HW11

计 37　张馨元

2023010872

习题 5.2

3

(1)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{2}{\sqrt{n}}=0$
故此级数收敛

(2)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1$
故此级数收敛

(3)

1. 若 $p>1$ 时，则当 n 足够大时，有 $\frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}<\frac{1}{n^p}$，此时由比阶判别法可知级数收敛

2. 当 $p<1$ 时，则
   $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{p+1}{2}}}{n^p(\ln n)^q(\ln\ln n)^r}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1-p}{2}}}{(\ln n)^{q+u}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^u}{(\ln\ln n)^r}=+\infty(u>0)$
   故可知此级数发散

3. 当 p=1 时，运用 Cauchy 积分判敛法，考虑 $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$
   $=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q(\ln t)^r}$

(a) 当 $q>1$ 时，当 t 足够大时，有 $\frac{1}{t^q(\ln t)^r}<\frac{1}{t^q}$，此时由比阶判别法可知级数收敛

(b) 当 $q<1$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{q+1}{2}}}{t^q(\ln t)^r}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\frac{1-q}{2}}}{(\ln t)^r}=+\infty$，故此时级数发散

(c) 当 $q=1$ 时，$\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^r}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^r}$，此时易知当 $r>1$ 时级数收敛

当 $r\le 1$ 时级数发散

综上，当 $p>1$ 或 $p=1\wedge q>1$ 或 $p=1\wedge q=1\wedge r>1$ 时此级数收敛，其余情况发散

(4)

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{2}{n}\right)=2$
故此级数收敛

(5)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1$
故此级数收敛

(6)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\ln(n!)}\cdot\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)<1$ 故此级数收敛

8

(1)

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=+\infty$
故此级数收敛

习题 5.3

4

(1)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，故此级数发散

同时，由于 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\right|\leq 1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$，由 Dirichlet 判别法知此级数收敛

故此级数条件收敛

(2)

根据斯特林公式，$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(n\to\infty)$

$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\sim\dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\to 0(n\to\infty)$

且有 $|(-1)^n|\leq 1$，故此级数收敛

同时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{2n+1}{2n+2}=1$，故此级数不绝对收敛

故此级数条件收敛

(3)

考虑 $(-1)^n\dfrac{n}{n+1}=(-1)^n\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=$
$(-1)^n-\dfrac{(-1)^n}{n}+(-1)^n o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

其中，$(-1)^n$ 发散，$\dfrac{(-1)^n}{n}$ 和 $(-1)^n o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛

故此级数发散

(4)

$|(-1)^n|\leq 1,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n(n-1)}}=0$，由 Dirichlet 判别法知此级数收敛

而 $|u_n|=\sqrt{\dfrac{n+1}{n(n-1)}}\sim n^{-\frac{1}{2}}$，故此级数不绝对收敛

故此级数条件收敛

(5)

$|u_n| \le \frac{1}{2^n}$，故此级数绝对收敛

(6)

当 n 足够大时，$|u_n| \le \frac{1}{n^2}$，故此级数绝对收敛

8

不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 收敛

考虑

$$v_n = \begin{cases} u_n, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases} \quad w_n = \begin{cases} 0, n\text{为偶数} \\ u_n, n\text{为奇数} \end{cases}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$

故知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 收敛

故有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 绝对收敛，与题设矛盾

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 发散

习题 6.1

2

(1)

当 $n \le 0$ 时，$|ne^{-nx}| \ge n$，故此时级数发散

当 $n > 0$ 时，$\left|\frac{n}{e^{nx}}\right| \le \frac{n}{(nx)^3}$ ，故此时级数绝对收敛

综上，收敛域为 $(0, +\infty)$，且在收敛域上绝对收敛

(3)

在 $\mathbb{R}$ 上都发散

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{x} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e}{x}(n+1) = +\infty$，故此级数恒发散

(5)

收敛域为 $(1,+\infty)\cup(-\infty,1)$

$\forall x : |x| > 1, \dfrac{1}{1+x^n}$ 同号且，$\dfrac{1}{1+x^n} \sim \dfrac{1}{x^n}(n\to\infty)$，故可知此时级数绝对收敛

当 $x=-1$ 时，$\dfrac{1}{1+x^n}$ 可能没有定义，自然无从讨论

当 $x=1$ 时，$\dfrac{1}{1+x^n} = \dfrac{1}{2}$，发散

当 $|x|<1$ 时，$\dfrac{1}{1+x^n} \to 1(n\to\infty)$，发散

综上，可知收敛域为 $(1,+\infty)\cup(-\infty,1)$，且在收敛域上绝对收敛

(7)

收敛域为 $(1,+\infty)\cup(-\infty,1)$，讨论基本同 (5)

在收敛域上，当 n 足够大时，$|x^n| > n$，故此时各项同号，易知级数绝对收敛

(9)

收敛域为 $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$，$\dfrac{1}{n+x^2} \to 0(n\to\infty)$，同时 $|(-1)^n| \le 1$，由 Dirichlet 判别法知此级数收敛

由于 $\left|\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}\right| \sim \dfrac{1}{n}(n\to\infty)$，故此积分不绝对收敛

故此级数在收敛域上条件收敛

4

一致收敛

$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$，后者的无穷级数一致收敛，由 Weierstrass 判别法知此级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

5

$|(-1)^n|$ 一致有界

而 $0 < \frac{1}{x^2+n} \leq \frac{1}{n} \to 0(n \to \infty)$，故 $\frac{1}{x^2+n}$ 一致趋于 0

由 Dirichlet 判别法知此级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛

同时，$\forall x \in \mathbb{R}, |u_n| \sim \frac{1}{n}(n \to \infty)$，故此级数不绝对收敛