HW1

计 37　张馨元

2023010872

4

(1)

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$$

考虑多项式 $(A-I)(A-2I)$：

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} = O$$

故其最小多项式为 $(A-I)(A-2I)$

(2)

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)^2$$

考虑多项式 $(A-I)(A-2I)$：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \neq O$$

故最小多项式为 $(A-I)(A-2I)$

(3)

$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$
故最小多项式为 $A^2 + I$

(4)

x $\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^2(x-2)^2$

考虑 $A(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \neq O$

考虑 $A^2(A - 2I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq O$

考虑 $A(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq O$$

故最小多项式即是 $A^2(A-2I)^2$

(5)

$\det(xI-A) = x^2(x+2)(x-2)$

考虑

$$A(A+2I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = O$$

故最小多项式为 $A(A+2I)(A-2I)$

5

证明. 设最小多项式为 $m(\lambda)$

因为 $\mathscr{A}^k = O$

故 $m(\lambda)|\lambda^k$

故可设 $m(\lambda) = \lambda^l (l \leq k)$

同时，由于特征多项式和最小多项式拥有相同的根，故可设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $\lambda^p (p \leq n)$

故 $l \leq p \leq n$

故 $\mathscr{A}^n = m(\mathscr{A})\mathscr{A}^{n-l} = O$ □

6

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7

最小多项式为 λ^{n+1}

证明. 对于任何不超过 n 次的多项式，在 $(n+1)$ 次求导后其值必然为 0
故 $\mathscr{D}^{n+1} = O$
故可设最小多项式为 $\lambda^l (l \leq n+1)$ 考虑 $\mathscr{D}^n$ 和多项式 x^n
则 $\mathscr{D}^n(x^n) = n! \neq 0$
故 $l > n$
故最小多项式为 λ^{n+1} □

8

易知 $\mathscr{A}$ 的方阵表示为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
故 $\det(xI - A) = x(x-1)$
故最小多项式为 $\lambda(\lambda - 1)$

9

证明. $T^2(B) = T(T(B)) = T(AB) = A(AB) = A^2 B$
归纳可得 $T^k(B) = A^k B (k \in \mathbb{N})$
则对于任一多项式函数 $f(x) = \sum\limits_i a_i x^i$，有
$f(T)(B) = \sum\limits_i a_i T^i(B) = \sum\limits_i a_i A^i B = f(A)B$
故 $m(T)B = O \iff m(A) = O$
故 T 与 A 的最小多项式相同 □

10

不一定相同
考虑 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

则 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

则 AB 的最小多项式为 λ^2，而 BA 的最小多项式为 λ

故 AB 和 BA 的最小多项式不一定相同

11

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-6 & 3 & 2 \\ -4 & x+1 & 2 \\ -10 & 5 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2+1) = m(x)$$

考虑 $A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix}$

可求得 $\mathrm{Ker}(A-2I)$ 的一组基为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\alpha_1$$

则 $\mathscr{A}_1$ 在基 α_1 下的方阵表示为 2

考虑 $A^2 + I = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$

故 $\mathrm{Ker}(A^2+I)$ 的一组基为 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3\alpha_2 + 5\alpha_3$$

$$A\alpha_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = -2\alpha_2 - 3\alpha_3$$

故 $\mathscr{A}_2$ 在基 α_2 和 α_3 下的方阵表示为 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$