HW1

计 37　张馨元

习题 1.1

2(1)

内部：$\varnothing$
外部：$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \neq 1\}$
边界：$\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$
闭包：$\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$

3(3)

任意多个开集之并为开集：

证明. 设 k(k 为有限数或 $+\infty$) 个集合 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ...$ 均为开集
$\forall X \in \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i, \exists j \in [1,k], \text{s.t.} X \in \Omega_j$
因为 Ω_j 是开集，则 X 是 Ω_j 的内点，即：
$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \mathbf{B}(X,\delta) \subset \Omega_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$
故 X 也是 $\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$ 的内点
故 $\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i$ 也是开集

$\square$

有限个开集之交为开集:

证明. 设 k(k 为有限数) 个集合 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ...\Omega_k$ 均为开集
$\forall X \in \bigcap_{i=1}^{k} \Omega_i$，必有 $\forall i \in [1,k], X \in \Omega_i$
故 X 同时为 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, ...\Omega_k$ 的内点

故 $\exists \delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_k > 0$ s.t. $\forall i \in [1,k], B(X,\delta_i) \subset \Omega_i$
不妨设设 $\delta_1 = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_k)$，易知
$\forall j \in [1,k], B(X,\delta_1) \subseteq B(X,\delta_j) \subset \Omega_j$
故 $B(X,\delta_1) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \Omega_i$
故 X 也是 $\bigcap_{i=1}^{k} \Omega_i$ 的内点
故 $\bigcap_{i=1}^{k} \Omega_i$ 也是开集 $\square$

习题 1.2

4

(1)

$f(tx,ty,tz) = \frac{(tx)^3+(ty)^3+(tz)^3}{(tx)(ty)(tz)} = \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = f(x,y,z)$
故 f 是 0 次齐次式

(2)

$f(tx,ty,tz) = t^{1.5}\sqrt{x^3+y^3+z^3} + t^3xyz$
故 f 不是齐次式

(3)

$f(tx,ty,tz) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(tx_i)(tx_j) = t^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = t^2f(x,y,z)$
故 f 为 2 次齐次式

习题 1.3

1

(2)

$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}}$
因为 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$

故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

(4)

此极限不存在

考虑 (x,y) 分别从 $x>0, y>0$ 和 $x<0, y<0$ 两个方向趋近 $(0,0)$ 时的极限值，易知其值分别为 1 和-1，故极限不存在

(6)

此极限不存在

考虑沿曲线 $y = kx^3$ 趋近 $(0,0)$:

$\frac{x^3y}{x^6+y^2} = \frac{k}{1+k^2}$

显然，当 k 值不同时，趋于 $(0,0)$ 的极限值不同

故极限不存在

(8)

$1-\cos(xy) \sim \frac{1}{2}x^2y^2$

则 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{1}{2}x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})} = 0$

(10)

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-\sin(xy)}{xy-xy\cos(xy)} &= \lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{t(1-\cos t)} \\
&\xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{t\to 0} \frac{t-\sin t}{\frac{1}{2}t^3} \\
&\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\frac{3}{2}t^2} \\
&\xlongequal{\text{等价无穷小}} \frac{\frac{1}{2}t^2}{\frac{3}{2}t^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(12)

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y)-\arcsin(x^2y)}{x^6y^3} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\arcsin t}{t^3} \\
&\xlongequal{\text{泰勒展开}} \lim_{t\to 0}\frac{(t-\frac{1}{6}t^3)-(t+\frac{1}{6}t^3)+o(t^3)}{t^3} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{3}t^3+o(t^3)}{t^3} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$