HW7

计 37　张馨元

2023010872

习题 2.3

1

(1)

令 $f(x,y)=\frac{e^{-yx^2}-e^{-bx^2}}{x}$, 则 $\frac{\partial f}{\partial y}=-xe^{-yx^2}$
因为 $\left|-xe^{-yx^2}\right|\le\left|xe^{-ax^2}\right|$ 且 $\int_0^{+\infty}\left|xe^{-ax^2}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}$，一致收敛
故由比较判别法知 $\int_0^{+\infty}-xe^{-yx^2}\mathrm{d}x$ 一致收敛
故有 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^a-xe^{-yx^2}\mathrm{d}y=\int_b^a\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}-xe^{-yx^2}\mathrm{d}x=$
$\int_b^a\frac{\mathrm{d}y}{-2y}=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$

(2)

$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin yx\mathrm{d}x\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{1}{2a}\left(\int_0^{+\infty}ye^{-ax^2}\cos yx\mathrm{d}x-\sin yxe^{-ax^2}\Big|_0^{+\infty}\right)=$
$\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\mathrm{d}x$
令 $F(y)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\mathrm{d}x$
因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-ax^2}=0\land|\cos yx|\le 1$, 由 Dirichlet 判别法知 $F(y)$ 一致收敛
则有 $F'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(e^{-ax^2}\cos yx\right)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}-xe^{-ax^2}\sin yx\mathrm{d}x=$
$-\frac{y}{2a}\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos yx\mathrm{d}x=-\frac{y}{2a}F(y)$
解微分方程 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}+\frac{y}{2a}F=0$，得 $F(y)=Ce^{-\frac{y^2}{4a}}$
另有 $F(0)=C=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{a}x)^2}\mathrm{d}(\sqrt{a}x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
故 $F(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$

故 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin yx\mathrm{d}x=\frac{y}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{y^2}{4a}}$

(3)

$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\sin yx}{x}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{yx}\mathrm{d}(yx)=\int_a^b\frac{\pi\mathrm{d}y}{2}=\frac{\pi}{2}(b-a)$

2

(1)

令 $f(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\mathrm{d}x$，有 $f^{(n)}=(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}\mathrm{d}x$
同时 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{t}x)^2}\mathrm{d}(\sqrt{t}x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-\frac{1}{2}}$
故 $f^{(n)}(t)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}t^{n+\frac{1}{2}}}$
故 $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}t^{n+\frac{1}{2}}}$

习题 3.1

3

令 $I=([0,1]\times[0,1])$
$xy\in C(I)$ 故 xy 在 I 上可积
取分割 $T=T_x\times T_y$，$T_x=\{x_0,x_1,...,x_n\},T_y=\{y_0,y_1,...,y_n\}$，其中
$x_i=y_i=\frac{i}{n}$
则 $\iint\limits_I xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{|T|\to0}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n x_iy_j\sigma(I_{ij})=\lim\limits_{|T|\to0}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\frac{ij}{n^4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$

6

令 $I=([0,1]\times[0,1])$
任取分割 $T=T_x\times T_y$，$T_x=\{x_0,x_1,...,x_n\},T_y=\{y_0,y_1,...,y_n\}$
在每个小矩形区域 ΔI_{ij} 中任取点 (ξ_i,η_j)
$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y=\lim\limits_{|T_x|\to0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta\xi_i\lim\limits_{|T_y|\to0}\sum\limits_{i=1}^n g(y_i)\Delta y_i=$
$\lim\limits_{|T|\to0}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta\xi_i\sum\limits_{j=1}^n g(\eta_j)\Delta\eta_j=\lim\limits_{|T|\to0}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n f(\xi_i)g(\eta_j)\Delta\xi_i\Delta\eta_j=$

$\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_j)\sigma(I_{ij})$
因为 T 是任意的，取点也是任意的，根据定义可知 $f(x)g(y)\in R(I),\iint\limits_{I} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{|T|\to 0}\sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_j)\sigma(I_{ij})=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\mathrm{d}y$

10

(1)

$f(x,y)$ 的间断点集合 $D=\{(-1,-1),(1,-1),(-1,1),(1,1)\}$
$\forall\epsilon>0$，可取四个矩形区域:
$\left[-1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},-1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]\times\left[-1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},-1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]$,
$\left[1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]\times\left[-1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},-1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]$,
$\left[-1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},-1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]\times\left[1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]$,
$\left[1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]\times\left[1-\frac{\sqrt{\epsilon}}{4},1+\frac{\sqrt{\epsilon}}{4}\right]$,
D 被其并集真覆盖，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma(I_i)<\epsilon$
即 D 为零面积集，故 $f(x,y)$ 可积

习题 3.2

3

(1)

求 $x+y$ 的取值范围：若 $(x,y)\in\overset{o}{D},\nabla(x+y)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，故没有最值
若 $(x,y)\in\partial D$，考虑 $L(x,y,\lambda)=x+y+\lambda\left[(x-2)^2+(y-2)^2-2\right]$
令 $\nabla L=\begin{bmatrix}1+2\lambda(x-2) & 1+2\lambda(y-2) & (x-2)^2+(y-2)^2-2\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$，解得

$$\begin{cases}x=1\\y=1\\\lambda=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=3\\y=3\\\lambda=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

故 $(x+y)\in[2,6]$ 故 $(x+y)^2<(x+y)^3$

故 $\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

4

证明. 设 $\exists(x_0,y_0) \in D : f(x_0,y_0) = A > 0$

因为 $f(x,y) \in C(D)$，则 $\exists\delta > 0$，

$\text{s.t.}\forall(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta) \cap D, |f(x,y) - A| < \frac{A}{2}$

又有 $f(x,y) \geq 0, \forall(x,y) \in D$, 则

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{B((x_0,y_0),\delta)\cap D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D\setminus B((x_0,y_0),\delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint\limits_{B((x_0,y_0),\delta)\cap D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > \iint\limits_{B((x_0,y_0),\delta)\cap D} \frac{A}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$ 与题设矛盾

故必有 $f(x,y) = 0, \forall(x,y) \in D$ □

5

根据积分中值定理:

$\frac{1}{r^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{f(\xi,\eta)}{r^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi f(\xi,\eta), \xi^2+\eta^2 \leq r^2$

则 $(\xi,\eta) \to (0,0)(r \to 0)$

故 $\lim\limits_{r\to0} \frac{1}{r^2} \iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{r\to0} \pi f(\xi,\eta) = \pi f(0,0)$