HW5

计 37　张馨元

2023010872

习题 1.8

1

(1)

$J(\boldsymbol{O}) = \begin{bmatrix} -2x\sin(x^2+y^2) & -2y\sin(x^2+y^2) \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

$H(\theta\boldsymbol{X}) =$

$\begin{bmatrix} -2\sin[\theta^2(x^2+y^2)] - 4\theta^2x^2\cos[\theta^2(x^2+y^2)] & -4\theta^2xy\cos[\theta^2(x^2+y^2)] \\ -4\theta^2xy\cos[\theta^2(x^2+y^2)] & -2\sin[\theta^2(x^2+y^2)] - 4\theta^2y^2\cos[\theta^2(x^2+y^2)] \end{bmatrix}$

故 O 点处带有一阶 Lagrange 余项的泰勒展开式为

$z(\boldsymbol{X}) = z(\boldsymbol{O}) + J(\boldsymbol{O})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T H(\theta\boldsymbol{X})\boldsymbol{X} =$

$1 - (x^2+y^2)\sin[\theta^2(x^2+y^2)] - 2\theta^2(x^2+y^2)^2\cos[\theta^2(x^2+y^2)], \theta \in (0,1)$

(2)

$J(\boldsymbol{O}) = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2-y^2} & -2ye^{x^2-y^2} \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = [0, 0]$

$H(\theta\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} 2(2\theta^2x^2+1)e^{\theta^2(x^2-y^2)} & -4\theta^2xye^{\theta^2(x^2-y^2)} \\ -4\theta^2xye^{\theta^2(x^2-y^2)} & 2(2\theta^2y^2-1)e^{\theta^2(x^2-y^2)} \end{bmatrix}$

故 O 点处带有一阶 Lagrange 余项的泰勒展开式为

$z(\boldsymbol{X}) = z(\boldsymbol{O}) + J(\boldsymbol{O})\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T H(\theta\boldsymbol{X})\boldsymbol{X} =$

$1 + (x^2-y^2)[2\theta^2(x^2-y^2)+1]e^{\theta^2(x^2-y^2)}, \theta \in (0,1)$

(3)

$J(\boldsymbol{O})=\left[\frac{1}{1+x+y+z}\quad frac11+x+y+z\quad \frac{1}{1+x+y+z}\right]\Big|_{(0,0)}=[1,1,1]$

$H(\theta\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]}^2 & \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]^2} & \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]^2}\\ \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]}^2 & \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]^2} & \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]^2}\\ \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]}^2 & \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]^2} & \frac{-1}{[1+\theta(x+y+z)]^2}\end{bmatrix}$

故 $\boldsymbol{O}$ 点处带有一阶 Lagrange 余项的泰勒展开式为

$u(\boldsymbol{X})=z(\boldsymbol{O})+J(\boldsymbol{O})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^TH(\theta\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}=x+y+z-\frac{(x+y+z)^2}{2[1+\theta(x+y+z)]^2},\theta\in(0,1)$

习题 1.9

1

(2)

令 $J=\left[e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)\quad 2e^{2x}(y+1)\right]=\boldsymbol{O}$，解得 $x=\frac{1}{2},y=-1$

$H(\frac{1}{2},-1)=\begin{bmatrix}4e^{2x}[x+(y+1)^2] & 4(y+1)e^{2x}\\ 4(y+1)e^{2x} & 2e^{2x}y\end{bmatrix}\Bigg|_{(\frac{1}{2},-1)}=\begin{bmatrix}2e & 0\\ 0 & 2e\end{bmatrix}$

H 是正定矩阵, 故 $(\frac{1}{2},-1)$ 是唯一极值点，且为极小值, 值为 $\frac{-e}{2}$

4

(2)

最值可能在区域内部和边界处取到，故分别予以讨论：

1. 内部：
   令 $\nabla z=\left[y(4-2x-y)\quad x(4-x-2y)\right]=\boldsymbol{O}$，解得
   $(x,y)=(0,0)\vee(4,0)\vee(0,4)\vee(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$
   $z=0\vee 0\vee 0\vee\frac{64}{27}$

2. $x+y=6$:
   $z=2x(x-6)$
   因为 $y\geq 0,x\geq 1$，有 $x\in[1,6]$

故当 $x=3$ 时取最小值 -18, $x=6$ 时取最大值 0

3. $y=0$:
   $z\equiv 0$

4. $x=1$:
   $z=y(3-y)$
   因为 $y\geq 0, x+y\leq 6$，有 $y\in[0,5]$
   故当 $y=\frac{3}{2}$ 时取最大值 $\frac{9}{4}$, $y=\frac{5}{2}$ 时取最小值 -10

综上所述，函数在 $(3,3)$ 处取最小值-18，在 $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 处取最大值 $\frac{64}{27}$

7

(1)

考虑 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)$
解方程 $\nabla L=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases} x=\frac{ab^2}{a^2+b^2} \\ y=\frac{a^2b}{a^2+b^2} \\ \lambda=\frac{-2a^2b^2}{a^2+b^2} \end{cases}$$

故此问题只有一个极值
注意到此问题的极值等价于平面上一条直线上的点到原点距离的平方的极值，由图像可知存在极小值而不存在极大值
条件极小值为 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

(4)

考虑 Lagrange 函数
$L(x,y,z,\lambda,\varphi)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y-z-1)+\varphi(x+y+z)$

解方程 $\nabla L=\boldsymbol{O}$ 得

$$\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{4} \\ z=-\frac{1}{2} \\ \lambda=-\frac{3}{4} \\ \varphi=\frac{1}{4} \end{cases}$$

故此问题只有一个极值

注意到此问题的极值等价于空间中一个平面上的点到原点距离的平方的极值，由图像可知存在极小值而不存在极大值

条件极小值为 $\frac{3}{8}$