HW7

计 37　张馨元

2023010872

25

证明. 设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+x^{n-1}$，题中所说的基为

$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n]$

则在该基下 $\mathscr{A}$ 的方阵表示为 $A=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -c_0\\ 1 & \cdots & 0 & -c_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1}\end{bmatrix}$

则有 $\boldsymbol{\alpha}_i=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}(i\in[2,n])$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_i=\mathscr{A}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_1,i\in[1,n]$

故 $\forall\boldsymbol{x}\in V,\exists a_1,a_2,...,a_n\in F$,s.t.$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\mathscr{A}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_1=g(\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}_1$

故 $V=F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1$

$\mathscr{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1=\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}-c_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}-c_{i-1}\mathscr{A}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_1$

即 $f(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$

则 $f(\lambda)\boldsymbol{\alpha}_i=f(\mathscr{A})\mathscr{A}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\mathscr{A}^{n-1}f(\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$

故 $f(\lambda)$ 是一个 $\mathscr{A}$ 的一个零化多项式

若存在一个次数小于 n 的首一零化多项式 $g(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{k}b_i\lambda^i$, 则 $g(\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$

则有 $\mathscr{A}^k\boldsymbol{\alpha}_1=-\sum\limits_{i=0}^{k-1}b_i\mathscr{A}^i\boldsymbol{\alpha}_1=-\sum\limits_{i=0}^{k-1}b_i\boldsymbol{\alpha}_{i+1}=\boldsymbol{\alpha}_{k+1}(k\in[2,n])$ 与题设矛盾

故 $f(\lambda)$ 为最小多项式 □

28

证明. 若 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量，则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关

故 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha} & \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$ 是 F^2 的一组基，即 $F^2 = F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}, F^2$ 为循环空间
而对于非纯量变换 $\mathscr{A}, \mathscr{A} - \lambda\mathscr{I} \neq \boldsymbol{O}, \forall\lambda \in F$
故 $\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})) < 2$, 总能找到 $\boldsymbol{x} \in F^2$,s.t.$\boldsymbol{x}$ 不为 $\mathscr{A}$ 的特征向量
故对于非纯量变换,F^2 总是循环空间 $\square$

29

可知 $(A - 3I)(A + 2I) = O$，故最小多项式 $m(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$，由循环分解定理知 $\mathbb{R}^3 = F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1 \oplus F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_2$(两个空间的最小多项式分别为
$(\lambda - 3)$ 和 $(\lambda - 3)(\lambda + 2)$)
故没有循环向量

$$\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-3\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\-9\\12\end{bmatrix}$$

可求得 $\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 9\\-1 & -3 & -9\\3 & -6 & 12\end{bmatrix}\right) = 0$

故 $\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$ 生成的循环子空间为 $\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-3\\-6\end{bmatrix}\right)$

30

$$A\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, A^2\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}1-i\\-3\\-1\end{bmatrix}, A^3\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}1-4i\\2i-7\\-4\end{bmatrix}$$

$\det\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha} & A\boldsymbol{\alpha} & A^2\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}\right) = 1$ 且 $A^3\boldsymbol{\alpha} = (2 + 2i)\boldsymbol{\alpha} - (2i + 5)A\boldsymbol{\alpha} + 4A^2\boldsymbol{\alpha}$
故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小零化子为 $m(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + (2i + 5)\lambda - 2(i + 1)$

$$A\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}1\\0\\i\end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最小零化子为 $m(\lambda) = \lambda - 1$

31

证明. 不妨设 $\mathscr{A}^2$ 的循环向量为 $\boldsymbol{\alpha}$
则 $\forall \boldsymbol{x} \in F^n, \exists f(\lambda)$,s.t.$f(\mathscr{A}^2)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}$
令 $g(\mathscr{A}) = f(\mathscr{A}^2)$，则 $\forall \boldsymbol{x} \in F^n, \exists g(\lambda)$,s.t.$g(\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}$
故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\mathscr{A}$ 的循环向量 $\square$

反过来不对

证明. 考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$, $A^2 = I$ 显然 A 有循环变量而 A^2 没有, 对应的线性变换有对应结论 $\square$

32

对于可对角化的方阵，其最小多项式为 $m(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i)$
若 $\mathscr{A}$ 有循环向量，则 $m(\lambda) = f(\lambda)(f(\lambda)$ 为特征多项式)
故 deg$(m(\lambda))$ =deg$(f(\lambda))$，即 $k = n$
故 $\mathscr{A}$ 有 n 个互异的特征值

33

证明. 取 $\mathscr{A}$ 的一个循环向量 $\boldsymbol{\alpha}$
因为 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} \in V$，故有 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i \mathscr{A}^i \boldsymbol{\alpha} = p(\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}$
由于 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, 易知 $\mathscr{A}^k\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}^k$, 故
$\mathscr{B}\mathscr{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}^k\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}^k p(\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha} = p(\mathscr{A})\mathscr{A}^k\boldsymbol{\alpha}$
故 $(\mathscr{B} - p(\mathscr{A}))\,\mathscr{A}^k\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$
而 $\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, ..., \mathscr{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性独立
故 $\dim(\mathrm{Ker}(\mathscr{B} - P(\mathscr{A}))) = n$
故 $\mathscr{B} = p(\mathscr{A})$ 命题得证 $\square$

35

证明. $A^2 = A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = O$

故 $F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1 = \{a_0\boldsymbol{\alpha}_1 | a_0 \in F\}$，维数为 1

自然 $F^2 \neq F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1$

设 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$

若 $x = 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_2 \parallel \boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_2 \cap F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1$

若 $x \neq 0$，则 $A\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}0\\x\end{bmatrix} \parallel \boldsymbol{\alpha}_1, \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_2 \cap F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1$

故 $\forall \boldsymbol{\alpha}_2 \neq \mathbf{0}, F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_2 \cap F[\mathscr{A}]\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$ □

37

证明. $\forall \boldsymbol{y} \in fV, \exists \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + ... + \boldsymbol{x}_n (\boldsymbol{x}_i \in V_i, i \in [1, s])\text{s.t.}\boldsymbol{y} = f(\mathscr{A})\boldsymbol{x}$

故 $\boldsymbol{y} = f(\mathscr{A})\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i = \sum_{i=1}^{n} f(\mathscr{A})\boldsymbol{x}_i$

因此 $fV = fV_1 + fV_2 + ... + fV_s$

下面再证此和为直和：

设 $\boldsymbol{v} \in fV_i \cap fV_j, i \neq j$

由于 $\boldsymbol{v} \in fV_i$，有 $\boldsymbol{v} = f(\mathscr{A})\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \in V_i$

而又有 $\boldsymbol{v} \in fV_j$，则 $\boldsymbol{v}_1 \in V_j$

故 $\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$

故 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

故 $fV = fV_1 \oplus fV_2 \oplus ... \oplus fV_s$

□

38

证明. 令 $p(\lambda) = (m(\lambda), f(\lambda))$

若 $q(\lambda)$ 为 $f\boldsymbol{\alpha}$ 的零化多项式，即 $q(\lambda)f(\lambda)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，则知 $q(\lambda)f(\lambda)$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的零化多项式

因此 $q(\lambda)f(\lambda)$ 中必含因子 $m(\lambda)$
故 $q(\lambda)$ 最小为 $\frac{m(\lambda)}{p(\lambda)}$
同理可知 $f\boldsymbol{\beta}$ 的最小多项式也为 $\frac{m(\lambda)}{p(\lambda)}$，命题得证 $\square$

39

求出特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^3$
由于 $A\neq O\wedge A^2=O$ 可知 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-1)^2$
因此对 A 进行循环分解，有 $m_1=m=(\lambda-1)^2, m_2=\lambda-1$
故 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 应为特征向量，相应地，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不为特征向量
因此可取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

42

对 A 进行循环分解，得 $A=P^{-1}\mathrm{diag}(C(m_1),C(m_2),...,C(m_s))\,P$
由于 A 的特征值仅有实数，故 m_i 均为实多项式, $C(m_i)$ 也均为实矩阵
故 A 相似于实矩阵 $\mathrm{diag}(C(m_1),C(m_2),...,C(m_s))$

47

证明. 必要性：
若 V 中每个非零向量均为循环向量，且 $\mathscr{A}$ 的特征多项式在 F 上可约
由于最小多项式和特征多项式的因式相同，则可设最小多项式
$m(\lambda)=\prod\limits_{i=1}^{s}p_i(\lambda)^{r_i}, p_i(\lambda)$ 均不可约
根据空间准素分解定理知，$A\simeq\mathrm{diag}(P_1,P_2,...,P_s)$，其中 P_i 的最小多项式为 $p_i(\lambda)^{r_i}$
又根据循环分解定理，可知 $P_i\simeq diag(C_{i1},C_{i2},...,C_{is_i})$
取 C_{11} 的循环向量 $\boldsymbol{\alpha}$，由于 C_{11} 是 V 的真子空间，$\boldsymbol{\alpha}$ 不是 V 的循环向量，与题设矛盾
故必要性得证

充分性：

若 $\mathscr{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 在 F 上不可约，易知最小多项式 $m(\lambda)=f(\lambda)$

故 $\forall \boldsymbol{x}\in F^n$，有 $m(\lambda)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

同时任意次数比 $m(\lambda)$ 低的多项式 $p(\lambda)$，由于

$\mathrm{Ker}(m)\cap\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Ker}((m,p))=\mathrm{Ker}(1)=\{\mathbf{0}\}$

故 $p(\lambda)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

即 $\forall \boldsymbol{x}\in F^n$,$m(\lambda)$ 均为其最小多项式，由循环向量的定义知

$\deg(F[\mathscr{A}]\boldsymbol{x})=n$

故 $F[\mathscr{A}]\boldsymbol{x}=F^n$

故充分性得证 $\square$