# 线性代数

## 一、基本知识

1. 本书中所有的向量都是列向量的形式：

$$\vec{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

2. 矩阵的`F`范数：设 $\mathbf{A}=(a_{i,j})_{m\times n}$

$$||\mathbf{A}||_F=\sqrt{\sum_{i,j}a_{i,j}^2}$$

   它是向量的 $L_2$ 范数的推广。

3. 矩阵的迹 $tr(\mathbf{A})=\sum_i a_{i,i}$。其性质有：
   - $||\mathbf{A}||_F=\sqrt{tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)}$
   - $tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{A}^T)$
   - 假设 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，则有：

$$tr(\mathbf{AB})=tr(\mathbf{BA})$$

   - $tr(\mathbf{ABC})=tr(\mathbf{CAB})=tr(\mathbf{BCA})$

## 二、向量操作

1. 一组向量 $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\cdots,\vec{\mathbf{v}}_n$ 是线性相关的：指存在一组不全为零的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得：

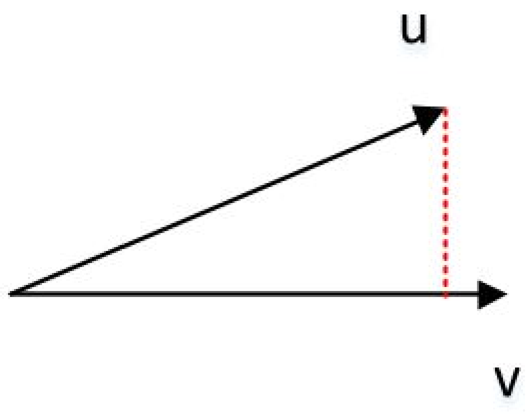
$$\sum_{i=1}^n a_i\vec{\mathbf{v}}_i=\vec{\mathbf{0}}$$

   一组向量 $\vec{\mathbf{v}}_1,\vec{\mathbf{v}}_2,\cdots,\vec{\mathbf{v}}_n$ 是线性无关的，当且仅当 $a_i=0,i=1,2,\cdots,n$ 时，才有

$$\sum_{i=1}^n a_i\vec{\mathbf{v}}_i=\vec{\mathbf{0}}$$

2. 一个向量空间所包含的最大线性无关向量的数目，称作该向量空间的维数。
3. 三维向量的点积：

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z=|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|\cos(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$$



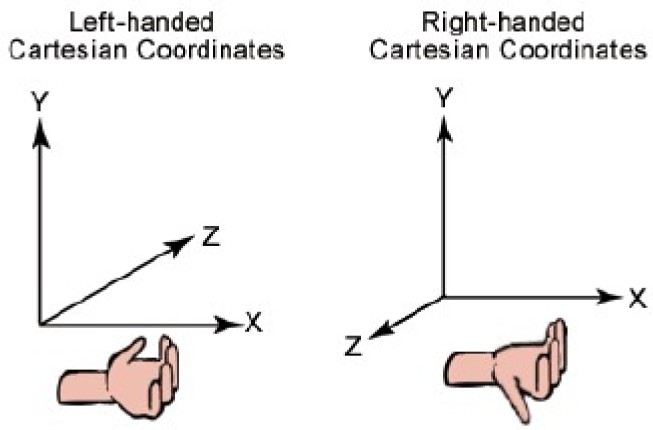

4. 三维向量的叉积：

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

其中 $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ 分别为 $x, y, z$ 轴的单位向量。

$$\vec{\mathbf{u}} = u_x \vec{\mathbf{i}} + u_y \vec{\mathbf{j}} + u_z \vec{\mathbf{k}}, \quad \vec{\mathbf{v}} = v_x \vec{\mathbf{i}} + v_y \vec{\mathbf{j}} + v_z \vec{\mathbf{k}}$$

- $\vec{\mathbf{u}}$ 和 $\vec{\mathbf{v}}$ 的叉积垂直于 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ 构成的平面，其方向符合右手规则。
- 叉积的模等于 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ 构成的平行四边形的面积
- $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$
- $\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}})\vec{\mathbf{v}} - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\vec{\mathbf{w}}$




5. 三维向量的混合积：

$$[\vec{\mathbf{u}}\ \vec{\mathbf{v}}\ \vec{\mathbf{w}}] = (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$$
$$= \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

- 其物理意义为：以 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ 为三个棱边所围成的平行六面体的体积。 当 $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ 构成右手系时，该平行六面体的体积为正号。

6. 两个向量的并矢：给定两个向量 $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \vec{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$ ，则向量的并矢记作：

$$\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m\end{bmatrix}$$

也记作 $\vec{\mathbf{x}}\otimes\vec{\mathbf{y}}$ 或者 $\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{y}}^T$

# 三、矩阵运算

1. 给定两个矩阵 $\mathbf{A}=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathbf{B}=(b_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ，定义：
   - 阿达马积`Hadamard product` （又称作逐元素积）：

$$\mathbf{A}\circ\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}b_{1,n}\\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}b_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1}b_{m,1} & a_{m,2}b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}b_{m,n}\end{bmatrix}$$

   - 克罗内积`Kronnecker product`：

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{1,1}\mathbf{B} & a_{1,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{1,n}\mathbf{B}\\ a_{2,1}\mathbf{B} & a_{2,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{2,n}\mathbf{B}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m,1}\mathbf{B} & a_{m,2}\mathbf{B} & \cdots & a_{m,n}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

2. 设 $\vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ 为 $n$ 阶向量， $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X}$ 为 $n$ 阶方阵，则：

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\vec{\mathbf{x}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\frac{\partial(\vec{\mathbf{x}}^T\vec{\mathbf{a}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\vec{\mathbf{a}}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{a}}\vec{\mathbf{b}}^T=\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{b}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{a}}^T=\vec{\mathbf{b}}\otimes\vec{\mathbf{a}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{X}}=\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\vec{\mathbf{a}})}{\partial\mathbf{X}}=\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{a}}$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{a}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}})}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{X}(\vec{\mathbf{a}}\otimes\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{b}}\otimes\vec{\mathbf{a}})$$

$$\frac{\partial[(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}})^T\mathbf{C}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}})]}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=\mathbf{A}^T\mathbf{C}(\mathbf{B}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}})+\mathbf{B}^T\mathbf{C}(\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{a}})$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{x}}^T\mathbf{A}\vec{\mathbf{x}})}{\partial\vec{\mathbf{x}}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\vec{\mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial[(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})^T\mathbf{A}(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})]}{\partial\mathbf{X}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)(\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}}^T$$

$$\frac{\partial(\vec{\mathbf{b}}^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\vec{\mathbf{c}})}{\partial\mathbf{X}}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}\vec{\mathbf{c}}^T+\mathbf{A}\mathbf{X}\vec{\mathbf{c}}\vec{\mathbf{b}}^T$$

3. 如果 $f$ 是一元函数，则：
   - 其逐元向量函数为：

$$f(\vec{\mathbf{x}})=(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n))^T$$

   - 其逐矩阵函数为：

$$f(\mathbf{X})=[f(x_{i,j})]$$

   - 其逐元导数分别为：

$$f'(\vec{\mathbf{x}})=(f'(x1),f'(x2),\cdots,f'(x_n))^T$$
$$f'(\mathbf{X})=[f'(x_{i,j})]$$

4. 各种类型的偏导数：
   - 标量对标量的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial v}$$

   - 标量对向量（$n$ 维向量）的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{v}}}=(\frac{\partial u}{\partial v_1},\frac{\partial u}{\partial v_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial v_n})^T$$

   - 标量对矩阵($m\times n$ 阶矩阵)的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{V}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial V_{1,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{1,n}}\\ \frac{\partial u}{\partial V_{2,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{2,n}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial u}{\partial V_{m,1}} & \frac{\partial u}{\partial V_{m,2}} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial V_{m,n}}\end{bmatrix}$$

   - 向量（$m$ 维向量）对标量的偏导数

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial v}=(\frac{\partial u_1}{\partial v},\frac{\partial u_2}{\partial v},\cdots,\frac{\partial u_m}{\partial v})^T$$

- 向量（$m$ 维向量）对向量 ($n$ 维向量) 的偏导数（雅可比矩阵，行优先）

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \vec{\mathbf{v}}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial v_1} & \frac{\partial u_m}{\partial v_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial v_n} \end{bmatrix}$$

> 如果为列优先，则为上面矩阵的转置

- 矩阵($m\times n$ 阶矩阵)对标量的偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial v}=\begin{bmatrix} \frac{\partial U_{1,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{1,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{1,n}}{\partial v} \\ \frac{\partial U_{2,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{2,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{2,n}}{\partial v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_{m,1}}{\partial v} & \frac{\partial U_{m,2}}{\partial v} & \cdots & \frac{\partial U_{m,n}}{\partial v} \end{bmatrix}$$

- 更复杂的情况依次类推。对于 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}}$。根据`numpy`的术语：
  - 假设 $\mathbf{u}$ 的 `ndim`（维度）为 $d_u$

> 对于标量，`ndim`为 0；对于向量，`ndim`为1；对于矩阵，`ndim`为 2
>
> - 假设 $\mathbf{v}$ 的 `ndim`为 $d_v$

  - 则 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}}$ 的 `ndim`为 $d_u+d_v$

5. 对于矩阵的迹，有下列偏导数成立：

$$\frac{\partial[tr(f(\mathbf{X}))]}{\partial \mathbf{X}}=(f'(\mathbf{X}))^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AXB})]}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AX}^T\mathbf{B})]}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{BA}$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{A}\otimes\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}}=tr(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{AXBX})]}{\partial \mathbf{X}}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T+\mathbf{B}^T\mathbf{X}\mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{X}^T\mathbf{BXC})]}{\partial \mathbf{X}}=(\mathbf{B}^T+\mathbf{B})\mathbf{XCC}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{C}^T\mathbf{X}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{C})]}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{C} + \mathbf{B}^T\mathbf{X}\mathbf{C}^T$$

$$\frac{\partial[tr(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{X}^T\mathbf{C})]}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\mathbf{X}\mathbf{B}^T + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}$$

$$\frac{\partial[tr((\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}+\mathbf{C})(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}+\mathbf{C}))]}{\partial\mathbf{X}} = 2\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{B}^T$$

6. 假设 $\mathbf{U}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ 是关于 $\mathbf{X}$ 的矩阵值函数（$f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{m\times n}$），且 $g(\mathbf{U})$ 是关于 $\mathbf{U}$ 的实值函数（$g:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$），则下面链式法则成立：

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{X}} = \left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{i,j}}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,2}} \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{1,n}} \\ \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,2}} \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{2,n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,1}} & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,2}} \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial x_{m,n}} \end{bmatrix} \\ &= \left(\sum_k\sum_l \frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial u_{k,l}}\frac{\partial u_{k,l}}{\partial x_{i,j}}\right) \\ &= tr\left[\left(\frac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}}\right)^T\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_{i,j}}\right]\end{aligned}$$