Linear Algebra Self-check Test with Solutions

Wigner Data and Compute Intensive Sciences Group

7 July 2025

Part 1: Vectors

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \boxed{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 2 - 4 - 6 = -8}$

2. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}$

Part 2: Vector-Matrix Multiplication

3. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}}$

Part 3: Matrix-Matrix Multiplication

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\text{Undefined (due to not matching dimensions - } 2{\times}3 \text{ vs } 2{\times}2)}$

Part 4: Matrix Determinant

8. $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10}$

9. $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{2(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1) - (-1)(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0) + 0 = 2(-5) + 1(-1) = -11}$

Part 5: Eigenproblems

10. For $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$:

    - Eigenvalues: $\boxed{3}$, $\boxed{-1}$
    - Corresponding eigenvectors: $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$, $\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

11. Which vector is an eigenvector of $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$?

    $\boxed{\text{Both}}$

    Verification:

    $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

    $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$