HW2

计 37　张馨元

2023010872

12

A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

由定理 7.6 系 6 知，A 可以分解为幂零矩阵和相似于对角矩阵的两个矩阵之和：$A=D+N$

相应地, $\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$

$A-I=\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\2&2&-1\end{bmatrix}$，故 $\mathrm{Ker}(A-I)=$span$\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$

$(A-2I)^2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\2&-2&0\end{bmatrix}$，故 $\mathrm{Ker}(A-2I)=$span$(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix})$

故 $D=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\2&0&2\end{bmatrix}$

$N=A-D=\begin{bmatrix}2&0&-1\\2&0&-1\\4&0&-2\end{bmatrix}$

15

$T^2(B)=A(AB-BA)-(AB-BA)A=A^2B-2ABA+BA^2$

$T^3(B) = A(A^2B - 2ABA + BA^2) - (A^2B - 2ABA + BA^2)A =$
$A^3B - 3A^2BA + 3ABA^2 - BA^3$
可见，随着 T 作用的次数增加，$T^n(B)$ 中 A 的最低次数上升
由于 A 是幂零矩阵，终存在 n 使得 $T^n(B)$ 中最低次数的为 A^k 且 $A^k = \boldsymbol{O}$
故 T 为幂零变换

16

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17

证明. $\forall x \in W \subset V$, 根据直和的定义有 $x = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i, x_i \in W_i$，即
$x \in (W_1 \cap W) \oplus \cdots \oplus (W_s \cap W)$
故 $W \subseteq (W_1 \cap W) \oplus \cdots \oplus (W_s \cap W)$
而 $\forall x \in (W_1 \cap W) \oplus \cdots \oplus (W_s \cap W)$，可设 $x = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i, x_i \in W_i \cap W$，显然仍有 $x \in W$
故 $W \supseteq (W_1 \cap W) \oplus \cdots \oplus (W_s \cap W)$
故 $W = (W_1 \cap W) \oplus \cdots \oplus (W_s \cap W)$ □

18

证明. 设 $\mathscr{A}$ 的方阵表示为 A
取对角线上元素互不相同的对角矩阵 B，则 $AB = BA$
则 $\boldsymbol{e}_i^T AB\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i^T BA\boldsymbol{e}_j$
故 $b_{jj}a_{ij} = b_{ii}a_{ij}$
而 $b_{ii} \neq b_{jj}$
故 $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

即 A 为对角矩阵
若 A 的对角线不全相等，不妨设 $a_{11} \neq a_{22}$
由于 A 和任意可对角化的矩阵可交换，我们可取可对角化的矩阵 B，且令 $b_{12} \neq 0$
对于 AB 中，第一行第二列的元素为 $b_{12}a_{11}$，而 BA 中，第一行第二列的元素为 $b_{12}a_{22}$
则有 $b_{12}a_{11} \neq b_{12}a_{22}$，和 $AB = BA$ 矛盾
故 A 的对角线元素全相等，即 A 为纯量变换 □

19

证明. 对于 1 维任意多两两可交换的线性变换，显然可以同时化为上三角形
不妨设 $n-1$ 维及更低维度的任意多两两可换的线性变换能在同一组基下化为上三角形
考虑 n 维任意多两两可换的线性变换，不妨设它们为 $A_1, A_2, ..., A_k$
若 $A_r(r \in [1,k])$ 均有所有的特征值相等，由 22 题可知它们的根空间都正好是 $\mathbb{C}^n$，自然有共同的特征向量
否则，取特征值不全相同的 A_1, 考虑 A_1 的一个特征子空间 V_λ，取其一组基 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)$
$\forall i \in [2,k], \forall j \in [1,m]$, 易知 $A_1A_i\boldsymbol{\alpha}_j = A_iA_1\boldsymbol{\alpha}_j = \lambda A_i\boldsymbol{\alpha}_j$，故 V_λ 也是 A_i 的不变子空间
故 $\exists$ 系数矩阵 $B_i, s.t. A_i(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)B_i$
则 $A_iA_j(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m) = A_i(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)B_j = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)B_iB_j$
$A_jA_i(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m) = A_j(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)B_i = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)B_jB_i$
故 B_i 之间也是两两可换的 $(B_1 = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, ..., \lambda))$
由于 $m < n$, 由归纳假设可知 B_i 之间可同时上三角化，因此可以找出相同的特征向量，不妨设其为 $\boldsymbol{\beta}$
$\forall i \in [2,k]$，考虑 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{\beta}$，显然其为 A_1 的特征向量，且有
$A_i(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)B_i\boldsymbol{\beta} = \lambda_i(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, ..., \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{\beta}, \forall i \in [2,k]$
故其为 $A_1, A_2, ..., A_k$ 共同的特征向量，设其为 $\boldsymbol{x}$，并将其扩充为一组基

$(\boldsymbol{x}, *) = X$

则 $X^{-1}A_iX = X^{-1}A_i(\boldsymbol{x}, *) = X^{-1}(\lambda_i\boldsymbol{x}, *) = (\lambda_i\boldsymbol{e}_1, *) = \begin{bmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & A_{i(n-1)} \end{bmatrix}$

易知 $A_{i(n-1)}$ 之间仍然两两可换，故由归纳假设可知 $A_{i(n-1)}$ 之间可同时上三角化：$A_{i(n-1)} = X_{n-1}^{-1}L_{i(n-1)}X_{n-1}$

则 $A_i = X\begin{bmatrix} 1 & \\ & X_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & L_{i(n-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & X_{n-1} \end{bmatrix}^{-1}X^{-1}$

可见，$A_1, A_2, ..., A_k$ 之间可同时上三角化

命题得证 $\square$

20

证明. 任取 k 个属于不同特征子空间的特征向量，并设 $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$

则 $A\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\boldsymbol{v}_i = \sum\limits_{i=1}^{k} a_iA\boldsymbol{v}_i = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\lambda_i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$

不断重复此步骤，直到 $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\lambda_i^{k-1}\boldsymbol{v}_i$

因此有 $\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{v}_1 & \cdots & a_k\boldsymbol{v}_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}$

后面为范德蒙行列式, 由于特征值两两不同，其行列式不为 0

故 $\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{v}_1 & \cdots & a_k\boldsymbol{v}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{O}$

而特征向量均不为 0，故 $a_i = 0, i \in [1, k]$

故属于不同特征值的根向量线性无关 $\square$

21

(1)

$f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$

$$\mathrm{Ker}A = \mathrm{span}(\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix})$$

$$\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{span}(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix})$$

(2)

$f(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$

$$\mathrm{Ker}(A+I) = \mathrm{span}(\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix})$$

$$\mathrm{Ker}(A-3I) = \mathrm{span}(\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix})$$

(3)

$f(\lambda) = (\lambda+1)^3$

$\mathrm{Ker}(A+I) = \mathbb{R}^3$

(4)

$f(\lambda) = \lambda + 1^2(\lambda-2)^2$

$$\mathrm{Ker}A = \mathrm{span}(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix})$$

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{span}(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix})$$

22

证明. 充分性：设 $f(\lambda)=(\lambda-a)^n$，由空间准素分解定理知
$\mathbb{C}^n=\mathrm{Ker}(A-aI)^n$，即复线性空间完全由 A 的根向量组成
必要性：设 $\mathbb{C}^n$ 完全由 A 的根向量组成
若 A 含有两个不同的特征值 λ_1,λ_2, 分别取对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，考虑
$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$
20 题中已证，所有特征子空间之间线性独立，故 $\boldsymbol{x}$ 必不属于任何一个特征子空间，这样一来即存在某个复线性空间中的向量不为 A 的根向量，矛盾
故所有特征值均相等
综上, 复线性空间完全由线性变换 $\mathscr{A}$ 的根向量组成当且仅当 $\mathscr{A}$ 的所有特征值均相等 $\square$