포는 근사적으로 $N(0,1)$

$\therefore 1-\alpha \approx P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$1-\alpha \approx P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$\therefore (1-\alpha)100\%$ 신뢰구간은 $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$

#3-1

a) $H_0 : \sigma \leq 1.5$ vs $H_1 : \sigma > 1.5$

b) ① 가설검정 수행

$n = 10$, $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \approx 5.16$

S^2은 카이제곱 분포를 따르므로 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9 \cdot 5.16}{(1.5)^2} \geq \chi^2_{0.05,9}$ 이면 H_0 기각

$\chi^2 = 20.64 > \chi^2_{0.05,9} = 16.92$ $\therefore H_0$ 기각

② 90% 신뢰구간

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ 이므로}$$

$$0.9 = P\left(\chi^2_{0.95,9} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0.05,9}\right)$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.05,9}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.95,9}}\right)$$

∴ 90% 신뢰구간 : $\left(\frac{9\times 5.16}{16.92}, \frac{9\times 5.16}{3.33}\right) = (2.74, 13.95)$

#4-1

DGL의 평균 키 = μ_1, not DGL의 평균키 = μ_2라 하자.

a) $H_0: \mu_1-\mu_2 \le 0$ vs $H_1: \mu_1-\mu_2 > 0$

b) 검정통계량 $t = \dfrac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$

$t > t_{0.05,\, n_1+n_2-2}$ 이면 H_0 기각

$$t = \frac{(173.5-171.4)-0}{\sqrt{\dfrac{124\times 7.05^2+124\times 7.05^2}{248}\left(\dfrac{1}{125}+\dfrac{1}{125}\right)}} = 2.35 > t_{0.05,\,248} = 1.651 \text{ 이므로 } H_0 \text{ 기각}$$

⇒ DGL 학회원들의 키가 더 크다!! ^o^

#4-2

a) $H_0: \mu_{DGL} = \mu_{EGC} = \mu_{ELGE}$ vs H_1: not H_0