HW5

计 37　张馨元

2023010872

64

(1)

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix}1 & \lambda\\ \lambda & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - \lambda r_1} \begin{bmatrix}1 & \lambda\\ 0 & -\lambda^2\end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to -r_2]{c_2 - \lambda c_1} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix}\lambda^2 - 1 & \lambda + 1\\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 1\end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix}\lambda + 1 & \lambda^2 - 1\\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \lambda + 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2-(\lambda-1)c_1\\ r_2 \to -r_2}]{r_2 - (\lambda+1) r_1} \begin{bmatrix}\lambda + 1 & 0\\ 0 & (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2)\end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda + 5\end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ \lambda & \lambda + 5\end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_2 - c_1} \begin{bmatrix}\lambda & -\lambda\\ \lambda & 5\end{bmatrix} \xrightarrow[c_1 \leftrightarrow c_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix}5 & \lambda\\ -\lambda & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to r_2 + \frac{\lambda}{5} r_1} \begin{bmatrix}5 & \lambda\\ 0 & \lambda + \dfrac{\lambda^2}{5}\end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_2 - \frac{\lambda}{5} c_1} \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & \lambda + \dfrac{\lambda^2}{5}\end{bmatrix}$$

(4)

$$
\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2\to r_1+r_2}
\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda^2-1 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{c_2\to c_2-(\lambda-3)c_1}
$$

$$
\begin{bmatrix} \lambda^2-1 & (\lambda^2-1)(3-\lambda) \\ \lambda^2-1 & 4(\lambda-1) \end{bmatrix}
\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2]{r_2\leftrightarrow r_1}
\begin{bmatrix} 4(\lambda-1) & \lambda^2-1 \\ (\lambda^2-1)(3-\lambda) & \lambda^2-1 \end{bmatrix}
\xrightarrow{c_2\to \frac{(\lambda+1)}{4}c_1+c_2}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4(\lambda-1) & 0 \\ (\lambda^2-1)(3-\lambda) & \dfrac{(\lambda+1)(\lambda-1)^3}{4} \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_2\to r_2-\frac{(\lambda+1)(3-\lambda)}{4}r_1}
$$

$$
\begin{bmatrix} 4(\lambda-1) & 0 \\ 0 & \dfrac{(\lambda+1)(\lambda-1)^3}{4} \end{bmatrix}
$$

(5)

$$
\begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^2 \\ 3\lambda-1 & 3\lambda^2-1 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_2\to r_2-3r_3]{r_1\to r_1-r_3}
\begin{bmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2\to r_2-r_1}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{c_2\to c_2-c_1 \\ c_3\to c_3-\frac{\lambda^2-\lambda}{2}c_1}]{r_2\to r_2-\frac{\lambda-1}{2}r_1}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & -\dfrac{\lambda}{2}(\lambda-1)^2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{c_3\to \frac{\lambda-1}{2}c_2}
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{c_2\leftrightarrow c_3 \\ c_1\to \frac{c_1}{2}}]{c_2\to(\lambda-1)c_3}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

(6)

$$
\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{c_1 \leftrightarrow c_2}
\begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda-2 \\ \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[r_3 \to r_3 + (\lambda-2) r_2]{r_2 \to r_2 + (\lambda-2) r_1}
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda-2 \\ 0 & -1 & (\lambda-2)^2 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{r_1 \to -r_1 \\ r_2 \to -r_2}]{c_3 \to c_3 + (\lambda-2)c_1 + (\lambda-2)^2 c_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 \end{bmatrix}
$$

66

(1)

$$
\lambda I - A_1 = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 & 5 \\ -2 & \lambda-6 & 10 \\ -1 & -2 & \lambda+3 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}
\begin{bmatrix} -1 & -2 & \lambda+3 \\ -2 & \lambda-6 & 10 \\ \lambda-3 & -2 & 5 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 2c_1 \\ c_3 + (\lambda+3)c_1 \\ c_1 \to -c_1}]{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + (\lambda-3) r_1}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2(\lambda-2) \\ 0 & -2\,(\lambda-2) & \lambda^2-4 \end{bmatrix}
\xrightarrow[c_3 \to c_3 + 2c_2]{r_3 \to r_3 + 2r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}
$$

(2)

$$
\lambda I - A_2 = \begin{bmatrix} \lambda-6 & -20 & 34 \\ -6 & \lambda-32 & 51 \\ -4 & -20 & \lambda+32 \end{bmatrix}
\xrightarrow{r1 \leftrightarrow r_3}
\begin{bmatrix} -4 & -20 & \lambda+32 \\ -6 & \lambda-32 & 51 \\ \lambda-6 & -20 & 34 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 5c_1 \\ c_3 \to c_3 + \frac{\lambda+32}{4} c_1 \\ r_1 \to \frac{-r_1}{4}}]{\substack{r_2 \to r_2 - \frac{3}{2} r_1 \\ r_3 \to r_3 + \frac{\lambda-6}{4} r_1}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -\dfrac{3}{2}\lambda+3 \\ 0 & -5\lambda+10 & \dfrac{1}{4}(\lambda-2)(\lambda+28) \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 + \frac{3}{2} c_2 \\ c_3 \to 4c_3}]{r_3 \to r_3 + 5r_2}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}
$$

(3)

$$\lambda I - B_1 = \begin{bmatrix} \lambda-6 & -6 & 15 \\ -1 & \lambda-5 & 5 \\ -1 & -2 & \lambda+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & \lambda+2 \\ -1 & \lambda-5 & 5 \\ \lambda-6 & -6 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 2c_1 \\ c_3 \to c_3 + (\lambda+2)c_1}]{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 + (\lambda-6) r_1}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 2(3-\lambda) & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 + c_2 \\ r_2 \to -r_2}]{r_3 \to r_3 + 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\lambda I - B_2 = \begin{bmatrix} \lambda-37 & 20 & 4 \\ -34 & \lambda+17 & 4 \\ -119 & 70 & \lambda+11 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 4 & 20 & \lambda-37 \\ 4 & \lambda+17 & -34 \\ \lambda+11 & 70 & -119 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 5c_1 \\ c_3 \to c_3 - \frac{\lambda-37}{4}}]{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - \frac{\lambda+11}{4} r_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ 0 & 5(3-\lambda) & -\frac{1}{4}(\lambda-3)(\lambda-23) \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 + c_2 \\ c_1 \to \frac{c_1}{4} \\ r_3 \to -4r_3}]{r_3 \to r_3 + 5r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{bmatrix}$$

(5)

$$\lambda I - C_1 = \begin{bmatrix} \lambda-4 & -6 & 15 \\ -1 & \lambda-3 & 5 \\ -1 & -2 & \lambda+4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & \lambda+4 \\ -1 & \lambda-3 & 5 \\ \lambda-4 & -6 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 2c_1 \\ c_3 \to c_3 + (\lambda+4)c_1 \\ r_1 \to -r_1}]{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to (\lambda-4) r_1 + r_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 2(1-\lambda) & \lambda^2-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[c_3 \to c_3 + c_2]{c_3 \to r_3 + 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

(6)

$$\lambda I - C_2 = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 3 & -3 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ 1 & 4 & \lambda-8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & \lambda-8 \\ 2 & \lambda+6 & -13 \\ \lambda-1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 4c_1 \\ c_3 \to c_3 - (\lambda-8)c_1}]{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - (\lambda-1)r_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 3-2\lambda \\ 0 & 7-4\lambda & -\lambda^2+9\lambda-11 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 \to -r_2}]{r_3 \to r_3 + 4r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda^2-\lambda-1 \\ 0 & \lambda-2 & 3-2\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 - (\lambda^2-\lambda-1)c_2 \\ c_3 \to -c_3}]{r_3 \to r_3 - (\lambda-2)r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$$

(7)

$$\lambda I - C_3 = \begin{bmatrix} \lambda+13 & 70 & -119 \\ 4 & \lambda+19 & -34 \\ 4 & 20 & \lambda-35 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 4 & 20 & \lambda-35 \\ 4 & \lambda+19 & -34 \\ \lambda+13 & 70 & -119 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 5c_1 \\ c_3 \to c_3 - \frac{\lambda-35}{4}c_1 \\ c_1 \to \frac{c_1}{4}}]{\substack{r_r \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - \frac{\lambda+13}{4}r_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 5(1-\lambda) & \frac{1}{4}(1-\lambda)(\lambda-21) \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 + c_2 \\ r_3 \to -4r_3}]{r_3 \to r_3 + 5r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

(8)

$$\lambda I - D_1 = \begin{bmatrix} \lambda-14 & 2 & 7 & 1 \\ -20 & \lambda+2 & 11 & 2 \\ -19 & 3 & \lambda+9 & 1 \\ 6 & -1 & -3 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & \lambda-14 \\ 2 & \lambda+2 & 11 & -20 \\ 1 & 3 & \lambda+9 & -19 \\ \lambda-1 & -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 2c_1 \\ c_3 \to c_3 - 7c_1 \\ c_4 \to c_4 - (\lambda-14)c_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}]{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1 \\ r_4 \to r_4 - (\lambda-1)r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & -\lambda-5 \\ 0 & \lambda-2 & -3 & 8-2\lambda \\ 0 & 1-2\lambda & 4-7\lambda & -\lambda^2+15\lambda-8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 - (\lambda+2)c_2 \\ c_4 \to c_4 + (\lambda+5)c_2 \\ c_3 \to c_2 + c_3 \\ c_3 \leftrightarrow c_4}]{\substack{r_3 \to r_3 - (\lambda-2)r_2 \\ r_4 \to r_4 - (1-2\lambda)r_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 & 2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_4 \to c_4 + (\lambda+1)c_3 \\ r_4 \to -r_4}]{r_4 \to r_4 + (\lambda-1)r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 \end{bmatrix}$$

(9)

$$\lambda I - D_2 = \begin{bmatrix} \lambda-4 & -10 & 19 & -4 \\ -1 & \lambda-6 & 8 & -3 \\ -1 & -4 & \lambda+6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r2 \to -r_2 \\ r_1 \to -r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -\lambda-6 & 2 \\ 1 & 6-\lambda & -8 & 3 \\ \lambda-4 & -10 & 19 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - 4c_1 \\ c_3 \to c_3 + (\lambda+6)c_1 \\ c_4 \to c_4 - 2c_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_4}]{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - (\lambda-4)r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 6-4\lambda & \lambda^2+2\lambda-5 & 4-2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 4r_4]{\substack{r_3 \to r_3 + (4\lambda-6)r_2 \\ r_4 \to r_4 + (\lambda-2)r_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

(10)

$$\lambda I - D_3 = \begin{bmatrix} \lambda-41 & 4 & 26 & 7 \\ -14 & \lambda+13 & 91 & 18 \\ -40 & 4 & \lambda+25 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\to r_1-r_3} \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ -14 & \lambda+13 & 91 & 18 \\ -40 & 4 & \lambda+25 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1\to -r_1]{c_1\leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 18 & \lambda+13 & 91 & -14 \\ 8 & 4 & \lambda+25 & -40 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3\to c_3-(\lambda-1)c_1 \\ c_4\to c_4+(\lambda-1)c_1 \\ r_2\leftrightarrow r_3}]{\substack{r_2\to r_2-18r_1 \\ r_3\to r_3-8r_1 \\ r_4\to r_4-(\lambda-1)r_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 33-7\lambda & 8\lambda-48 \\ 0 & \lambda+13 & 109-18\lambda & 18\lambda-32 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{c_3\to c_3-\frac{33-7\lambda}{4}c_2 \\ c_4\to c_4-(2\lambda-12)c_2 \\ r_2\to \frac{r_2}{4} \\ r_3\to 4r_3 \\ r_3\leftrightarrow r_4}]{r_3\to r_3-\frac{\lambda+13}{4}r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda-1)^2 & (\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & 7(\lambda-1)^2 & -8\lambda^2+16\lambda+496 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3\leftrightarrow r_4 \\ c_3\leftrightarrow c_4}]{r_4\to r_4+8r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 504 & -(\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & -(\lambda-1)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3\to \frac{r_4}{504} \\ r_4\to 504r_4}]{\substack{r_4\to r_4-\frac{(\lambda-1)^2}{504}r_3 \\ c_4\to c_4+\frac{(\lambda-1)^2}{504}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda-503) \end{bmatrix}$$

67

由 66 题的计算结果可知，$A_1 \sim A_2, B_1 \sim B_2, C_1 \sim C_3$

70

由 66 题的计算结果可知，A_i 的行列式因子为 $1, \lambda-2, (\lambda-2)^3$

B_i 的行列式因子为 $1, \lambda-3, (\lambda-3)^3$
C_1, C_3 的行列式因子为 $1, \lambda-1, (\lambda-1)^3$
C_2 的行列式因子为 $1, 1, (\lambda-1)^3$
D_1 的行列式因子为 $1, 1, \lambda-1, (\lambda-1)^4$
D_2 的行列式因子为 $1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-2)^4$
D_3 的行列式因子为 $1, 1, 1, (\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda-503)$

71

除了 D_3 外，各方阵的初等因子组在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上相同
A_i 的初等因子组为 $\lambda-2, (\lambda-2)^2$
B_i 的初等因子组为 $\lambda-3, (\lambda-3)^2$
C_1, C_3 的初等因子组为 $\lambda-1, (\lambda-1)^2$
C_2 的初等因子组为 $(\lambda-1)^3$
D_1 的初等因子组为 $\lambda-1, (\lambda-1)^3$
D_2 的初等因子组为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$
D_3 在 $\mathbb{Q}$ 上的初等因子组为 $(\lambda-1)^2, \lambda^2-2\lambda-503$, 在 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的初等因子组为 $(\lambda-1)^2(\lambda-1-6\sqrt{14}), (\lambda-1+6\sqrt{14})$

72

有理标准型、Jordan 标准型和初等因子友阵型分别为：

$$C = \begin{bmatrix} C(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(d_r) \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} J(p_1^{k_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & J(p_s^{k_s}) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} C(p_1^{k_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & C(p_s^{k_s}) \end{bmatrix}$$

故在域 $\mathbb{Q}$ 上

(1)

A_i 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & & -4 \\ & 1 & 4 \end{bmatrix}$

B_i 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & & -9 \\ & 1 & 6 \end{bmatrix}$

C_1, C_3 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & -1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$

C_2 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & -3 \\ & 1 & 3 \end{bmatrix}$

D_1 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & -3 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$

D_2 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$

D_3 的有理标准型为 $\begin{bmatrix} & & & 503 \\ 1 & & & -1004 \\ & 1 & & 498 \\ & & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(2)

A_i 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$

B_i 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & 1 & 3 \end{bmatrix}$

C_1, C_3 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}$

C_2 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D_1 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D_2 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$

D_3 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & & 503 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(3)

A_i 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & & -4 \\ & 1 & 4 \end{bmatrix}$

B_i 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & & -9 \\ & 1 & 6 \end{bmatrix}$

C_1, C_3 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & -1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}$

C_2 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & -3 \\ & 1 & 3 \end{bmatrix}$

D_1 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & -3 \\ & & 1 & 3 \end{bmatrix}$

D_2 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$

D_3 的初等因子友阵型为 $\begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & & 503 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$

73

除了 D_3 外，其余方阵的答案均与 72 题相同

D_3 的有理标准型不变，而 Jordan 标准型变为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1+6\sqrt{14} & \\ & & & 1-6\sqrt{14} \end{bmatrix}$$

初等因子友阵型变为 $\begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 1+6\sqrt{14} & \\ & & & 1-6\sqrt{14} \end{bmatrix}$