HW4

计 37　张馨元

2023010872

50

三阶幂零矩阵必有特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^3$

故 Jordan 块只可能为 1 阶、2 阶和 3 阶，分别为 $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

故知三阶幂零矩阵相似于零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 或 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，分别对应于最小多项式 $\lambda, \lambda^2, \lambda^3$

因此 $N_1 \simeq N_2 \iff N_1$ 和 N_2 相似于上面三种 Jordan 标准型之一

$\iff N_1$ 和 N_2 的最小多项式都为这种 Jordan 标准型对应的最小多项式

52

已知特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 7)^2$

做根子空间分解，可知特征值为 2 的 Jordan 块的特征多项式为 $(\lambda - 2)^3$，因此阶数为 3；同理，特征值为 -7 的 Jordan 块的阶数为 2

又知 $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$，可知特征值为 2 的 Jordan 块的最大阶数为 2，特征值为 -7 的 Jordan 块的最大阶数为 1

故 A 的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

54

取基 $(1, X, X^2, X^3)$，则 $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

易知其特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^4$

且 $\text{rank}(D) = 3 = 4 - 1$，故其恰好只有一个 Jordan 块

因此 $\text{J}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

55

A 是上三角矩阵，易求 $f(\lambda) = (\lambda - 2)^5(\lambda + 1)$

属于 -1 的 Jordan 块易知仅有一个阶数为 1 的

考虑左上角的五阶矩阵 $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，已知 $\dim\text{Ker}(A') = 2$

故应当有两个属于 2 的 Jordan 块

考虑 $(A'-2I)^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$, $(A'-2I)^4=\boldsymbol{O}$，可知其中有一个 Jordan 块阶数为 4，故另一个 Jordan 块阶数为 1

综上，A 在 $\mathbb{C}$ 上的 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}2&0&0&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\0&1&2&0&0&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$

由于原方阵和 Jordan 标准型中都只涉及有理数，易知涉及到的初等变换矩阵也为有理数矩阵，故 A 在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 上的 Jordan 标准型也为上面所求

56

不妨设存在 n 阶方阵 A，s.t.$A^2=N$

由于 $A^{2n}=N^n=\boldsymbol{O}$，可知 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n$

将 A 化为 Jordan 标准型，有 $A=PJP^{-1}$，则 $N=A^2=PJ^2P{-}1$，也化作了 Jordan 标准型

由于 $N^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$，可知其 Jordan 标准型中所有 Jordan 块的阶数均大于 $n-1$，即其只有一个阶数为 n 的 Jordan 块

故 $\text{rank}(J^2)=n-1$

然而 $\text{rank}(J)\leq n-1$，故 $\text{rank}(J^2)\leq n-2$，矛盾

故不存在这样的 n 阶方阵 A

59

复方阵必能通过相似变换化为 Jordan 标准型，故不妨设

$A\simeq J=\text{diag}(J_1,J_2,...,J_s)$

对于每一个 Jordan 块 J_i，其均为 $\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$ 形式

考虑方阵 $T_i = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & \iddots & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$，则

$T_i J_i T_i^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} = J_i^T$

故可知 $A \simeq J \simeq J^T \simeq A^T$

63

(1)

$f(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 2)^3$ 故 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

取 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，注意到 $A\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 Jordan 链的终结

解 $(A - 2I)\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}, (A - 2I)\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$，有

故 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2)

求得 $f(\lambda)=(\lambda-1)^3, m(\lambda)=(\lambda-1)^2$

故其含有一个阶数为 2 的 Jordan 块

故知其 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A-I)=$span$\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

取定 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}s+t\\s\\t\end{bmatrix}$

欲使 $(A-I)\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$ 有解，考虑增广矩阵 $\begin{bmatrix}1&-1&-1&s+t\\2&-2&-2&s\\-1&1&1&t\end{bmatrix}$，可知若有解，必有 $s+t+t=0$

取 $s=2,t=-1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

故 $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

(3)

求得 $f(\lambda)=m(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)$

故知其 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

求得 $\mathrm{Ker}(A)=$span$\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$, $\mathrm{Ker}(A-I)=$span$\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$

解方程 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 有解 $\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}$

故 $P=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&2&1\\0&3&1\end{bmatrix}$

(4)

$f(\lambda)=(\lambda+1)^3, m(\lambda)=(\lambda+1)^2$

故 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A+I)=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2s+5t\\s\\t\end{bmatrix}$

欲使 $(A+I)\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$ 有解，考虑增广矩阵 $\begin{bmatrix}3&6&-15&-2s+5t\\1&2&-5&s\\1&2&-5&t\end{bmatrix}$，可知 $s=t$

不妨取 $s=1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$，并解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

故有 $P=\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

(5)

求得 $f(\lambda)=(\lambda+3)^3, m(\lambda)=(\lambda+3)^2$

故 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A+3I)=$span$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$

取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} s+t \\ 2s \\ 6t \end{bmatrix}$

欲使 $(A+3I)\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$ 有解，考虑增广矩阵 $\begin{bmatrix} 12 & -6 & -2 & s+t \\ 18 & -9 & -3 & 2s \\ 18 & -9 & -3 & 6t \end{bmatrix}$，可知 $s=3t$

不妨取 $s=\frac{3}{2}, t=\frac{1}{2}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, 并解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

故 $P=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(6)

$f(\lambda)=(\lambda-1)^3, m(\lambda)=(\lambda-1)^2$

故 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A-I)=$span$\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-2s+5t\\s\\t\end{bmatrix}$

欲使 $(A-I)\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$ 有解，考虑增广矩阵 $\begin{bmatrix}3&6&-15&-2s+5t\\1&2&-5&s\\1&2&-5&t\end{bmatrix}$，可知

$s=t$

不妨取 $s=1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$，并解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

故有 $P=\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

(7)

$f(\lambda)=(\lambda-1)^4, m(\lambda)=(\lambda-1)^3$

故 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$\text{Kernel}(A-I)=\text{span}\left(\begin{bmatrix}3\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$

取 $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}3\\1\\0\\1\end{bmatrix}$，设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3s\\s\\t\\s\end{bmatrix}$

欲使 $(A-I)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$ 有解，考虑增广矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & 3s \\ -2 & -7 & 0 & 13 & s \\ 0 & -3 & 0 & 3 & t \\ -1 & -4 & 0 & 7 & s \end{bmatrix}$，可知

$3s=t$

不妨取 $s=1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\3\\1\end{bmatrix}$，并解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3u+3\\v-1\\0\\0\end{bmatrix}$

再令 $(A-I)\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$ 有解

考虑增广矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & 3u+3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & u-1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & v \\ -1 & -4 & 0 & 7 & w \end{bmatrix}$，因此有

$3u+3=v, 2w-\frac{v}{3}=u-1$

不妨取 $u=1, v=6, w=1$ 故有 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}6\\0\\6\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}7\\-2\\0\\0\end{bmatrix}$

故知 $P=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(8)

$f(\lambda)=(\lambda-2)^4, m(\lambda)=(\lambda-2)^2$

考虑 $\mathrm{Ker}(A-2I)=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$，即其只有两个 Jordan 块

故 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

取 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，并分别解 $(A-2I)\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2, (A-2I)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4$

可得 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

故 $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$