HW6

计 37　张馨元

2023010872

51

设 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k \boldsymbol{\alpha}_k$

则 $\forall i \in [1, m], \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i = c_i \boldsymbol{\alpha}_i^2$

故 $c_i = \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2}$

故 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2} \boldsymbol{\alpha}_k$

52

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{ab+cd}{a^2+c^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

55

将 $\boldsymbol{\alpha}_1, ...\boldsymbol{\alpha}_m$ 扩展为酉空间 V 的一组正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1, ...\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_{m+1}, ..., \boldsymbol{\alpha}_n$

同理第 51 题可知，$\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2} \boldsymbol{\alpha}_k$

故 $\|\boldsymbol{\beta}\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta} \rangle|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2} \geq \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{|\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta} \rangle|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2}$

等号成立当且仅当 $\sum\limits_{k=m+1}^{n} \frac{|\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta} \rangle|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2} = 0$

当且仅当 $\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\beta} \rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2} \boldsymbol{\alpha}_k$

56

设 ε_{ij} 为第 i 行第 j 列为 1，其余位置为 0 的 n^2 维方阵
则易知 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, ..., \varepsilon_{nn}$ 为对角方阵所张成的空间 W 的一组正交基
故知其正交补 $W^{\perp} = V - M$ =span$\{\varepsilon_{ij}\}$, $i \neq j$
即为所有对角线上均为 0 的方阵所形成的空间

58

证明. 充分性：若 M 为酉方阵，则
$\forall A \in M_n(C) \|MA\|$ =tr$(A^* M^* MA) = tr(A^* A)$，T_M 保距，因而为酉变换
必要性：若 T_M 为酉变换，则 $\forall A \in M_n(C) \|MA\| = \|A\|$，即
tr$(A^* M^* MA)$ =tr$(M^* MAA^*)$ =tr(AA^*)
设 ε_{ij} 为第 i 行第 j 列为 1，其余位置为 0 的 n^2 维方阵
令 A 取遍 ε_{11} 到 ε_{nn}，可知 $(M^* M)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
即 $M^* M = I$
故 M 为酉方阵 □

60

$\forall A, B \in M_n(C), \langle MA, B \rangle$ =tr$\left(\overline{A^T}\,\overline{M^T} B\right) = \left\langle A, \overline{M^T} B \right\rangle$
故 T_M 的伴随变换 T_M^* 为 $B \mapsto \overline{M^T} B$

64

$\mathscr{A}$ 的方阵表示为 $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, 故 $\mathscr{A}^*$ 的方阵表示为 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -i & -1 \end{bmatrix}$
故 $\mathscr{A}^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 为 $\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -ix_1 - x_2 \end{bmatrix}$

66

$\langle P^{-1}AP, B\rangle = \operatorname{tr}\left(\overline{P^T}\,\overline{A^T}\,\overline{P^{-T}}B\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{A^T}\,\overline{P^{-T}}B\overline{P^T}\right) = \left\langle A, \overline{P^{-T}}B\overline{P^T}\right\rangle$

故 T_p^* 为 $B \mapsto \overline{P^{-T}}BP^T$