Appunti di Elementi di Analisi Matematica 1

Giuseppe Criscione

Indice

1 Insiemi numerici

- $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ numeri interi
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}$, m,n $\in \mathbb{Z}$, $n \neq 0\}$ numeri razionali
- $\mathbb{R}$ = numeri reali

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.1 Definizione di sottrazione in $\mathbb{N}$

Siano a,b $\in \mathbb{N}$ con $a > b$.

$a - b \stackrel{\text{def}}{=} d \in \mathbb{N} \, : \, b + d = a$

1.2 Definizione di quoziente in $\mathbb{N}$

Siano a,b $\in \mathbb{N}$ con $a > b$.

$a \div b \stackrel{\text{def}}{=} q \in \mathbb{N} \, : \, q * b = a$

1.3 Proprietà dei numeri razionali

$(\mathbb{Q},\ +,\ *\ ,\ \leq)$ è un campo. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$ valgono le seguenti proprietà:

1. $a + b = b + a$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $a + 0 = 0 + a = a$ (esistenza dell'elemento neutro)
4. $a + (-a) = 0$
5. $a * b = b * a$
6. $a * (b * c) = (a * b) * c$
7. $a * 1 = a$
8. se $a \neq 0 \Rightarrow \exists!\ a^{-1} \in \mathbb{Q} : a * a^{-1} = 1$
   a^{-1} è detto **reciproco** di a $(\frac{1}{a})$
9. $a * (b + c) = a * b + a * c$
10. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
11. se $c > 0 \Rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a * c \leq b * c$
    se $c < 0 \Rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a * c \geq b * c$

1.4 Operazione di potenza

Siano $a \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Q}$. Chiamiamo potenza di base a ed esponente n:

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{se } n = 1 \\ \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Problema
Determinare un numero $d \in \mathbb{Q}^+$ tale che $d^2 = 2$

Teorema 1.1
Non esiste alcun numero razionale d tale che $d^2 = 2$

Dimostrazione. (per assurdo)
Supponiamo che: $\exists\ \ d \in \mathbb{Q}\ \ :\ d^2 = 2$. Allora $d = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ ed $n \neq 0$.
Inoltre, poniamo $M.C.D(m, n) = 1$ (m ed n primi tra di loro).

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

[DA COMPLETARE] □

1.5 Numeri reali

Definizione 1.1
Chiamiamo numero reale un simbolo del tipo $\pm M, C_1, C_2, ..., C_n$ *con* $M \in \mathbb{N}$ *e* $C_i \in \{0, 1, ..., 9\}\ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Se $C_1, ..., c_n$ è periodico il numero si dice **razionale**, altrimenti si dice **irrazionale**. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$.
I numeri reali preceduti dal segno $+\quad (+M, C_1, C_2, ..., C_n)$ si dicono **reali positivi**. I numeri reali preceduti dal segno $-\quad (-M, C_1, C_2, ..., C_n)$ si dicono **reali negativi**.

Definizione 1.2
Sia α *un numero* $\mathbb{R}$. *Si chiama **valore assoluto** di* α *un numero reale definito come:*

$$|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha, & se\ \ \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & se\ \ \alpha = 0 \\ -\alpha & se\ \ \alpha \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Proprietà 1.1
Il valore assoluto di α *è un valore reale non negativo* $\forall\ \alpha$.

- $|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $|\alpha| \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \alpha \neq 0$

Proprietà 1.2
Il valore assoluto di α *è uguale al valore assoluto dell'opposto di* α $(-\alpha)$.
$|\alpha| = |-\alpha|\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.3
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Con* $\alpha = \pm M, C_1, C_2, ..., C_n$ *e* $\beta = \pm N, D_1, D_2, ..., D_n$.
α *è uguale a* β *se hanno lo stesso segno e se* $M = N$ *e* $C_i = D_i\ \forall i \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.4
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *con* $\alpha \neq \beta$. *Si dice che* α *è minore di* β *e scriviamo* $\alpha < \beta$ *se la parte intera di* α *è minore della parte intera di* β *oppure se la parte intera di* α *è uguale alla parte intera di* β *e c'è una cifra decimale* $\overline{r}$ *di* α *che è minore della corrispondente cifra decimale di* β. *Se* $\overline{r}$ *è maggiore di 1, tutte quelle precedenti devono essere uguali.*

$$\alpha < \beta \ se\ M < N \text{ oppure se } M = N \text{ e } \begin{cases} \exists\ \overline{r} \in \mathbb{N}\ \ tale\ che\ \ C_{\overline{r}} < D_{\overline{r}}\ e\ se \\ \overline{r} > 1\ allora\ C_i = D_i\ \forall\ i = 1, ..., \overline{r} - 1 \end{cases}$$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^-$ diremo che $\alpha < \beta$ se $-\beta < -\alpha$

Diremo che β è maggiore di α e scriviamo $\beta > \alpha$ se $\alpha < \beta$.
Diremo che α è maggiore o uguale a β e scriviamo $\alpha \leqslant \beta$ se $\alpha < \beta$ o $\alpha = \beta$.

Proprietà 1.3
Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

1. $\alpha < \beta$ *e* $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ **proprietà transitiva**

2. $\alpha < \beta$ e $\beta < \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ **proprietà antisimmetrica**

Definizione 1.5 (Definizione di potenza)
Siano $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Chiameremo potenza di base a ed esponente n e scriviamo a^n il numero così definito:

$$a^n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & se\ \ n = 1 \\ \underbrace{a * a * ... * a}_{n\ volte} & se\ \ n > 1 \end{cases}$$

Se $a \neq 0$ per definizione $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ e $a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^n}$

Teorema 1.2 (Esistenza della radice ennesima aritmetica)
Siano $a \in \mathbb{R}$ con $a \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}$.
Allora esiste uno e uno solo numero reale positivo b tale che $b^n = a$

Definizione 1.6 (Radice ennesima aritmetica)
Chiamiamo radice ennesima aritmetica di a e la indichiamo con il simbolo $\sqrt[n]{a}$ quell'unico numero reale non negativo d tale che $d^n = a$.

Se $a \geqslant 0$ ed $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ allora:

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} b \geqslant 0 \ \ tale\ che\ b^n = a.$$

*Se $a < 0$ e n è pari **non esiste** alcun numero reale d tale che $b^n = a$.*

Se n è dispari $-\sqrt[n]{-a}$ è tale che: $\big(-\sqrt[n]{a}\big)^n = \big[\big(-1\big)\ \sqrt[n]{-a}\big]^n = \big(-1\big)^n\ \sqrt[n]{a^n} = \big(-1\big)\ \big(-a\big) = a$

1.5.1 Proprietà dei numeri reali

Proprietà 1.4 (Proprietà di completezza o Dedekind)
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *con* $A, B \neq \emptyset$ *tali che* $a \leqslant b \ \ \forall a \in A$ *e* $\forall b \in B$.
Allora esiste almeno un numero reale c tale che:

$$a \leqslant c \leqslant b \ \ \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B.$$ *c è detto* ***elemento separatore***.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Definizione 1.7
Un numero reale k si dice ***maggiorante*** *di A se* $a \leqslant k \ \ \forall a \in A$.

Definizione 1.8
Un numero reale h si dice ***minorante*** *di A se* $a \geqslant h \ \ \forall a \in A$.

Conseguenza 1.1

- $k \in \mathbb{R}$ ***non maggiorante*** *di A se esiste almeno un elemento* $\overline{a} \in A$ *tale che* $\overline{a} > k$.
- $h \in \mathbb{R}$ ***non minorante*** *di A se esiste almeno un elemento* $\overline{a} \in A$ *tale che* $\overline{a} < h$.

Definizione 1.9
Un insieme si dice dotato di massimo se:

$$\exists\, M \in A \text{ tale che } a \leqslant M \ \ \forall a \in A.$$

M si chiama ***massimo*** *di A e si indica con maxA.*

Definizione 1.10
Un insieme si dice dotato di minimo se:

$$\exists\, m \in A \text{ tale che } m \leqslant a \ \ \forall a \in A.$$

m si chiama ***minimo*** *di A e si indica con minA.*

Conseguenza 1.2

- $M \in \mathbb{R} \ \ M = maxA \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} 1)\ M \in A \\ 2)\ a \leqslant M \ \ \forall a \in A \end{array}$

- $m \in \mathbb{R}\ \ m = maxA \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} 1)\ m \in A \\ 2)\ m \leqslant a \ \ \forall a \in A \end{array}$

Proprietà 1.5
Se A è dotato di massimo (minimo) il $maxA$ ($minA$) è unico.

Dimostrazione. Siano:

$$M_1 = maxA \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} 1)\ \ M_1 \in A \\ 2)\ \ M_1 \geqslant a \ \ \forall a \in A \end{array}$$

e

$$M_2 = maxA \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} 3)\ \ M_2 \in A \\ 4)\ \ M_2 \geqslant a \ \ \forall a \in A \end{array}$$

allora:
$1) + 4) \Rightarrow M_2 \geqslant M_1$
$2) + 3) \Rightarrow M_1 \geqslant M_2$.

Ne viene che $M_1 = M_2$ per la proprietà antisimmetrica dell'ordinamento. □

Proprietà 1.6
Se A è finito allora esistono il $maxA$ e $minA$.

Esempio 1.1 (Insieme dotato di maggiorante ma privo di massimo)
Consideriamo l'insieme A così definito $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 0\}$.

A è dotato di maggioranti (ad esempio 0). Ogni numero positivo è maggiorante dell'insieme A.

Proviamo che A non è dotato di massimo.

Supponiamo per assurdo che A sia dotato di massimo e lo indichiamo con M.

$$M = maxA \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} i)\ M \in A \\ ii)\ M \geqslant a \ \ \forall a \in A \end{array}.$$

Per la i $\ M$ è negativo. Per la $ii M \geqslant a \ \ \forall a \in A \ \ \Rightarrow \ \ \frac{M}{2}$ è minore di 0 *ed* $\frac{M}{2} \in A$. Poiché $M < 0 \Rightarrow M < \frac{M}{2}$.
ASSURDO poiché $M = maxA$ e $\frac{M}{2} \in A$.

Proprietà 1.7 (Proprietà del buon ordine)
Nell'insieme dei numeri naturali vale la proprietà del buon ordine.

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$. A è dotato di massimo.

Dimostrazione. Poiché $A \neq 0$ possiamo prendere un elemento $\overline{a} \in A$.
Costruiamo l'insieme X formato da tutti gli elementi minori o uguali ad $\overline{a}$.

$X = \{x \in A \ | \ x \leqslant \overline{a}\}$.

X è finito, pertanto è dotato di minimo $\Rightarrow \exists\ minX \Rightarrow \exists\ m = minX$.
Proviamo che m è il $minA$.

Poiché $m = minX \Rightarrow \begin{matrix} 1)\ m \in X \\ 2)\ m \leqslant x \ \ \forall x \in X \end{matrix}$.

Dalla 1) segue che $m \in X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m \in A \ \ e \ \ m \leqslant \overline{a}$. Provo che $m \leqslant a \ \ \forall a \in A$.

Sia $a \in A \begin{cases} a \leqslant \overline{a} \Rightarrow a \in X \ \ e \ \ m \leqslant a \ \ per \ \ la \ \ 2) \\ a \geqslant \overline{a} \geqslant m \ \ per \ \ la \ \ 1) \end{cases}$ □

Definizione 1.11
Diremo che A è ***limitato superiormente*** *se è dotato di maggioranti.*
Diremo che A è ***limitato inferiormente*** *se è dotato di minoranti.*
Diremo che A è ***limitato*** *se è limitato superiormente e inferiormente.*

$A \ limitato \ superiormete \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, k \in \mathbb{R} \ : \ k \geqslant a \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$

$A \ limitato \ inferiormente \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, h \in \mathbb{R} \ : \ h \leqslant a \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$

$A \ limitato \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, h, k \in \mathbb{R} \ : \ h \leqslant a \geqslant k \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$

Proprietà 1.8
A è limitato se e solo se $\exists\, H > 0 \ : \ H \geqslant |a| \ \ \forall a \in A$

Conseguenza 1.3
Dato un insieme $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a < 0\}$ *limitato superiormente.*
L'insieme dei maggioranti di A è $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b > 0\}$.

Teorema 1.3 (Esistenza dell'estremo superiore)
Sia $A \subseteq R$, $A \neq \emptyset$ *limitato superiormente.*
Allora l'insieme dei maggioranti di A è dotato di minimo.

Dimostrazione.
Poiché A è limitato superiormente è dotato di maggioranti.
Sia B l'insieme dei maggioranti di A. Segue che:
$B = \{b \in B \; : \; \text{b è maggiorante di A}\}$. Pertanto $B \neq \emptyset$ vale $a \leqslant b \;\; \forall a \in A$ e $\forall b \in B$. Per la proprietà di completezza $\exists \; c \in \mathbb{R} \; : \; a \leqslant c \leqslant b \;\; \forall a \in A$ e $\forall b \in B$.
Poiché $c \geqslant a \;\; \forall a \in A$ c è un maggioranete di A. Quindi $c \in B$ ed essendo $c \leqslant b \;\; \forall b \in B$ c è il minimo dell'insieme B □

Conseguenza 1.4
Il minimo dei maggioranti di un insieme si chiama ***estremo superiore****.*

Definizione 1.12
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ limitato superiormente. Si chiama ***estremo superiore*** *di A e si indica con $supA$ il minimo dei maggioranti di A.*

Teorema 1.4 (Proprietà caratteristiche del sup)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ limitato superiormente e $L \in \mathbb{R}$.

Allora L è l'estremo superiore di A se e solo se:

$$L = supA \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} 1) \; a \leqslant L \;\; \forall a \in A \\ 2) \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists \, \overline{a} \in A \; : \; \overline{a} > L - \epsilon \end{array}$$

Proprietà 1.9
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ limitato superiormente.
Per ipotesi: $supA \in A$. Allora $\exists \; maxA = supA$.

Proprietà 1.10
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ dotato di massimo.
Allroa A sarà limitato superiormente e $supA = maxA$.

Dimostrazione. Il maxA è un maggioranete quindi A è limitato superiormente e $supA \leqslant maxA$ perchè $supA$ è il minimo dei maggioranti di A. Ma il $maxA \in A$. Allora $maxA \leqslant supA$ poiché il sup è un maggiorante di A. □

Teorema 1.5
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ limitato inferiormente.
Allora l'insieme dei minoranti di A è dotato di minimo.

Definizione 1.13
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ limitato inferiormente.
Si chiama estremo inferiore e si indica con $infA$ il massimo dei minoranti di a.

$$inf A \stackrel{\text{def}}{=} max\{h \in \mathbb{R} \ : \ h \ minorante \ di \ \mathbb{R}\}.$$

Teorema 1.6 (Proprietà caratteristica dell'inf)
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ limitato inferiormente e $l \in \mathbb{R}$. Allora:

$$l = inf A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} 1)\ l \leqslant a \ \ \forall a \in A \\ 2)\ \forall \epsilon > 0\ \exists\ \overline{a} \in A \ : \ \overline{a} < l + \epsilon \end{array}$$

Conseguenza 1.5
Se A è un insieme non limitato superiormente diremo che $supA = \infty$.

Definizione 1.14
Se A non è limitato superiormente (dalla definizione si ha che $\forall\ k \in \mathbb{R} \ \ \exists\ \overline{a} \in \mathbb{A} \ : \ \overline{a} > k$).
Allora:

$$SupA \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$$

Definizione 1.15
Se A non è limitato inferiormente (dalla definizione si ha che $\forall\ h \in \mathbb{R} \ \ \exists\ \overline{a} \in \mathbb{A} \ : \ \overline{a} < h$).
Allora:

$$InfA \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$$

Definizione 1.16
Definiamo $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme dei numeri reali tale che:

$$\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Segue che:

- $-\infty < a \ \ \forall\ a \in \mathbb{R}$
- $+\infty > a \ \ \forall\ a \in \mathbb{R}$

1.5.2 Potenza con esponente razionale

Siano $a \in \mathbb{R}$ *e* $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ con $m, n \in \mathbb{N}$.

$$a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$$

1. $a \geqslant 0$ con a, m, n qualsiasi
2. $a < 0$ con n dispari e m qualsiasi
3. $a < 0$ con n pari e m qualsiasi

1.5.3 Potenza con esponente un numero razionale

Sia $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ con $\big(m, n \in \mathbb{N}\big)$.
Si definisce: $a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$. Se $a \neq 0$, allora $a^{-\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$ in tutti i casi in cui è definita $a^{\frac{m}{n}}$.

1.5.4 Potenza con un numero reale

Siano $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Vogliamo definire la potenza a^b.
Sia $b > 0 \Rightarrow\ b = M, C_1, C_2, ..., C_n$. Consideriamo

- $b_0 = M$
- $b_1 = M, C_1$
- $b_2 = M, C_1, C_2$
- ...
- $b_n = M, C_1, C_2, ..., C_n$

Per ogni n questi sono numeri razionali $\Rightarrow$ I numeri b_n con $n \in \mathbb{N}_0$ sono numeri razionali poiché per $a > 0$ le potenze $a^{b_0}, a^{b_1}, ..., a^{b_n}$ sono ben definite. A partire da un certo indice esse presentano la stessa parte intera che chiamiamo γ. Poi si stabilizza la prima cifra decimale γ_1, così come γ_2 fino a γ_n. Il numero $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ...\gamma_n$ per definizione si chiama **potenza di base** a **ed esponente** b.
Si pone anche $a^{-b} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{a^b}$.

Definizione 1.17
Se $b > 0$ è definita anche $0^b \overset{\text{def}}{=} 0$. Quindi a^b con $b > 0$ si definisce per $b \geqslant 0$.

1.6 Proprietà delle potenze (con esponente reale)

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a > 0$.

1. $a^b > 0$
2. $a^b * a^c = a^{b+c}$
3. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

4. $a^b * c^b = (a * c)^b$ con $c > 0$

5. $\dfrac{a^b}{c^b} = \left(\dfrac{a}{c}\right)^b$

6. $\left(a^b\right)^c = a^{b*c}$

1.7 Proprietà di monotonia

Siano x_1 e $x_2 \in \mathbb{R}$.

- Se $a > 1$ allora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- Se $0 < a < 1$ allora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Siano x_1, x_2 > 0e $a \in \mathbb{R}$

- Se $a > 0$ allora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^{\alpha} < x_2^{\alpha}$
- Se $a < 0$ allora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^{\alpha} < x_2^{\alpha}$

2 Notazioni

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > b$.

- $[\, a, b \,] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ intervallo chiuso e limitato di estremi a e b.
- $[\, a, b \,[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ intervallo semiaperto a destra e limitato di estremi a e b.
- $]\, a, b \,] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ intervallo semiaperto a sinistra e limitato di estremi a e b.
- $]\, a, b \,[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto e limitato di estremi a e b.
- $[\, a, +\infty \,[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$ intervallo chiuso non limitato superiormente.
- $]\, a, +\infty \,[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ intervallo aperto non limitato superiormente.

- $]-\infty, a\,] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ intervallo chiuso non limitato inferiormente.
- $]-\infty, a\,[\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ intervallo aperto non limitato inferiormente.
- $]-\infty, +\infty\,[\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}$

3 Logaritmi

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$

Problema
Determinare, se esiste, almeno una $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = b$ **(1)**

- se $a = 1$, $a^x = 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

Allora la **(1)** non ha soluzioni reali se $b \neq 1$. Invece ha infinite soluzioni se $b = 1$.

Teorema 3.1
Siano $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$. Allora esiste uno ed un solo numero reale x tale che:

$$a^x = b$$

Definizione 3.1
Siano $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$. Chiamiamo ***logaritmo*** *in base a di b e lo indichiamo con $log_a b$:*

$$log_a b \stackrel{\text{def}}{=} x \in \mathbb{R} \text{ tale che } a^x = b.$$

- *a si chiama* ***base del logaritmo***
- *b si chiama* ***argomento del logaritmo***

Conseguenza 3.1
Dalla definizione si ha che $a^{log_a b} = b$.

Conseguenza 3.2
$log_a 1 = 0$

Conseguenza 3.3
$log_a a = 1$

3.1 Proprietà dei logaritmi

1. $log_a b + log_a c = log_a(b * c)$
2. $log_a b - log_a c = log_a(b/c)$
3. $log_a b^\gamma = \gamma log_a b \quad con \ \ \gamma \in \mathbb{R}$
4. $log_a b = \dfrac{log_c b}{log_c a} \quad con \ c > 0, c \neq 1$

3.2 Proprietà di monotonia

Siano $x_1, x_2 > 0$.

- Se $a > 1$ allora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 < log_a x_2$
- Se $0 < a < 1$ allora $x_1 < x_2 \Leftrightarrow log_a x_1 > log_a x_2$

4 Valore assoluto

Sia $x \in \mathbb{R}$.

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

4.1 Proprietà dei valori assoluti

1. $|x| \geqslant 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

   $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$. $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
2. $|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x * y| = |x| * |y| \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \ \ \forall x \in \mathbb{R}, y \neq 0$
5. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

   $|x - y| \leqslant |x| - |y|$

   $\Big||x - y|\Big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$

6. Dato $k \in \mathbb{R},\ \ k > 0$ allora:
   $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$
   $|x| > k \Leftrightarrow x < -k,\ \ x > k$

5 Funzioni

5.1 Concetto di funzione

Siano $A, B \neq \emptyset$ e f una legge che associa **ad ogni** elemento di A un solo elemento di B. La terna (A, B, f) si chiama **funzione definita in A a ha valori in B**.
A si chiama **dominio** della funzione.
B si chiama **codominio** della funzione
f si chiama **legge di definizione**.

Scriviamo quindi: $f : A \to B$.

Preso $x \in A$ la legge f associa ad x un solo elemento di B che indichiamo con $f(x)$. Quindi:

$$A \ni x \longrightarrow f(x) \in B.$$

$f(x)$ si chiama valore assunto dalla funzione f in x o **immagine di x tramite f**.

5.2 Definizioni principali

Definizione 5.1
*Data una funzione $f : A \to B$, si chiama **immagine di** f l'insieme Imf formato dai valori assunti dalla funzione.*

$$ImF \overset{\text{def}}{=} \{f(x),\ x \in A\}.$$

Oppure: $ImF = \{y \in B \mid \exists\, x \in A : f(x) = y\}$.

Definizione 5.2
*Data una funzione $f : A \to B$, si chiama **grafico di** f l'insieme Imf formato dai valori assunti dalla funzione.*

$$Gf \overset{\text{def}}{=} \{(x,\ f(x)),\ x \in A\}.$$

Oppure: $Gf = \{(x, y),\ x \in A,\ y = f(x)\}$.

Definizione 5.3
Si chiama ***funzione reale*** *una funzione il cui codominio è tutto* $\mathbb{R}$ $(B = \mathbb{R})$.
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ *diremo che* f *è una funzione di* ***variabile reale***.

Definizione 5.4
Diremo f ***iniettiva*** *se* $\forall\, x_1$ *e* $x_2 \in A$ *con* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
(f *non è iniettiva se* $\exists\, x_1, x_2 \in A$ *con* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$*).*

Definizione 5.5
Diremo f ***suriettiva*** *se* $Imf = B \Leftrightarrow \forall\, y \in B\ \ \exists\, x \in A\ :\ f(x) = y$.

Definizione 5.6
Diremo f ***biettiva*** *se* f *è iniettiva e surriettiva.*

Definizione 5.7 (Funzione invertibile)
Diremo f ***invertivile*** *se* $\forall\, y \in Imf\ \ \exists!\, x \in A\ :\ F(x) = y$.

Se f *è invertibile possiamo definire la funzione* $f^{-1} : Imf \to A$ *come segue:*

$$f^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} !x \in A : f(x) = y \ \ \forall y \in Imf.$$

5.2.1 Restrizioni e Prolungamenti

Definizione 5.8
Data $f : A \to B$ *e* $x \subset A$. *Sia* $g : X \to B$ *definita da* $g(x) = f(x)\ \forall x \in X$.
Diremo chhe g *è la* ***restrizione*** *di* f *all'insieme* X *e si scrive* $g = f_{|X}$

Definizione 5.9
Siano $f : A \to B$ *e* $g : X \to B$ *con* $A \subset X$ *tale che* $f(x) = g(x)\ \forall x \in A$.
Ossia $g_{|A} = f$. *In tale caso si dice che* g *è un* ***prolungamento*** *di* f.
definita da $g(x) = f(x)\ \forall x \in X$. *Diremo chhe* g *è la* ***restrizione*** *di* f *all'insieme* X *e si scrive* $g = f_{|X}$

5.3 Funzioni definite per casi

Siano $A_1, A_2, ..., A_n \neq \emptyset$ e $B_1, B_2, ..., B_n \neq \emptyset$ a due a due disgiunti.
Siano inoltre:

$f_1 : A_1 \to B_1$

$f_2 : A_2 \to B_2$

...

$f_n : A_n \to B_n$

Chiamiamo A $= \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$. Sia $g : A \to B$ definita come segue:

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in A_2 \\ & \dots \\ f_n(x) & \text{se } x \in A_n \end{cases}$$

Si dice che g è una funzione **definita per casi**.

5.4 Crescenza e Decrescenza

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

Diremo che f è **crescente** se: $\forall\ x_1, x_2 \in A\ con\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Diremo che f è **strettamente crescente** se: $\forall\ x_1, x_2 \in A\ con\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Diremo che f è **decrescente** se: $\forall\ x_1, x_2 \in A\ con\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Diremo che f è **strettamente decrescente** se: $\forall\ x_1, x_2 \in A\ con\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Definizione 5.10
*Le funzioni crescenti, decrescente, strettamente crescenti e strettamente decrescenti si dicono **monotone**. In particolare quelle strettamente crescenti e strettamente decrescenti si dicono **strettamente monotone**.*

Proprietà 5.1
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora f è iniettiva.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia strettamente decrescente.
Siano x_1 e $x_2 \in A, x_1 \neq x_2$. Abbiamo due casi:

1) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

2) $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

In entrambi i casi si ha che $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

5.5 Maggioranti e minoranti di una funzione

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Definizione 5.11
*Un numero $k \in \mathbb{R}$ si chiama **maggiorante** di f (**minorante** di f) se è un maggiorante (minorante) dell'insieme Imf.*
Poiché $ImF \overset{\text{def}}{=} \{f(x),\ x \in A\}$, preso un $k \in \mathbb{R}$, si chiama:

$$\textbf{\textit{maggiorante}}\ \textit{di}\ f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} k \geqslant f(x)\ \forall x \in A.$$

$$\textbf{\textit{minorante}}\ \textit{di}\ f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} h \leqslant f(x)\ \forall x \in A.$$

*k **non** è maggiorante di f $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, x \in A : f(x) > k$.*

Definizione 5.12
Diremo che f è dotata di massimo (minimo) se l'Imf è dotata di massimo (minimo). Se f è dotata di massimo (minimo), si chiama massimo di f (minimo di f) e si indica con $\max\limits_{x\in A} f$, $\max\limits_{x\in A} f(x)$, $\max f$ $\left(\min\limits_{x\in A} f,\ \min\limits_{x\in A} f(x),\ \min f\right)$ il $\max Imf$ $(\min Imf)$.

$$f\ \textit{dotata di massimo} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, \overline{x} \in A : f(\overline{x}) \geqslant f(x)\ \forall x \in A.$$

$$f\ \textit{dotata di minimo} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, \overline{\overline{x}} \in A : f(\overline{\overline{x}}) \leqslant f(x)\ \forall x \in A.$$

$\overline{x}$ si chiama punto di massimo. Quindi $\max\limits_{A} f = f(\overline{x})$.

$\overline{\overline{x}}$ si chiama punto di minimo. Quindi $\min\limits_{A} f = f(\overline{\overline{x}})$.

Definizione 5.13
*Se f è dotata di massimo (minimo), il $\max f(\min f)$ è **unico**.*

Proprietà 5.2
Se f è dotata sia di $\max$ che di $\min$ allora il $\min f \leqslant \max f$.

Definizione 5.14
Diremo che f è limitata superiormente (inferiormente) se è dotata di maggioranti (minoranti).

$$f\ \textit{limitata superiormente} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, k \in \mathbb{R} : k \geqslant f(x)\ \forall x \in A.$$

$$f \textit{ limitata inferiormente} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, h \in \mathbb{R} : h \leqslant f(x)\ \forall x \in A.$$

Definizione 5.15
Diremo che f è limitata se è limitata superiormente e inferiormente.

$$f \textit{ limitata} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, h, k \in \mathbb{R} : h \leqslant f(x) \leqslant k\ \ \forall x \in A.$$

Proprietà 5.3
f limitata $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, H > 0 : |f(x)| \leqslant H\ \ \forall x \in A.$

Definizione 5.16
Se f è limitata superiormente chiamiamo ***estemo superiore*** *di f e lo indichiamo con $\sup\limits_{x\in A} f$, $\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $\sup f$ l'estemo superiore del Imf.*

$$\sup_{x\in A} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sup Imf$$

Definizione 5.17
Se f è limitata inferiormente chiamiamo ***estemo inferiore*** *di f e lo indichiamo con $\inf\limits_{x\in A} f$, $\inf\limits_{x\in A} f(x)$, $\inf f$ l'estemo superiore del Imf.*

$$\inf_{x\in A} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \inf Imf$$

Proprietà 5.4
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata superiormente. Preso un $L \in \mathbb{R}$ segue:

$$L = \sup_A f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} i)\ f(x) \leqslant L\ \ \forall x \in A \\ ii)\ \forall\, \epsilon > 0 : \exists\, x_\epsilon \in A : f(x_\epsilon) > L - \epsilon \end{array}$$

Proprietà 5.5
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata inferiormente. Preso un $l \in \mathbb{R}$ segue:

$$l = \sup_A f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} i)\ f(x) \geqslant l\ \ \forall x \in A \\ ii)\ \forall\, \epsilon > 0 : \exists\, x_\epsilon \in A : f(x_\epsilon) < l + \epsilon \end{array}$$

Definizione 5.18
Diremo che f non è limitata superiormente (inferiormente) se non è dotata di maggioranti (minoranti).

$$f \textit{ non limitata superiormente} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall k \in \mathbb{R}\ \ \exists\, x^* \in A : f(x^*) > k$$

$$f \textit{ non limitata inferiormente} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall h \in \mathbb{R}\ \ \exists\, x^{**} \in A : f(x^{**}) < k$$

Conseguenza 5.1
Sia f una funzione:

> *se f non è limitata superiormente poniamo* $\sup\limits_A f = +\infty$
>
> *se f non è limitata inferiormente poniamo* $\inf\limits_A f = -\infty$
>
> *se* $f : A \to \mathbb{R} \Rightarrow \inf\limits_A f \leqslant \sup\limits_A f.$
>
> $\inf\limits_A \leqslant f(x) \leqslant \sup\limits_A \quad \forall x \in A.$

Definizione 5.19
Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.
Diremo che A è ***simmetrico*** *rispetto all'origine se $x \in A \Rightarrow -x \in A$.*

Definizione 5.20
Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Simmetrico rispetto all'origine. Sia $f : A \to \mathbb{R}$.
Se:

i) $f(x) = f(-x) \;\; \forall x \in A$ *allora f è una funzione* ***pari****.*

ii) $f(x) = -f(-x) \;\; \forall x \in A$ *allora f è una funzione* ***dispari****.*

5.6 Funzioni composte

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$. $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. $Imf \subseteq B$.
Allora la funzione: $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ definita dalla legge:

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)) \; \forall x \in A$$

si chiama ***funzione composta tramite f e g****. f e g si chiameranno* ***funzioni componenti****.*

6 Successioni numeriche

6.1 Definizione di successione numerica

Definizione 6.1
Chiamiamo ***successione numerica*** *una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.*
Indichiamo con a_n (termine generale) il numero $\mathbb{R}$ che la successione associa ad n. In questo caso la successione si indica con $\{a_n\}$ detta successione di termine generale a_n.

Esempi di successioni

- $\{\frac{1}{n}\}$ è la successione che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ il suo **reciproco**.
- $\{n^2\}$ è la successione che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ il suo quadrato.
- $\{(-a)^n\}$ è la successione che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} -1 & \text{con } n \textit{ dispari} \\ 1 & \text{con } n \textit{ pari} \end{cases}$

Quindi per assegnare una successione numerica basta assegnare il suo termine generale.

Definizione 6.2
*Sia $\{a_n\}$ una successione numerica. L'immagine di $\{a_n\}$ ossia l'insieme numerico $\{\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}\}$ si chiama **insieme dei termini** (o sostegno) della successione.*

Definizione 6.3
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri $\mathbb{R}$.

- *Un numero $k \in \mathbb{R}$ si chiama **maggiorante** di $\{a_n\}$ se $k \geqslant a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *Un numero $h \in \mathbb{R}$ si chiama **minorante** di $\{a_n\}$ se $h \leqslant a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Osservazione 1
*$k \in \mathbb{R}$ **non** è maggiorante di $\{a_n\}$* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : a_{\overline{n}} > k$

Osservazione 2
*$h \in \mathbb{R}$ **non** è minorante di $\{a_n\}$* $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} : a_{\overline{\overline{n}}} > k$

Definizione 6.4
*Diremo che $M \in \mathbb{R}$ è il **massimo** di $\{a_n\}$ (max) se* $\begin{matrix} i)\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : M = a_{\overline{n}} \\ ii)\ M \geqslant a_n \in \mathbb{N} \end{matrix}$

Definizione 6.5
*$\{a_n\}$ è dotata di massimo se $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n \leqslant a_{\overline{n}}$. $a_{\overline{n}}$ si chiama **massimo** di $\{a_n\}$ e si indica con $\max\{a_n\}$.*

Definizione 6.6
*$\{a_n\}$ è dotata di minimo se $\exists\, \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} : a_{\overline{\overline{n}}} \leqslant a_n$. $a_{\overline{\overline{n}}}$ si chiama **minimo** di $\{a_n\}$ e si indica con $\min\{a_n\}$.*

Definizione 6.7
*$\{a_n\}$ si dice **limitata superiormente*** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists\, k \in \mathbb{R} : k \geqslant a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 6.8
$\{a_n\}$ *si dice* ***limitata inferiormente*** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, h \in \mathbb{R} : h \leqslant a_n \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 6.9
$\{a_n\}$ *si dice* ***limitata*** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, h, k \in \mathbb{R} : h \leqslant a_n \leqslant k \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Proprietà 6.1
$\{a_n\}$ *è limitata se e solo se* $\exists\, H > 0 : H \geqslant |a_n| \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 6.10
Sia $\{a_n\}$ *limitata superiormente. Chiamiamo* ***estremo superiore*** *di suc l'estremo superiore del sul sostegno e lo indichiamo con* $\sup\{a_n\}$*. Quindi:*

$$\sup\{a_n\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sup\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proprietà 6.2 (Proprietà caratteristica del sup)
Sia $\{a_n\}$ *una successione limitata superiormente. Sia* $L \in \mathbb{R}$*. Allora:*

$$L = \sup\{a_n\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} i)\ a_n \leqslant L \;\forall n \in \mathbb{N} \\ ii)\ \forall \epsilon > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : a_{\overline{n}} > L - \epsilon \end{array}$$

Se $\{a_n\}$ *non è limitata superiormente allora* $\sup\{a_n\} = +\infty$.

Proprietà 6.3 (Proprietà caratteristica del inf)
Sia $\{a_n\}$ *una successione limitata inferiormente. Sia* $l \in \mathbb{R}$*. Allora:*

$$l = \inf\{a_n\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} i)\ l \leqslant a_n \;\forall n \in \mathbb{N} \\ ii)\ \forall \epsilon > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : a_{\overline{n}} < l + \epsilon \end{array}$$

Se $\{a_n\}$ *non è limitata inferiormente allora* $\inf\{a_n\} = -\infty$.

6.2 Successioni monotone

Sia $\{a_n\}$ una successione numerica.

- $\{a_n\}$ è **crescente** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall n, m \in \mathbb{N} n < m \Rightarrow a_n \leqslant a_m \Leftrightarrow$
  $a_n \leqslant a_{n+1} \;\forall n \in \mathbb{N}$
- $\{a_n\}$ è **strettamente crescente** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall n, m \in \mathbb{N} n < m \Rightarrow a_n < a_m \Leftrightarrow$
  $a_n < a_{n+1} \;\forall n \in \mathbb{N}$
- $\{a_n\}$ è **decrescente** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall n, m \in \mathbb{N} n < m \Rightarrow a_n \geqslant a_m \Leftrightarrow$
  $a_n \geqslant a_{n+1} \;\forall n \in \mathbb{N}$

- $\{a_n\}$ è **strettamente decrescente** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall n, m \in \mathbb{N} n < m \Rightarrow a_n > a_m \Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Osservazione 3

- *Se* $\{a_n\}$ *è crescente (s. crescente)* $\Rightarrow \; \exists \min \{a_n\} = a_1$
- *Se* $\{a_n\}$ *è decrescente (s. decrescente)* $\Rightarrow \; \exists \max \{a_n\} = a_1$

7 Limiti

Sia $\{a_n\}$ una successione numerica.

Definizione 7.1
Diremo che $\{a_n\}$ *converge a* $l \in \mathbb{R}$ *e si scrive:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

Se:

$$\forall \, \epsilon > 0 \; \exists \, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n} \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon.$$
$$(l - \epsilon < a_n < l + \epsilon).$$

Segue che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \, \epsilon > 0 \; \exists \, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n} \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon.$$

Definizione 7.2
Diremo che la successione $\{a_n\}$ ***diverge positivamente*** *e scriviamo:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

Se

$$forall \; k > 0 \; \exists \, \overline{n} \in \mathbb{N} : n > \overline{n} \Rightarrow a_n > k.$$

Definizione 7.3
Diremo che la successione $\{a_n\}$ ***diverge negativamente*** *e scriviamo:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

Se

$$forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : n > \overline{n} \Rightarrow a_n < \epsilon.$$

Definizione 7.4
Diremo che $\{a_n\}$ *è* ***regolare*** *se esiste il* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Esempio 7.1 (Esempio di successione non regolare o **oscillante**)
$(-1)^n = \begin{cases} 1 & con\ n\ pari \\ -1 & con\ n\ dispari \end{cases}$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite si ha:
$\forall\ k > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{n} \Rightarrow (-1)^n > k.$
Se prendo $k = 1$ ho un assurdo. □

Definizione 7.5
Una successione $\{a_n\}$ *a termini non tutti nulli si dice* ***alternante*** *(o a segni alterni) se:*

$$a_n \begin{cases} \geqslant 0\ \ (\leqslant 0) & con\ n\ dispari \\ \leqslant 0\ \ (\geqslant 0) & con\ n\ pari \end{cases}$$

Teorema 7.1 (**Teorema di unicità del limite**)
Ogni successione regolare un ***unico*** *limite.*

Supponiamo che esistano due limiti l *e* m.
Poniamo quindi per ipotesi che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

La tesì sarà dunque: $l = m$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $l \neq m$ e siano $l, m \in \mathbb{R}$ con $l > m$. Allora $\dfrac{l-m}{2} > 0$.
Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n} \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$. **(1)**.
Scriviamo la **(1)** in corrispondenza di $\epsilon = \dfrac{l-m}{2}$ e trovo che:
preso $\overline{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{n}_1 \Rightarrow l - \dfrac{l-m}{2} < a_n < l + \dfrac{l-m}{2}$ **(3)**.
Si ha anche che:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{\overline{n}} \Rightarrow m - \epsilon < a_n < m + \epsilon$. **(2)**.

Scriviamo la **(2)** in corrispondenza di $\epsilon = \dfrac{l-m}{2}$ e trovo che:

preso $\overline{\overline{n}}_1 \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{\overline{n}}_1 \Rightarrow m - \dfrac{l-m}{2} < a_n < m + \dfrac{l-m}{2}$ **(4)**.

Se prendo $n > \max\{\overline{n}_1, \overline{\overline{n}}_1\}$ valgono contemporaneamente la **3** e la **4**.

Pertanto possiamo scrivere:

$l - \dfrac{l-m}{2} < a_n < m + \dfrac{l-m}{2}$. Segue $\dfrac{2l-l+m}{2} < a_n < \dfrac{2m-l+m}{2} \Longrightarrow \dfrac{l+m}{2} < \dfrac{l+m}{2} \Longrightarrow$ **ASSURDO**. □

Teorema 7.2 (**Teorema della permanenza del segno**)

.

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Allora:*

Se $l > 0$ *oppure* $l = +\infty$ *allora* $\exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0 \forall\ n > \overline{n}$.

Se $l < 0$ *oppure* $l = -\infty$ *allora* $\exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n < 0 \forall\ n > \overline{n}$.

Dimostrazione.

(1) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\ k > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{n} \Rightarrow a_n < -k$.

(2) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{n} \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$.

Poiché $l > 0$ posso prendere $0 < \epsilon < l$. Scrivo la (2) in corrispondenza a $0 < \epsilon < l$ e trovo $\overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{n} \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$.

Poiché $l - \epsilon > 0$ (per la scelta di ϵ) ho la tesi. □

Corollario 7.2.1

Sia $\{a_n\}$ *una successione tale che:* $a_n = \begin{cases} > 0 & per\, infiniti\ casi\ di\ n \\ < 0 & per\, infiniti\ casi\ di\ n \end{cases}$

Allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione. Se fosse $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ con $l > 0 (l < 0)$ oppure $l = +\infty(-\infty)$ per il teorema della permanenza del segno $\exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0 (a_n < 0)\ \forall\ n > \overline{n}$. **ASSURDO**. □

Esempio 7.2
Se $\{(-1)^n\}$ *fosse dotata di limite per il corollario precedente dovrebbe essre:* $\lim_{n\to+\infty}(-a)^n = 0$ *che per definizione:* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n > \overline{n} \Rightarrow |(-1)^n - 0| < \epsilon$. *Se prendo* $\epsilon = \frac{1}{2}$ *e determino* $\overline{n} \in \mathbb{N} : |(-1)^n - 0| < \frac{1}{2}$.
ASSURDO.

Teorema 7.3 (**Primo teorema del confronto (dei carabinieri)**)
Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *tre successioni.*
Supponiamo che:

1. $\exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : b_n \leqslant a_n \leqslant c_n\ \forall n > \overline{n}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$.

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Dimostrazione.
Bisogna provare che $\forall\epsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall\ n > \overline{n} \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$.
Fisso $\epsilon > 0$.
Poiché $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$ allora $\forall\epsilon > 0\ \exists\ n_1 \in \mathbb{N} :\ \forall\ n > n_1 \Rightarrow l - \epsilon < b_n < l + \epsilon$.
Analogamente.
$\lim_{n\to+\infty} c_n = l$ allora $\forall\epsilon > 0\ \exists\ n_2 \in \mathbb{N} :\ \forall\ n > n_2 \Rightarrow l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$.
Allora segue che $l - \epsilon < b_n \leqslant a_n \leqslant c_n < l + \epsilon$.
Trovo quindi che $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$.
Posto $n_o = \max\{\overline{n},\ n_1,\ n_2\}$ ho la tesi.

□

Teorema 7.4 (**Secondo teorema del confronto**)
Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *due successioni numeriche. Supponiamo che:*

1. $\exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n \geqslant b_n\ \forall\ n > \overline{n}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Teorema 7.5 (**Terzo teorema del confronto**)
Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *due successioni numeriche. Supponiamo che:*

1. $\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n \;\forall\, n > \overline{n}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

7.1 Carattere di una successione

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Vogliamo studiare il carattere di $\{|a_n|\}$.

Teorema 7.6
Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |l|$.

Non vale il viceversa.
Basta considerare la sucessione $\{(-1)^n\}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Il valore assoluto $|a_n| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Questo implica che* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 1$. **FALSO** *perché non esiste il* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Teorema 7.7
Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty(-\infty) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Non vale il viceversa.
Basta considerare la sucessione $\{(-1)^n n\}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Non esiste il $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n$ *perché* $(-1)^n n$ *è alternante quindi ha infiniti termini positivi e negativi. Se fosse dotata di limite dorebbe essere* $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n = 0$ *se e solo se* $\lim\limits_{n\to+\infty} |(-1)^n n| = 0$, **ASSURDO**.

Definizione 7.6
Se il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *diremo che* $\{a_n\}$ *è* ***infinitesima***.

Definizione 7.7
Se il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *diremo che* $\{a_n\}$ *è* ***infinitivamente grande*** *e scriveremo* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

Teorema 7.8
Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\}$ *è* ***limitata***.

Dimostrazione.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n} \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon.$
Fisso $\epsilon > 0$ e determino $\overline{n} : l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \forall n > \overline{n}.$
Sia $k = \max\{a_1,\ a_2, ...,\ a_{\overline{n}},\ l + \epsilon\}$. k esiste perché $\{a_1,\ a_2, ...,\ a_{\overline{n}},\ l + \epsilon\}$ è finito. Infatti ha $\overline{n} + 1$ elementi. Inoltre $k \geqslant a_1$. $k \geqslant a_1, ..., k \geqslant a_{\overline{n}}$. $k \geqslant l + \epsilon \geqslant a_n$ se $n > \overline{n}$. Quindi $k \geqslant a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. **(1)**.

Analogamente posto $h = \min\{a_1,\ a_2, ...,\ a_{\overline{n}},\ l - \epsilon\}$ trovo che $h \leqslant a_1, ..., h \leqslant a_{\overline{n}}$ e $h \leqslant l - \epsilon \leqslant a_n\ \forall n > \overline{n}$. Quindi $h \leqslant a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.**(2)**.

Da **(1)** e **(2)** $\Rightarrow h \leqslant a_n \leqslant k\ \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi per definizione a_n è limitata. □

Teorema 7.9

$$\textit{Se} \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \begin{array}{rl} i) & \sup\{a_n\} = +\infty \\ ii) & \inf\{a_n\} \in \mathbb{R} \end{array}$$

Teorema 7.10

$$\textit{Se} \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \begin{array}{rl} i) & \sup\{a_n\} \in \mathbb{R} \\ ii) & \inf\{a_n\} = -\infty \end{array}$$

7.2 Operazioni sui limiti

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni numeriche.

Teorema 7.11

$$\textit{Se} \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} e \lim_{n\to+\infty} b_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{array}{rl} i) & \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = l + m \\ ii) & \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m \end{array}$$

Dimostrazione.

Ipotesi:

$$\textbf{(1)} \lim_{n\to+\infty} a_n = l \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0\ \ \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - l| < \delta$$

$$\textbf{(2)} \lim_{n\to+\infty} b_n = m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \epsilon > 0\ \ \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall n > n_2 \Rightarrow |b_n - m| < \delta$$

Tesi:

- $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = l\cdot m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon > 0 \;\; \exists\, n_3 \in \mathbb{N} : \forall n > n_3 \Rightarrow |a_n\cdot b_n - l\cdot m| < \epsilon$

Fisso $\epsilon > 0$ nella tesi.
Consideriamo $|a_n \cdot b_n - l \cdot m| = |a_n \cdot b_n - l \cdot b_n + l \cdot b_n - l \cdot m| = |(a_n - l)b_n + (b_n - m)l| \leqslant |(a_n - l)b_n)| + |(b_n - m)l| = |a_n - l| \cdot |b_n| \cdot |b_n - m| \cdot |l| \leqslant H \cdot |a_n - l| + (|l| + 1) \cdot |b_n - m|$. **(*)**
Poiché b_n è convergente, segue che b_n è limitata. Cioè:
$\exists\, H > 0 : |b_n| \leqslant H \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Scrivo la **(1)** con $\delta = \dfrac{\epsilon}{2H}$ e trovo $n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \dfrac{\epsilon}{2H} \; \forall n > n_1$. **(3)**.
Scrivo la **(2)** con $\delta = \dfrac{\epsilon}{2(|l| + 1)}$ e trovo $n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - l| < \dfrac{\epsilon}{2(|l| + 1)} \; \forall n > n_2$. **(4)**.
Se $n > \max(n_1, n_2)$ valgono la **(3)** e la **(4)**.

E quindi dalla **(*)** si ha:

$$|a_n b_n - lm| < H \cdot \frac{\epsilon}{2H} + (|l| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2(|l| + 1)} = \epsilon.$$

Posto $n_3 = \max(n_1, n_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\epsilon > 0 \; \exists\, n_3 \in \mathbb{N} : \forall n > n_3 \Rightarrow |a_b b_n - le| < \epsilon$. □

Conseguenza 7.1

- *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ *e* $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} k \cdot a_n = k \cdot l$.
- *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$ *e* $k_1, k_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot b_n = k_1 \cdot l + k_2 \cdot m$.

Teorema 7.12 (**Terorema della permanenza del segno generalizzato**)
Siano $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ *e* $l < m (l > m)$.

Allora:

$$\exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : a_n < m \; \forall n > \overline{n}.$$

Dimostrazione. Consideriamo $\{a_n - m\}$. Allora il $\lim_{n\to+\infty} a_n - m = l - m < 0 \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : a_n - m < 0 \; \forall n > n_1$. Si ha quindi la tesi. □

Teorema 7.13
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *e* $\{b_n\}$ *è limitata inferiormente.*

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=+\infty.$$

Teorema 7.14
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$ *e* $\{b_n\}$ *è limitata supeiriormente.*

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=-\infty.$$

Conseguenza 7.2
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n=l\in\mathbb{R}$.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=+\infty.$$

Oservazione. Se $\lim b_n=l\in\mathbb{R}$ o $\lim b_n=+\infty$ allora $\{b_n\}$ è limitata inferiormente.

Conseguenza 7.3
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n=+\infty$.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=+\infty.$$

Oservazione. Se $\lim b_n=l\in\mathbb{R}$ o $\lim b_n=-\infty$ allora $\{b_n\}$ è limitata superiormente.

Teorema 7.15
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty(-\infty)$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n=l\in\mathbb{R}$.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=\begin{cases}+\infty(-\infty) & se\ \ l>0\\ ?\quad \text{(F.I.)} & se\ \ l=0\\ -\infty(+\infty) & se\ \ l<0\end{cases}.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty(-\infty)$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n=-\infty$.

Allora:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \text{ ? (F.I.) } +\infty-\infty \textit{ è una forma indeterminata.}$$

Teorema 7.16
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty(-\infty)$ *allora* $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

Teorema 7.17
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ *allora* $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$.

Dimostrazione (Forma Indeterminata)
DA COMPLETARE

Teorema 7.18
Il prodotto tra una successione infinitesima e una successione limitata è a sua volta un'infinitesima.

Siano $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *e* $\{b_n\}$ *limitata. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = 0 \text{ (successione infinitesima).}$$

Dimostrazione.
Se il $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora anche il $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$. **(1)**
Per ipotesi la successione $\{b_n\}$ è limitata, quindi $\exists\ H > 0 : |b_n| \leqslant H\ \forall n \in \mathbb{N}$. **(2)**

Ne viene che $0 \leqslant |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leqslant H \cdot |a_n|\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Per il teorema dei carabinieri, il $\lim_{n\to+\infty} |a_n \cdot b_n| = 0$.

□

7.3 Successione reciproca

Sia $\{a_n\}$ una successione numerica tale che $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
La successione $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ si chiama **successione reciproca di** $\{a_n\}$

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}\ \ l \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{l}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0\ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right| = +\infty$.
3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

7.4 Successione quoziente

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche con $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

La successione $\left\{\dfrac{a_n}{b_N}\right\}$ si chiama **successione rapporto** o **quoziente tra** $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

7.5 Limiti Notevoli

$\{n^\alpha\}$ **con** $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$\{a^n\}$ **con** $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leqslant 1 \end{cases}$$

$\{n^n\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ per il secondo teorema del confronto si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$$

$\{n!\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ per il secondo teorema del confronto si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

7.6 Limiti di successioni notevoli

Successione polinomiale

$$\lim_{n\to+\infty} [a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + ... + a_p] = \lim_{n\to+\infty} n^p \left[a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + ... + \frac{a_p}{n^p}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_0 < 0 \end{cases}$$

Successione polinomiale fratta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + ... + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + ... + a_q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p\Big[a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + ... + \dfrac{a_p}{n^p}\Big]}{n^q\Big[b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \dfrac{b_2}{n^2} + ... + \dfrac{b_q}{n^q}\Big]} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{p-q} \cdot \frac{\Big[a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + ... + \dfrac{a_p}{n^p}\Big]}{\Big[b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \dfrac{b_2}{n^2} + ... + \dfrac{b_q}{n^q}\Big]} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ p > q, \frac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty & \text{se } \ p > q, \frac{a_0}{b_0} < 0 \\ 0 & \text{se } \ p < q \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } \ p = q \end{cases}$$

7.7 Limite delle successioni monotone

Teorema 7.19 (Delle successioni monotone)
Ogni successione monotona è regolare. In particolare, se $\{a_n\}$ *è crescente (s. crescente) allora il* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. *Invece se* $\{a_n\}$ *è decrescente (s. decrescente) allora il* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Ipotesi: $\{a_n\}$ *è crescente.*

Tesi: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.

Distinguiamo due casi:

Caso 1.
Sia $\sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$ *e sia* $L = \sup 1\{a_n\}$.
Bisogna provare che:
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : n > \overline{n} \Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ **(1)**.
Fisso $\epsilon > 0$.

$$L = \sup\{a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} i) & a_n \leqslant L \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leqslant L + \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \textbf{(2)} \\ ii) & \forall\, \sigma > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > l - \sigma \end{cases}$$

Scrivo la ii) con $\sigma = \epsilon$ *e determino* $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > L - \epsilon$.
Se prendo $n > n_0 \Rightarrow a_n \geqslant a_{n_0} > L - \epsilon$ **(3)**.

Dalla **(2)** + **(3)** $\Rightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \quad \forall n > n_0$. *Se prendo* $\overline{n} = n_0$ *ho la tesi.*

Caso 2.
Sia $\sup\{a_n\} = +\infty$. *Provo che* $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall k > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall n > \overline{n} \Rightarrow a_n > k$.
Fisso $k > 0$. k *non è maggiorante di* $\{a_n\} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > k$.

Poiché $\{a_n\}$ *è crescente, se* $n > n_0 \Rightarrow a_n > a_{n_0} > k$.