

Maannousun mallinnus

Daud Abucar 1021842

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 26.06.2024

Vastuuopettaja

yliopistonlehtori **Pekka Pere**

Työn ohjaaja

yliopistonlehtori **Pekka Pere**

Copyright © 2025 Daud Abucar 1021842

The document can be stored and made available to the public on the open internet pages of Aalto University.
All other rights are reserved.



Tekijä Daud Abucar 1021842		
Työn nimi Maannousun mallinnus		
Koulutusohjelma Teknistieteellinen kandidaattiohjelma		
Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet	Pääaineen koodi SCI3029	
Vastuuopettaja yliopistonlehtori Pekka Pere		
Työn ohjaaja yliopistonlehtori Pekka Pere		
Päivämäärä 26.06.2024	Sivumäärä 23+1	Kieli Suomi
Tiivistelmä		

Maannousulla tarkoitetaan maanvaipan hidasta kohoamista jääkauden jälkeen. Maannousua tapahtuu alueilla, joilla jääkauden aikana oli paksuja jäämassoja. Tässä kandidaatintyössä maannousua mallinnetaan STAR-mallilla, jossa mallin parametrit voivat muuttua eri tilojen välillä. Tilojen määrä ja siirtymät määräytyvät aineiston ja mallinnettavan ilmiön perusteella. Työn aineistona käytettiin Tukholman merivedenkorkeutta vuosilta 1774–2022.

Työssä aineistoa muokattiin mallinnusta varten, ja aikaisempia menetelmiä käsiteltiin lyhyesti. Perusteltiin myös, miksi STAR-malli voisi olla käyttökelpoinen. STAR-mallin parametrit estimoitiin. Estimoidun mallin tuloksia tarkasteltiin ja sitä verrattiin yksinkertaisempiin malleihin, kuten lineaariseen malliin.

Työn keskeinen tulos on, että maannousun mallintaminen STAR-mallilla ei ole tarpeellista, sillä yksinkertaisemmat mallit, kuten lineaarinen malli, tuottavat samankaltaiset tulokset. Lisäksi havaittiin, että STAR-mallin estimoinnissa esiintyy numeerisia ongelmia, jotka vaikuttavat tulosten luotettavuuteen. Näihin ongelmiin ehdotettiin ratkaisuja. Kuukausikeskiarvon käyttö vuosikeskiarvon sijaan voisi ratkaista numeerisen ongelman.

Avainsanat Maannousu, STAR-malli, Aikasarjat, Ilmastonmuutos

Author Daud Abucar 1021842

Title Modelling post-glacial rebound

Degree programme Bachelor's Programme in Science and Technology

Major Mathematics and Systems Sciences **Code of major** SCI3029

Teacher in charge University Lect. Pekka Pere

Advisor University Lect. Pekka pere

Date 26.06.2024 **Number of pages** 23+1 **Language** Finnish

Abstract

Post-glacial rebound refers to the slow rising of the Earth's mantle after the removal of large ice sheets during the ice age. This phenomenon occurs in places that were effected by the ice age. Post-glacial rebound is modeled by using STAR model. In STAR model the parameters are allowed some flexibility to smoothly change between regimes. The number of regimes depend on the data and what is being modeled. In this thesis, data on sea level changes in Stockholm is used and measurements are taken since 1774.

In this bachelor's thesis, the data is prepared for modeling. Some of the previous methods are discussed, and arguments are given for the use of STAR model. The parameters of the STAR model are estimated. The resulting model are compared with linear model.

The main finding of the thesis is that modeling post-glacier rebound with STAR model is unnecessary because simpler models, such as linear model, produce the same outcome. Also a numeric problem was observed. Solutions to these problems were proposed. Using the monthly average instead of the annual average could resolve the numerical problem.

Keywords Post-glacial rebound, STAR model, Timeseries, Climate change

Sisällys

Tiivistelmä	3
Tiivistelmä (englanniksi)	4
Sisällys	5
1 Johdanto	6
2 Teoriat maannoususta	6
3 Tutkimusaineisto ja -menetelmät	8
3.1 Ekmanin tutkimus	8
3.2 Tasaisen siirtymän autoregressiivinen malli	11
3.3 Mallin määrittely ja estimointi	14
3.3.1 Mallin määrittely	14
3.3.2 Estimointi	16
4 Tulokset	17
4.1 Estimoinnin tulokset	17
4.2 Mallin parantaminen	18
4.3 Vertailun tulokset	20
5 Yhteenveto	21
A Jäännösdiagnostiikka	24

1 Johdanto

Maannousu eli maankuoren hidas kohoaminen johtuu viimeisestä jääkaudesta, jolloin mannerjäätiköt puristivat maankuorta kasaan. Mannerjäätiköt sulivat pois, jonka seurauksena maankuori alkoi kohoamaan. Maankuori kohoaa edelleen, mutta kohoamisnopeus vaihtelee alueittain. Maannousua tapahtuu pääosin Pohjois-Euroopan ja Pohjois-Amerikan alueella ([Ekman 2009](#)). Maannousua voidaan mallintaa, ja maannousun käyttäytyminen muistuttaa elastista liuosta. Puristavan voiman katoamisen jälkeen maa nousee ja palaa tasapainoasemaan. Maankohoaminen hidastuu ajan kuluessa eksponentiaalisesti. Maan ainutlaatuinen viskositeetti kuitenkin hidastaa maannousun vaimenemista ([Paulson et al. 2005](#)). Maannousu muokkaa maiden ranta- viivoja, kuten Suomessa ja Ruotsissa. Ilmiö synnyttää uusia järviä ja saaria. Sillä on suuria vaikutuksia Fennoskandian alueella ja se hidastaa merennousun vaikutuksia Pohjois-Euroopassa ([Ekman 2009](#)).

Tässä työssä mallinnetaan maannousua käyttämällä tasaisen siirtymän autoregressiivistä mallia. Aineistona käytetään Tukholman merenkorkeussarjaa, jonka mittaus on aloitettu vuonna 1774. Mittausmenetelmät ovat muuttuneet ajan myötä, minkä lisäksi myös mittausvälit vaihtelevat kuukausittain, viikoittain ja päivittäin. Nykyään merenkorkeutta mitataan satelliittien avulla tarkasti ja jatkuvasti. Mittauksia puuttuu alkupäästä, mutta nämä on joko paikattu kirjallisuudessa aikaisemmin tai ne paikataan interpoloimalla eli estimoidaan puuttuvat havainnot.

Maannousua on mitattu veden pinnasta, joten arvoon vaikuttaa monia tekijöitä, kuten tuulet, merivirrat ja vedenkorkeuden kausivaihtelut. Kaikki nämä kausivaihtelut eliminoidaan niin, että lasketaan koko vuoden keskiarvo ja analysoidaan sitä. Ilmastomuutos vaikuttaa mittauksiin suoraan. On haastavaa saada ilmastomuutoksesta johtuva merennousu ja maannousu erilleen, koska molemmat vaikuttavat meriveden korkeuteen. Ilmiötä aiemmin tutkineet ovat käyttäneet, esimerkiksi kahta lineaarista regressiota, jolloin aineisto on jaettu kahteen osaan, ennen ilmastomuutosta ja ilmastomuutoksen jälkeen. Menetelmä toimii, mutta merennousun kiihtyminen vaatii aineiston jatkuvaa jakamista eri osiin. Maannousua ja merennousua ei voida erottaa, mutta aineiston jakamista ja siirtymän tasaisuutta voidaan parantaa. Malli, joka jakaa aineiston tiloihin ja mahdollistaa tasaisen siirtymän tilojen välillä, on tasaisen siirtymän autoregressiivinen malli.

2 Teoriat maannoususta

Itämeren vedenkorkeutta on mitattu eri kaupungeissa 1700-luvun loppupuolelta lähtien. Vanhin tunnettu havainto vedenkorkeudesta on peräisin 1000-luvulta, jolloin viikinki Ingrid kaiversi runon siirtolohkareeseen vedenpinnan kohdalle ([Ekman 2009](#)). Kivi ja runo ovat säilyneet, mutta meri on vetäytynyt usean kilometrin. Ensimmäinen dokumentoitu kuvaus vedenkorkeuden muutoksesta tehtiin vuonna 1491, kun Östhammarin asukkaat ilmoittivat Ruotsin hallitukselle, että kaupungin satamaan ei enää päässyt laivalla. Hallitus ratkaisi ongelman uudelleensijoittamalla kaupungin lähemmäksi merenrantaa. Vastaavia valituksia rannikkokaupunkien asukkailta on

säilynyt useita kyseiseltä aikakaudelta. Ilmiön syitä ryhdyttiin selvittämään vasta 1700-luvulla. Historioitsija Elias Brenner sekä lääkäri ja kemisti Urban Hiärne esittivät, että Itämeren vedenkorkeus oli laskussa koko alueella. Hiärne jatkoi ilmiön tutkimista tarkemmin.

Otto Ephraim Runeberg ja Bengt Ferner olivat ensimmäisiä, jotka yhdistivät vedenkorkeuden laskun maannousuun. Vuonna 1765 he esittivät, että Itämeren vedenkorkeuden lasku voisi johtua maannoususta. Runeberg, joka toimi maanmittarina, havaitsi muutoksia kallioperässä. Ferner puolestaan esitti samankaltaisia havaintoja, mutta hänen perustelunsa jäivät epäselväksi. Vaikka heidän tutkimuksensa julkaistiin samanaikaisesti, ne eivät liittyneet toisiinsa. 1700-luvun loppupuolella oli kuitenkin jo laadittu useita päteviä hypoteeseja vedenkorkeuden laskun syistä. Ennen laajempien mittauksen ja tutkimusten suorittamista oli olemassa ainakin kolme merkittävää hypoteesia ilmiön selittämiseksi. (Ekman 2009.)

1. Jos koko Itämerellä vedenkorkeus laskee samaa tahtia niin tämä viittaa siihen, että veden määrä vähenee.
2. Pohjoisosassa vedenkorkeus laskee nopeammin kuin etelässä niin se viittaa leveysasteesta riippuvaan merenkorkeuden laskuun.
3. Eri laskunopeus eri Itämeren kohdissa viittaisi maannousuun.

Ilmiön tutkimista jatkettiin, ja tulokset osoittivat, että meriveden nousunopeus vaihteli alueittain (Nordman et al. 2020). Ensimmäinen hypoteesi, joka selitti vedenkorkeuden laskun muilla syillä, kumottiin. Lisäksi havaittiin, että vedenkorkeus laskee pohjoisessa nopeammin kuin etelässä, mutta ero ei ollut tilastollisesti merkittävä. Näiden perusteella Lyell (1835) totesi, että maa nousee. Tämä tulos herätti uusia kysymyksiä. Miksi maa nousee? Mikä nostaa maata? Tästä huolimatta merenkorkeuden mittaukset jatkuivat laajasti eri puolilla Itämerta. (Ekman 2009.)

Jääkaudesta alettiin puhua 1800-luvulla, ja sen olemassaolo todistettiin vasta 1859, kun napatutkija ja geologi Otto Torell teki tutkimusmatkan Islantiin ja Grönlantiin. Hän havaitsi samanlaisia ilmiöitä kuin Ruotsissa ja Norjassa. Torell osoitti, että Pohjoismaat ovat olleet jään peitossa. Maankuoresta paljastui todisteita jääkaudesta, ja että viimeisin jääkausi päättyi 10 000 vuotta sitten.

Vuonna 1882 Thomas Jamieson julkaisi merkittävän havainnon ja hypoteesin, mistä maannousu voisi johtua. Hän pohti, että maannousu tapahtuu paikoissa, missä maa on ollut suuren jäämassan peitossa. Jäämassa on paikoin ollut kilometrejä paksu ja iso massa painaa maankuoria kasaan. Jamieson totesi, että ei tiedetä minkälainen ja millaisissa olosuhteissa maanvaippa on ja jos maankuoreen on syntynyt lommo niin se saattaa kohota jäämassan sulaessa. Jamiesonin teoriaa ei otettu tosissaan, sillä sen ajan tieteelle, tämä oli hyvin absurdi ajatus. (Jamieson 1882.)

Maan vaipasta ja sen olomuodosta saatu lisätieto tarjosi selityksen maannousulle. Jääkaudella napojen päällä ollut painava jäämassa puristi maan sisimpiä kerroksia alas- ja pois päin. Jääkauden päätyttyä puristava voima poistui, ja kokoonpainuneet tilat täyttyivät hitaasti maan vaipan materiaalilla.

3 Tutkimusaineisto ja -menetelmät

Tukholman aineisto on yksi pisimmistä aineistoista merivedenkorkeudesta. Tämän lisäksi Tukholma sijaitsee Itämeren länsirannikolla, missä lyhytaikaisten vedenkorkeuden vaihtelut ovat vähäiset (Ekman 1998). Itämeri on lähtökohtaisesti hyvin rauhallinen.

Tässä työssä analysoidaan Tukholman merivedenkorkeutta vuodesta 1774. Aineisto on hankittu Ekmanin tutkimuspaperista (Ekman 2003). Aineistoon on jälkeinpäin lisätty vuosien 2001–2022 meriveden vuosikorkeudet. Uudet korkeudet julkaistaan myöhemmin Ruotsin meteorologisen yhdistyksen aikakauskirjassa.

Maannousua on haastavaa ja paikoin mahdotonta mitata merenpohjasta, joten ainoa järkevä tapa oli mitata korkeus merenpinnasta. Mittaus aloitettiin hakkaamalla rannikoissa oleviin siirtolohkareisiin viiva vedenpinnan kohdalle. Teknologian kehityksen myötä vuonna 1890 mittaukset tehtiin mareografialla. Mareografia käytetään edelleen rannikkoalueilla mittaamaan merenkorkeutta ja, myös sen vaihteluja (Ekman 2009).

Puuttuvien havaintojen paikkaaminen ja mallin estimointi suoritetaan R:llä (R Core Team 2023). Paikkaaminen tehdään käyttämällä *imputeTS*-pakettia. Paikkauksessa sovelletaan liukuvan keskiarvon menetelmää. Funktio *na_ma* saa argumentiksi havainnot ja estimoi puuttuvat havainnot laskemalla liukuva keskiarvo lähellä olevista arvoista. Liukuvan keskiarvon painot riippuvat etäisyydestä (Moritz ja Bartz-Beielstein 2020). Painot vähenevät eksponentiaalisesti etäisyyden kasvaessa puuttuvasta arvosta, ja paikkauksessa käytettävän ikkunan leveys oli 2 vuotta tai lähin arvo. Ikkunan leveys määrittää, mitkä lähimmät arvot otetaan huomioon puuttuvan havainnon estimaatissa.

Puuttuvia havaintoja löytyy lähtökohtaisesti vain merivedenkorkeusajasarjan alkupäästä. Tarkemmin sanottuna ensimmäiset 50 vuotta sisältävät puuttuvia havainnot. Kuitenkin Ruotsin ilmatieteen ja hydrologian laitos on paikannut suurimman osan näistä puuttuvista havainnoista. Laitos keräsi paikkaamista varten aineistoa lähialueilta, kuten Kööpenhaminasta. Aineistojen yhtenäisiä jaksoja vertailtiin, ja tämän avulla estimoititiin eri rannikkojen merivedenkorkeuksien välisiä suhteita. Näiden vertailujen avulla saatiin paikattua suurin osa puuttuvista havainnoista. (Ekman 2009.)

3.1 Ekmanin tutkimus

Ekman 2009 tutki maannousua Itämerellä. Hän keräsi merivedenkorkeudet vuosilta 1774–1889 yhdistelemällä aiemmin kerättyä dataa. Loput arvot hän sai Ruotsin ilmatieteen ja hydrologian laitokselta tutkimusta varten. Aineistossa oli mittaus jokaisen kuukauden vedenkorkeuden keskiarvosta ja Ekman muodosti näistä vuosikeskiarvon. Ekman argumentoi vuosikeskiarvon käyttöä kuukausikeskiarvon sijaan, koska näin lyhytaikaiset vedenkorkeuden vaihtelut saadaan minimoitua. Ekman kuvasi maannousua kahdella lineaarisella regressiolla, koska aineistoa on kerätty aikana, jolloin ilmastonmuutos ei vaikuttanut merivedenkorkeuteen. Vedenkorkeuteen vaikuttaa ajasta riippuen, joko maannousu tai sekä maannousu että ilmastonmuutos.

Aineiston jakaminen kahteen segmenttiin auttaa ymmärtämään molempien ilmiöiden vaikutukset erikseen.

Lineaarinen regressiomalli voidaan määritellä seuraavasti:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Yllä y_i on selitettävä muuttuja, β_0, \dots, β_p ovat parametreja, joita estimoidaan, $\mathbf{x}_i' = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ ovat selittäviä muuttujia. Tässä alaindeksi p kertoo selittävien muuttujien määrän. Jokaiselle havainnolle joita on n kappaletta, on oma selitettävä muuttuja y_i . Virhetermi on ϵ_i , ja $\epsilon_i \sim iid(0, \sigma^2)$ eli virhetermin odotusarvo on 0 ja varianssi on σ^2 . Virhetermit oletetaan riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi (*iid*). Lineaarinen malli kuvaa selitettävän muuttujan y_i ja selittävän muuttujan \mathbf{x}_i välistä lineaarista suhdetta. Parametreja β_1, \dots, β_p tunnetaan regressiokertoimina, ja ne kuvaavat selittävien muuttujien vaikutusta selitettävään muuttujaan. Vakiotermi β_0 puolestaan ilmaisee, missä kohtaa regressiosuora leikkaa y -akselin.

Ekman käytti yhden selittäjän lineaarista mallia, jossa $p = 1$. Tällöin malli pelkistyy muotoon

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

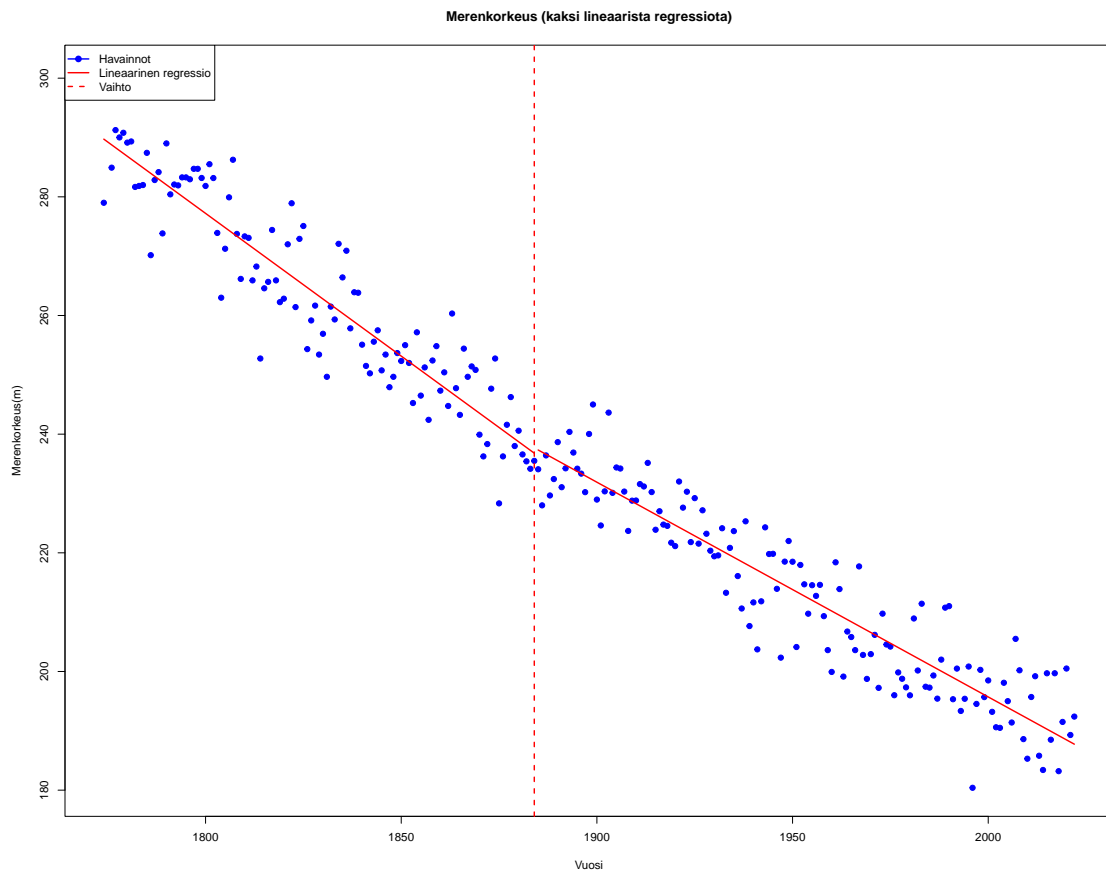
Philip Woodworth, myös tutki maannousua. Hän käytti lineaarisen mallin sijaan kvadraattista mallia:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Siinä muuttujien suhde kuvataan toisen asteen polynomilla. Suhde on epälineaarinen, mikä tarkoittaa, että muutokset x_i :ssä eivät vastaa muutoksia y_i :ssä siten, että niitä voitaisiin kuvata lineaarisella mallilla.

Estimoitavien mallien (1) ja (2) parametrien estimaatit valitaan niin, että ne minimoivat virhetermin neliösumman. Tätä menetelmää kutsutaan pienimmän neliösumman menetelmäksi (PNS).

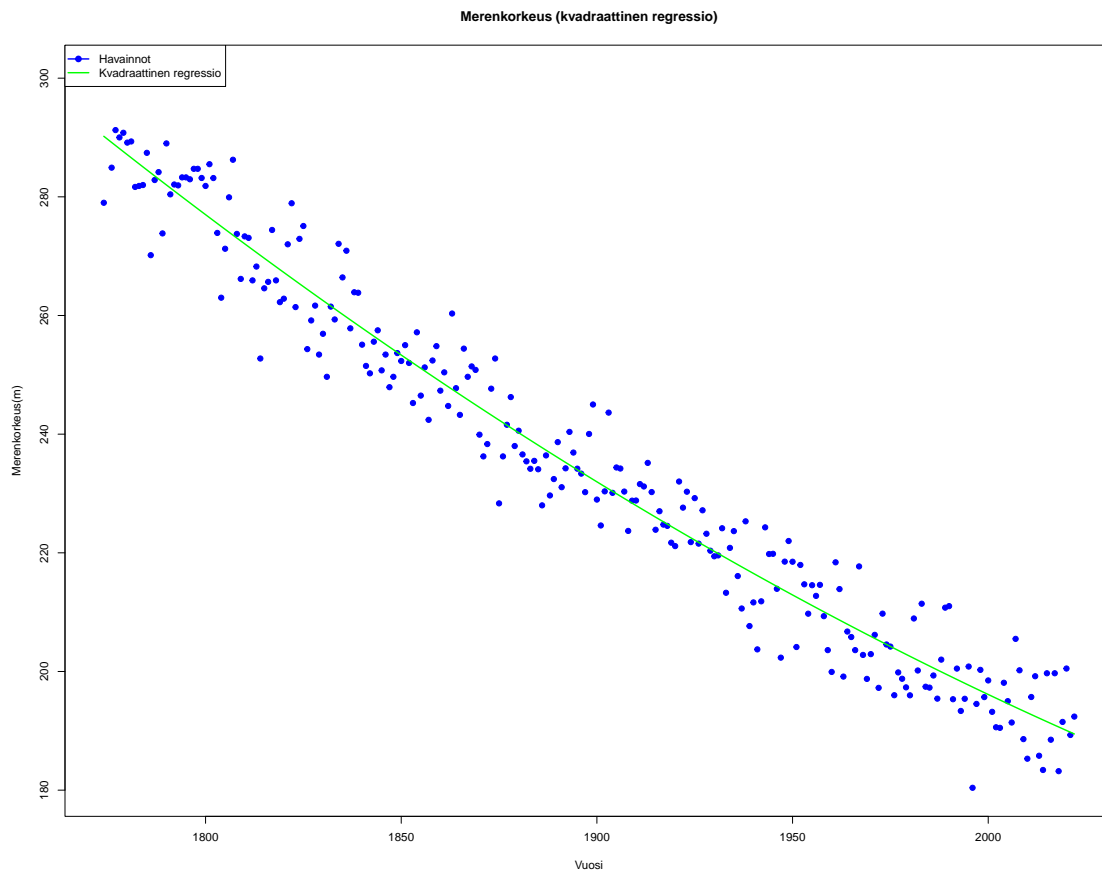
Ekman käytti paloittain lineaarista mallia aikavälille 1774–2022. Hän estimoi aikaväleille 1774–1884 ja 1884–1984 erilliset lineaariset mallit. Koska vaihto ei tapahdu tasaisesti, havaitaan terävä kulma vuoden 1884 kohdalla.



Kuva 1: Ekmanin paloittain lineaarisen regression malli

Kuvassa 1 havaitaan, että maannousu oli Tukholmassa noin 5 mm/vuosi aikavälillä 1774–1884 ja noin 4 mm/vuosi aikavälillä 1884–2022. Regressio vaihtuu kuvan pystysuoran viivan kohdalla. Maannousun nopeuden muutos voidaan havaita kuvaajasta.

Maannousun nopeus on epälineaarinen, koska maanvaipan korkean viskoosisuutensa vuoksi elastinen tasapainotila saavutetaan hyvin hitaasti, ja elastinen voima heikkenee epälineaarisesti ajan myötä. Woodworthin mukaan tilastotieteen näkökulmasta kvadraattinen malli on soveltuvampi. (Woodworth 1990.)



Kuva 2: Woodworthin kvadraattinen malli

Kvadraattisen mallin kuvaajassa (2) ei ole havaittavissa terävää kulmaa, vaan malli pystyy kuvaamaan epälineaarisen rakenteen.

Lineaarinen ja kvadraattinen malli soveltuvat hyvin maannousun nousunopeuden määrittämiseen. Erityisesti mallit kuvaavat pitkän aikavälin muutoksia hyvin, mutta ne eivät pysty käsittelemään lyhytaikaisia vaihteluja. Lyhytaikaiset vaihtelut on mahdotonta tulkita kuvista (1) ja (2). Lyhytaikaisten vaihteluiden mallintaminen voi olla hyödyllinen esimerkiksi, kun halutaan ennustaa seuraavan vuoden keskiarvo. Tämä osoittaa tarpeen mallintaa maannousua muilla menetelmillä.

3.2 Tasaisen siirtymän autoregressiivinen malli

Tasaisen siirtymän autoregressiivinen malli (STAR) on autoregressiivinen aikasarjamalli, missä autoregressiivisen mallin parametrit muuttuvat. Aikasarjaksi kutsutaan aineistoja, jotka kuvaavat, miten selitettävä muuttuja kehittyy ajan mukaan. Lineaarinen malli (1) ja kvadraattinen malli (2) eivät ole aikasarjamalleja, koska ne kuvaavat suhdetta selittävän ja selitettävän muuttujien välillä, sekä aikasarjan täytyy olla ajallisesti järjestyksessä, mitä ei vaadita malleissa (1) ja (2).

STAR-mallin parametrien muutos tapahtuu kynnyksarvon perusteella, ja siirtymää säädellään siirtymäfunktion avulla. Siirtymäfunktion tehtävä mallissa on taata

parametrien sopiva siirtymä (Teräsvirta et al. 2010). Luvussa (2) mainitaan ilmastomuutoksen aiheuttavan muutosta meren käyttäytymiseen, ja on siksi perusteltua säätää mallin parametreja vastaamaan muutosta. Ekman toteutti yhden vaihdon, joka oli äkillinen.

STAR-malli käsittelee aineistoa tilojen avulla, jotka eroavat toisistaan dynaamisesti. Malli sallii parametrien muuttuvan tasaisesti siirryttäessä tilasta toiseen. STAR-malli on erityisen hyödyllinen mallintamaan epälineaarisia aineistoja, joissa aikasarjan käyttäytyminen riippuu systeemin tilasta.

Malli tarvitsee paljon dataa verrattuna muihin malleihin. Tässä työssä käytettävä aineisto, joka kattaa 200 vuotta, tarjoaa riittävästi havaintoja mallin parametrien estimointiin.

STAR-malli voidaan esittää muodossa,

$$y_t = \Phi' \mathbf{z}_t + \Psi' \mathbf{z}_t G(\gamma, \mathbf{c}, s_t) + \epsilon_t, t = 1, \dots, T \quad (3)$$

jossa $\mathbf{z}_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ koostuu vakiotermistä ja y_t :n viipeistä, $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m)'$ ja $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_m)'$ ovat mallin parametrit. Muuttamalla mallia $y_t = \{\Phi + \Psi G(\gamma, \mathbf{c}, s_t)\}' \mathbf{z}_t + \epsilon_t$ muotoon niin, mallia voidaan tulkita lineaariseksi malliksi, jossa on ajasta riippuva kerroin $\Phi + \Psi G(\gamma, \mathbf{c}, s_t)$. Parametrivektori Φ on lineaarisen osan parametrit, koska $G(\gamma, \mathbf{c}, s_t) = 0$, malli pelkistyy muotoon $\Phi' \mathbf{z}_t + \epsilon_t$, mikä on autoregressiivinen malli. Toisaalta Ψ on epälineaarisen osan parametrit, koska se vaikuttaa, kun $G \neq 0$, jolloin siirtymäfunktion avulla malli (3) pystyy tulkitsemaan epälineaariset rakenteet. T on havaintojen määrä aikasarjassa. Virhetermi on $\epsilon \sim iid(0, \sigma^2)$ ja G on siirtymäfunktio. Siirtymäfunktio on rajattu funktio, jonka argumentti on s_t . Siirtymäfunktio on jatkuva koko parametriavaruudessa. Siirtymäfunktioksi voidaan valita mikä tahansa sopiva funktio, mutta STAR-mallissa yleisesti käytetään kahta eri siirtymäfunktiota: logistista ja eksponenttista siirtymäfunktiota (Teräsvirta et al. 2010). Logistinen siirtymäfunktio on muotoa

$$G_L(\gamma, \mathbf{c}, s_t) = (1 + \exp(-\gamma \prod_{k=1}^K (s_t - c_k)))^{-1}, \quad \gamma > 0, \quad (4)$$

ja eksponenttinen siirtymäfunktio on

$$G_E(\gamma, c_1, s_t) = 1 - \exp(-\gamma (s_t - c_1)^2), \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

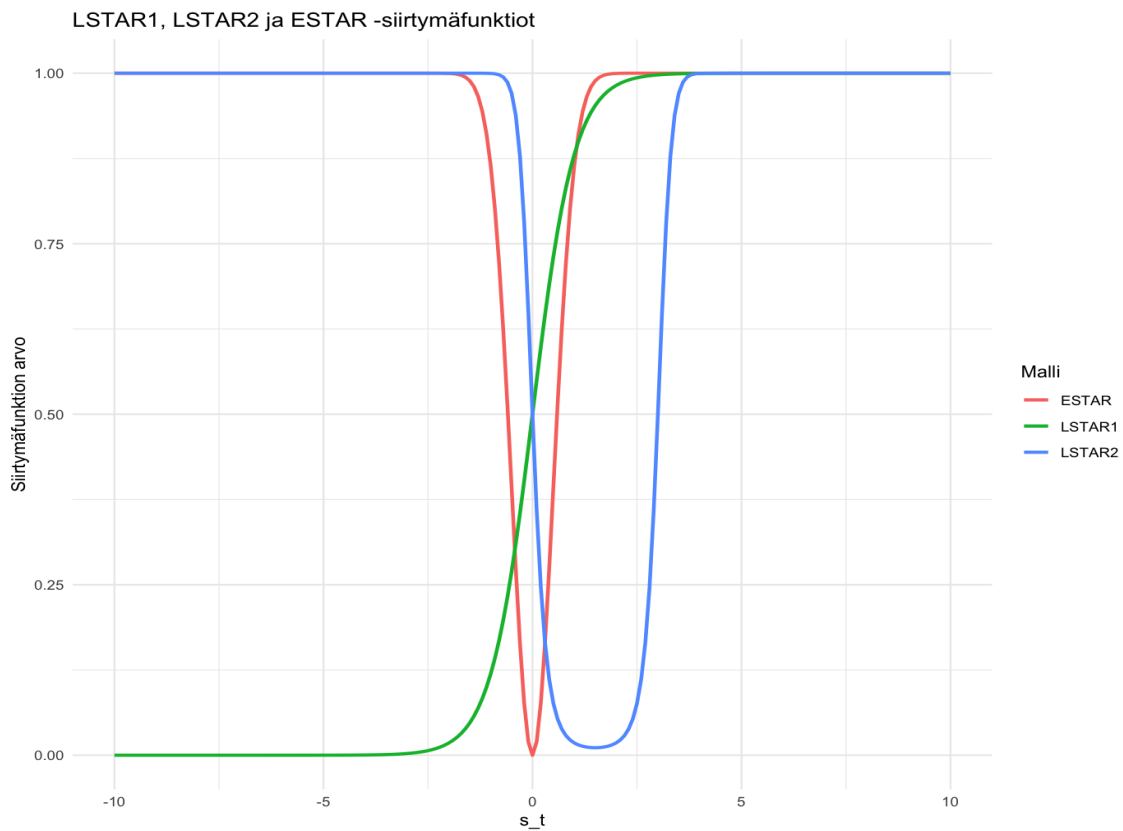
Siirtymäfunktion parametrivektori $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_K)$ sisältää kynnysparametrit, jotka määräävät, missä kohdassa tilojen välinen siirtymä tapahtuu. Parametrien järjestyksen tulee toteuttaa ehto $c_1 \leq \dots \leq c_K$. Parametri $\gamma > 0$ kuvaa siirtymän jyrkkyyttä; mitä suuremman arvon γ saa, sitä nopeammin siirtymä tapahtuu. Logistisen siirtymäfunktion (4) tulo-operaattorin yläraja K määrittää tilojen määrän.

Eri K :n arvoilla saadaan erilaisia logistisia siirtymäfunktioita, joissa parametrien muuttuminen tapahtuu eri tavoin. Kun $K = 1$, mallissa on kaksi tilaa, ja parametrit muuttuvat monotonisesti Φ :n ja $\Phi + \Psi$:n välillä. Jos $K = 2$, parametrit muuttuvat symmetrisesti kohdassa $(c_1 + c_2)/2$, jolloin logistinen siirtymäfunktio saavuttaa minimin. Tällöin $K = 2$ mallilla on kolme tilaa. Logistisen siirtymäfunktion (G_{L2})

minimi on välillä 0 ja $1/2$. Tarkemmin, G_{L2} :n minimiarvo on 0, kun γ lähestyy ääretöntä, ja $1/2$, kun $c_1 = c_2$. Logistisessa STAR-mallissa, jonka siirtymäfunktio on G_{L1} (LSTAR1), tilat ovat erilaisia. Toisaalta LSTAR2-mallissa, jossa siirtymäfunktio on G_{L2} , ensimmäinen ja kolmas tila ovat samanlaiset, ja keskimäinen eli toinen tila poikkeaa näistä. Muuttuja s_t on havaittavissa oleva vaihtomuuttuja, joka määrittää, milloin siirtymä tapahtuu. Siirtymäfunktio G_L ja G_E saavat arvot väliltä 0 ja 1 ja päätoimisesti säätelevät siirtymän tasaisuutta. (Teräsvirta 1994.)

Kun $\gamma = 0$, siirtymäfunktio G saa arvon 0.5, jolloin malli pelkistyy lineaariseksi malliksi. Toisaalta, kun γ lähestyy ääretöntä, LSTAR1-malli muuttuu vaihtoregressioksi. Vaihtoregressio on STAR-mallin erikoistapaus, jossa parametrit vaihtuvat äkillisesti eikä tasaisesti siirtymäfunktion avulla. Sama pätee LSTAR2-malliin, mutta siinä on kolme tilaa kahden sijasta. G_{L2} siirtymäfunktioille on toinen vaihtoehto, joka on eksponenttinen siirtymäfunktio (5).

Eksponenttinen siirtymäfunktio (G_E) on symmetrinen pisteen $s_t = c$ ympärillä, ja sillä on lähes sama muoto kuin G_{L2} , vaikka funktioiden minimiarvot eroavat toisistaan. Eksponenttisen STAR-mallilla (ESTAR) on vähemmän estimoitavia parametreja, joten se on yksinkertaisempi kuin LSTAR-mallit. ESTAR-mallin haittapuolena on kuitenkin se, että kun γ lähestyy ääretöntä, $G_E = 0$ kohdassa $s_t = c$ ja muualla avaruudessa 1. Tämän vuoksi ESTAR ei sovellu LSTAR2-mallin vastineeksi tilanteissa, joissa γ on suuri ja c_2 ja c_1 ero on suuri.



Kuva 3: Siirtymäfunktiot

Kuvasta 3 nähdään, miten siirtymäfunctiot käyttäytyvät. Kaikissa siirtymäfunctioissa $\gamma = 2$, ja saavat arvot jatkuvasti nollan ja yhden välillä. Kuvan kynnysparametrin arvo on $c_1 = 0$, ja LSTAR2-mallin siirtymäfunktion (G_{L2}) toinen kynnysparametri on $c_2 = 3$. Kun $s_t = c_1$, niin $G_{L1} = 0.5$, mikä tarkoittaa, että LSTAR1-mallin epälineaarinen termi eli $\Psi \mathbf{z}_t$ saa kertoimeksi 0.5.

Toisaalta siirtymäfunctio $G_E = 0$, kun se saavuttaa kynnysparametrin c_1 . Tämä tarkoittaa, että ESTAR-mallissa parametri Ψ häviää, ja jäljelle jää vain lineaarinen termi $\Phi \mathbf{z}_t + \epsilon_t$. Kun siirtymäfunctio G_{L2} saavuttaa kynnysparametrin c_1 , se saa saman arvon kuin G_{L1} , mutta G_{L2} on laskeva functio kyseisessä kohdassa, kun taas G_{L1} on nouseva functio kaikkialla. LSTAR2-mallissa on kaksi kynnysparametria, ja kun siirtymäfunctio saavuttaa toisen kynnysparametrin c_2 , sen arvo on $G_{L2} = 0.5$.

Siirtymäfunctioiden tilat ovat hahmotettavissa kuvasta (3). ESTAR- ja LSTAR2-mallilla on kolme tilaa, joista keskimäinen tila on erilainen. ESTAR-mallissa keskimäinen tila on kapeampi ja antaa mallille voimakkaan symmetrisen siirtymän kynnysparametrin c_1 ympärillä. LSTAR2-mallissa siirtymä kynnysparametrien c_1 ja c_2 välillä on hitaampaa, mikä antaa selkeämmän erotuksen kolmen tilan välillä. Siirtymäfunctio G_{L1} muuttaa tasaisesti tilan 1 parametrit tila 2 parametreiksi, mutta G_{L2} ja G_E parametrit muuttuvat kahdesti. (Teräsvirta 1994.)

STAR-malli on sopiva työkalu maannousun mallintamiseen sen kyvyn vuoksi käsitellä tilojen välistä siirtymiä. Maannousu ja merennousu vaikuttavat vedenkorkeusarvoihin, mutta niiden voimakkuus vaihtelee ajan myötä. Merennousu on kiihtynyt ilmastomuutoksen seurauksena, mikä muuttaa vedenkorkeuden vaihtelun dynamiikkaa. Tehtävänä on mallintaa siirtymää ajanjaksolle ennen ilmastomuutosta ja ajanjaksolle, jolloin ilmastomuutos aiheuttaa suurempia muutoksia vedenkorkeuteen.

Lisäksi STAR-malli pystyy mallintamaan mahdollisen kolmannen tilan, joka voi syntyä, kun ilmastomuutoksesta johtuva merennousu kiihtyy tarpeeksi ja maannousun vaikutus vedenkorkeuteen muuttuu häviävän pieneksi. STAR-mallia voidaan mukauttaa uusiin skenaarioihin aina, kun vedenkorkeuden vaihtelun dynamiikka muuttuu.

3.3 Mallin määrittely ja estimointi

3.3.1 Mallin määrittely

STAR-mallin siirtymäfunctioksi valitaan logistinen siirtymäfunctio, jonka $K = 1$ (G_{L1}). Valinta perustuu siihen, että LSTAR1-mallissa on kaksi tilaa. Luontaisesti mallin tilat ovat ennen ilmastomuutosta ja ilmastomuutoksen jälkeen. Kuitenkin, jos valintaa ei pystytä tekemään tässä vaiheessa, niin voidaan eri siirtymäfunctiot mallintaa, ja vasta arvionnin aikana verrata mallit keskenään ja valita malli, joka parhaiten estimoi maannousun (Teräsvirta et al. 2010).

Maannousun mallinnuksessa kaavan (3) muuttuja y_t on vedenkorkeus hetkellä t . LSTAR1-mallissa $\mathbf{c} = c_1$, joka vastaa tiettyä vedenkorkeutta, jossa mallin parametrit siirtyvät tasaisesti. Siirtymäfunktion G_L (4) argumentti on $s_t = y_{t-d}$, missä d on positiivinen kokonaisluku. Koska s_t saa viipeillä d vedenkorkeusarvot niin vaihdot

tapahtuvat tietyissä korkeuksissa.

STAR-malli olettaa, että aikasarja on stationäärinen. Aikasarja on stationäärinen, kun sen keskiarvo ja varianssi ovat vakioita ajan kuluessa (Brockwell ja Davis 2002). Tämä tarkoittaa, että aikasarjan arvot vaihtelevat keskiarvon ympärillä siten, että vaihtelun voimakkuus, eli varianssi, pysyy vakiona. Stationäärisyys on yleinen oletus aikasarjamalleissa.

Jos aikasarjassa on trendi tai se on epälineaarinen, stationäärisyysoletus ei täyty. STAR-malli on kuitenkin erityinen tapaus, sillä sen periaate on kuvata epälineaarisuutta siirtymäfunktion avulla. Stationäärisyys voidaan tulkita paikallisesti kussakin tilassa. Mallin avulla voidaan olettaa, että aikasarja on stationäärinen tietyn tilan trendin ympärillä. STAR-mallissa kullakin tilalla on oma trendinsä, ja siirtymäfunktio kuvaa tilojen välistä siirtymää. Täten mallin käytössä riittää, että aikasarjan varianssi pysyy vakiona, vaikka trendit muuttuvat tilojen välillä. (Leybourne et al. 1998.)

Kuvasta (1) nähdään, että maannousun trendi laskee ajan myötä ja loivenee, kun siirrytään toiseen segmenttiin. Lisäämällä LSTAR1-malliin trendit molempiin tiloihin, $\tau_1 t$ ja $\tau_2 t$, voidaan STAR-mallilla kuvata maannousua.

LSTAR1-malli aikatrendillä näyttää tältä:

$$y_t = \Phi' \mathbf{z}_t + \tau_1 t + (\tau_2 t + \Psi' \mathbf{z}_t)(1 + \exp(-\gamma(s_t - c_1)))^{-1} + \epsilon_t. \quad (6)$$

Mallia (6) estimoidaan R:llä käyttäen valmista pakettia *tsDyn*. LSTAR1-malli on epälineaarinen malli. Ennen sen käyttöä täytyy todeta aineiston epälineaarisuus. Tätä varten STAR-mallille on kehitetty lineaarisuustesti, joka pätee myös LSTAR1-mallille. Lineaarisuuden testaus on hankalaa toteuttaa suoraan LSTAR1-mallille, sillä testattava parametrin arvo on parametriavaruuden reunalla.

Kun LSTAR1-mallin lineaarisuutta testataan, asetetaan nollahypoteesiksi $\gamma = 0$. Epästabiilisuutta aiheuttaa siirtymäfunktion parametrin γ :n reuna-arvo. Reuna-arvo eli $\gamma = 0$ muuttaa testisuure jakaumaa. Huomaa kaava (4) pätee, kun $\gamma > 0$. Kun $\gamma = 0$, niin $G_{L1} = 0.5$. Näin ollen parametrit Ψ , τ_2 ja c ei voida tunnistaa ja siirtymäfunktion parametreille on mahdotonta määrittää arvo.

Testisuureen jakauma pysyy muuttumattomana, kun LSTAR-mallia approksimoidaan Taylorin sarjalla. Approksimoimalla Taylorin sarjalla Lagrangen kerrointestin (LM-testi) testisuureen jakauma pysyy samana. Lagrangen kerrointestin periaate on lähteä liikkeelle nollahypoteesista eli estimoidaan lineaarinen malli ja lasketaan sen testisuure. Testisuure lasketaan uskottavuusfunktion gradientin avulla ja testisuure mittaa kuinka herkkä se on parametrien muutoksille. Uskottavuusfunktio kertoo, kuinka uskottavaa on havaita aineistoa, kun nollahypoteesin oletetaan olevan totta. Lagrangen kerrointesti on laaja aihe, ja lisää tästä löytyy lähteestä (Engle 1982).

Kolmannen asteen Taylorin sarja kehitetään nollahypoteesin ympärille. Malli näyttää Taylorin approksimaation jälkeen,

$$y_t = \beta_0' \mathbf{z}_t + \sum_{j=1}^3 \beta_j' z_t s_t^j + \epsilon_t^*, \quad t = 1, \dots, T \quad (7)$$

Kaavan virhetermi saadaan laskettua muodossa $\epsilon_t^* = \epsilon_t + R_3(\gamma, c_1, s_t) \psi_j' \mathbf{z}_t$, jossa

jäännöstermi $R_3(\gamma, c_1, s_t)$ syntyy approksimoinnin ohella. Apumallia (7) testataan Lagrangen kerrointestillä. Nollahypoteesi on

$$\bullet \quad H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \iff \gamma = 0,$$

jolloin siirtymäfunktio $G = 0$ (Hartmann et al. 2023). Testisuure on $LM = T(SSR_0 - SSR_1)/SSR_0$, ja testisuure seuraa F -jakaumaa vapausasteella $3p$ ja $T - 4p - 1$, jossa p on viipeiden määrä $\mathbf{z}_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$:ssä. Lineaarisen mallin jäännösneliösumma SSR_0 lasketaan nollahypoteesin H_0 nojalla, ja SSR_1 on epälineaarisen mallin jäännösneliösumma, eli kaavan (7) jäännösneliösumma ilman rajoitteita.

Kun testisuure on laskettu, lasketaan testin p -arvo. Merkitsevyystaso tässä ja kaikissa muissa testeissä on 0.05. Jos p -arvo on pienempi kuin merkitsevyystaso, niin on riittävästi todisteita nollahypoteesin hylkäämiseen.

3.3.2 Estimointi

Parametrit estimoidaan suurimman uskottavuuden menetelmällä sovittamalla ensin lineaarinen malli. Estimointia varten on käytettävissä valmis R-paketti *tsDyn*, ja mallin estimointi tehdään käyttämällä funktioita *lstar* (Di Narzo et al. 2015).

Epälineaarisuuden takia joudutaan iteroimaan kaikki estimaatit. Numeerisilla algoritmeilla etsitään optimaaliset estimaatit, jotka maksimoivat uskottavuusfunktion. Parametreille on annettava alkuarvot ennen iterointia, jotka saadaan sovittamalla ensin lineaarinen malli. Lineaarinen malli saadaan pitämällä γ ja \mathbf{c} kiinteinä, jolloin siirtymäfunktio on vakio (4) ja (5). Koska epälineaariset rakenteet kuvataan siirtymäfunktion avulla, mallin parametrit ovat lineaarisia siirtymäfunktion ollessa kiinteä, ja parametrien estimointi vastaa lineaarisen mallin parametrien estimointia. Rakentamalla siirtymäfunktion parametrien (γ, c_1) tai $K = 2$ tapauksessa (γ, c_1, c_2) ympärille ruudukko voidaan käydä läpi mahdolliset estimaattiarvot, jotka ovat ruudukon sisällä, ja näin löytää optimi.

Ruudukon rakentamisen yhteydessä on muistettava standardoida siirtymäfunktio jakamalla eksponentti muuttujan s_t :n otoskeskihajonnalla. Standardointi tehdään, koska parametri γ ei ole skaalausvapaa, eli se riippuu aineiston skaalauksesta. Siirtymäfunktio on $G(\gamma, \mathbf{c}, s_t) = \left(1 + \exp \left\{ -\frac{\gamma}{\hat{\sigma}_s^K} \prod_{k=1}^K (s_t - c_k) \right\}\right)^{-1}$, missä $\hat{\sigma}_s^K$ on siirtymämuuttujan s_t otoskeskihajonta. Parametrit Φ ja Ψ estimoidaan ehdolla, että siirtymäfunktion parametrien estimaatit on löydetty ja pidetään kiinteinä. Koko prosessi toistetaan jokaiselle ruudukon sisällä olevalle mahdolliselle estimaattiarvolle, ja estimoidaan Φ ja Ψ sekä lasketaan jäännösneliösumma. Kun jokaiselle arvolle on laskettu jäännösneliösumma, valitaan estimaatit, jotka minimoivat jäännösneliösumman.

Optimointi tehdään numeerisilla algoritmeilla, mikä tarkoittaa, että optimia ei aina löydy tai sen löytäminen on hankalaa. Yksi yleinen numeerinen ongelma syntyy, kun γ :n estimaatti on hyvin suuri ja malli muistuttaa vaihtoregressiota. Tällöin γ :n estimointi lyhyissä aineistoissa on vaikeaa, koska kynnysparametrin läheisyydessä kaarevuuden laskeminen vaatii suuren määrän datapisteitä. Numeerinen ongelma

ilmenee $\hat{\gamma}$:n keskivirheessä ja p -arvossa. Tilastotieteessä, jos estimaatin p -arvo on suurempi kuin valittu merkitsevyystaso 0.05, se tulee jättää pois mallista. Kuitenkin $\hat{\gamma}$:n pois jättäminen mallista johtaisi lineaariseen malliin. On tärkeää pitää tämä mielessä, jos estimoinnin jälkeen $\hat{\gamma}$ ei ole tilastollisesti merkittävä, sillä se ei tarkoita, että γ :n täytyy poistaa mallista. (Teräsvirta et al. 2010.)

4 Tulokset

4.1 Estimoinnin tulokset

Ennen mallin rakentamista suoritetaan testi lineaarisuutta vastaan. Testiin käytetään *terasvirta.test*-funktioita, joka kuuluu *tseries*-pakettiin. Testisuureen arvoksi saatiin $F = 6.9$, ja F -testin vapausasteet ovat 3 ja 243. Testin p -arvo = 0.0012, mikä on pienempi kuin valittu merkitsevyystaso 0.05. Koska p -arvo on pienempi kuin merkitsevyystaso, on riittävästi todisteita hylätä nollahypoteesi. Tämä tarkoittaa, että maannousua voidaan kuvata epälineaarisella menetelmällä. Aineistossa havaittavat epälineaariset rakenteet tekevät STAR-mallin käytöstä perusteltua.

Aineistoon sovitetaan LSTAR1-malli. Ennen mallin estimointia määritellään mallin parametrit, kuten viivearvo p , AR-osan kertaluku m , joka kertoo, kuinka monta edellistä havaintoa käytetään nykyisen arvon selittämiseen. Samoin määritetään siirtymäfunktion argumentin viivearvo d , joka kuvaa siirtymän viivettä. Tässä tapauksessa viivearvo $p = 1$, AR-osan kertaluku $m = 1$, ja siirtymäfunktion argumentin viivearvo $d = 1$. Lisäksi funktiolle on määriteltävä iterointien maksimimäärä sekä siirtymäfunktion alkuarvot ruudukon muodostamista varten. Iterointien maksimimääräksi asetettiin 20 000, ja ruudukon arvot vaihtelevat välillä 1–100.

Malli saavutti iteraation jälkeen optimin ja estimoidut parametrit ovat:

Taulukko 1: Estimoidut parametrit

Parametri	Estimaatit	Keskivirhe	t-arvo	$\Pr(> z)$
Φ_0	269.49	24.85	10.85	$< 2 \times 10^{-16}$
τ_1	-0.36	0.035	-10.25	$< 2 \times 10^{-16}$
Φ_1	0.036	0.089	0.40	0.69
Ψ_0	-34.29	35.23	-0.97	0.33
τ_2	-0.03	0.055	-0.55	0.58
Ψ_1	0.15	0.124	1.21	0.23
γ	60.37	232.73	0.26	0.80
c	234.10	0.12	1952.33	$< 2 \times 10^{-16}$

Taulukossa 1 on esitetty estimoitujen parametrien estimaatit, niiden keskivirhe, t -arvo ja p -arvo. Estimaatit $\hat{\Phi}_0$, $\hat{\tau}_1$ ja \hat{c} ovat tilastollisesti merkitseviä. Parametrien γ :n, Ψ_0 :n, ja Ψ_1 :n poistaminen palauttaisi mallin lineaariseen muotoon. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että maannousu olisi lineaarinen. On tärkeää muistaa, että γ parametrin estimoinnissa voi ilmetä numeerisia ongelmia. Kynnysparametri c ,

eli kynnysarvo, on 234.1. Kun merenkorkeus saavuttaa tämän kynnysarvon, mallin parametrien arvot ovat molempien tilojen parametrien keskiarvo. Parametrien alaindekseissä käytetyt numerot osoittavat, missä tilassa parametrit ovat voimassa: 0 viittaa ensimmäisen tilan parametreihin ja 1 toisen tilan parametreihin. Mallissa on kaksi tilaa, koska K :n arvoksi valittiin 1. Lisäksi testattiin, olisiko kolmen tilan jakaminen ($K = 2$) tilastollisesti perusteltua. Testi suoritettiin optimoinnin yhteydessä, mutta kolmatta tilaa ei havaittu.

Estimoitu malli on siis seuraava:

$$y_t = (269.49 + 0.036)y_{t-1} - 0.36t + (-0.03t + (-34.29 + 0.15)y_{t-1}) \cdot \frac{1}{1 - \exp\{-60.37(s_t - 234.10)\}} + \hat{\epsilon}_t, \quad (8)$$

ja jäännösten tunnuslukuja on taulukossa.

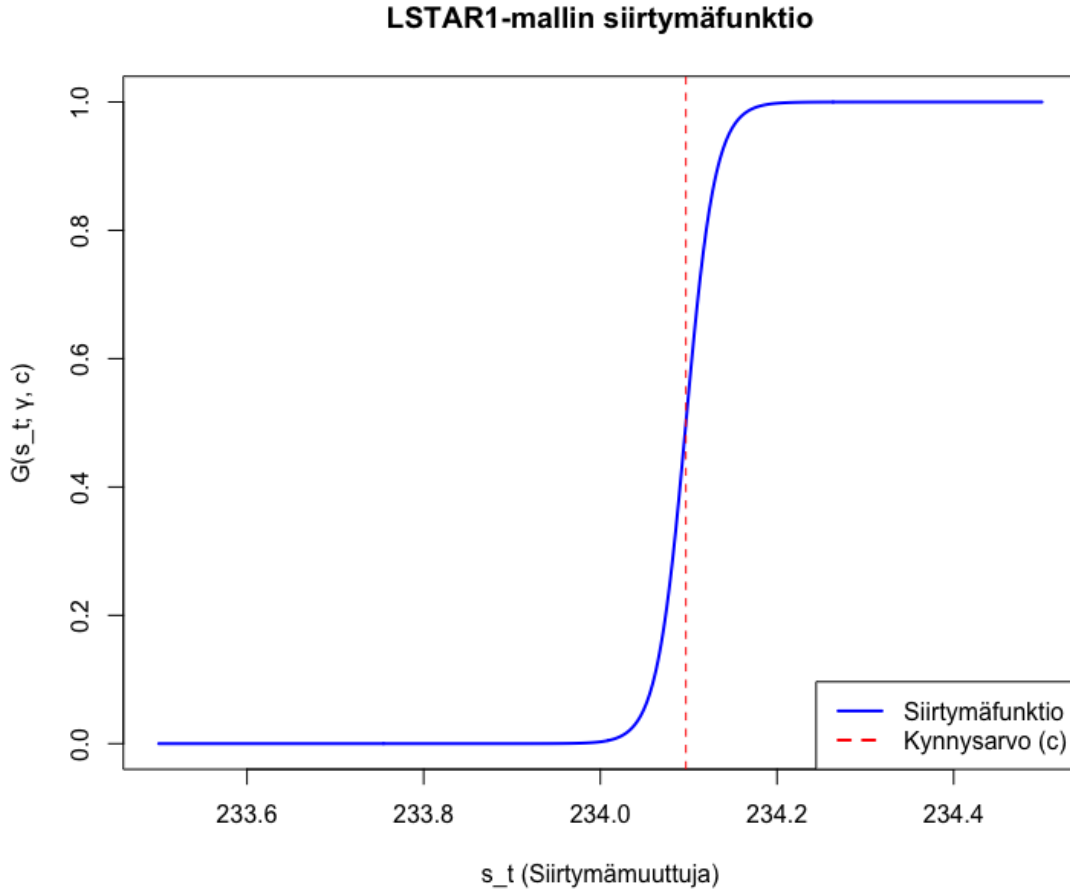
Taulukko 2: Jäännösten tunnuslukuja

Jäännös:	Minimi	1. kvartiili	Mediaani	3. kvartiili	Maksimi	varianssi
arvo	-17.15	-3.76	-0.59	3.86	13.95	33.97

Pelkästään näillä arvoilla ei voida väittää, ovatko $\hat{\epsilon} \sim iid(0, \sigma^2)$. Tämän varmistaminen vaatii tarkempia testejä ja virhetermin analyysiä. Liite [A1](#) antaa tarkemman kuvan jäännösdiagnostiikasta.

4.2 Mallin parantaminen

Mallin parantamista kokeiltiin eri lähtö arvoilla, mutta estimaatin $\hat{\gamma}$:n p -arvo on aina suurempi kuin 0.05. Malli antaa estimaatille $\hat{\gamma}$ arvon 60.37, joka on suuri arvo. Aiemmin mainitsin numeerisesta ongelmasta ja miten se näkyy estimointi arvoissa. $\hat{\gamma}$ ei ole tilastollisesti merkitsevä ja se on hyvin suuri, joten iteroinnissa optimiarvo ei löydetty $\hat{\gamma}$:lle ([Teräsvirta et al. 2010](#)).



Kuva 4: $G(s_t, 269.49, 234.10)$

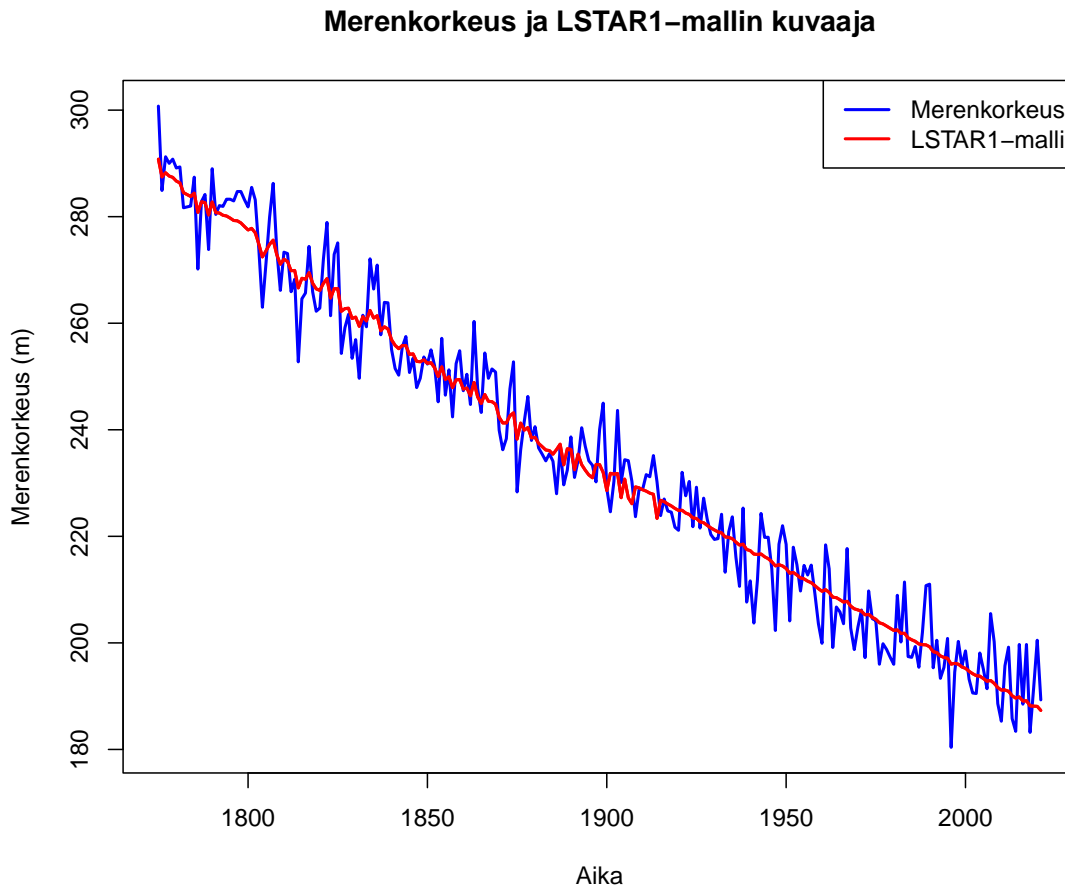
LSTAR1-mallin siirtymäfunktio voidaan hahmottaa kuvasta (4). Tilojen välinen siirtyminen tapahtuu korkeudella 234–234.2 metriä. Siirtymä on erityisen jyrkkä, sillä alle 20 cm:n vaihtelu merivedenkorkeudessa aiheuttaa täydellisen siirtymän toiseen tilaan. Kun otetaan huomioon, että merivedenkorkeus on koko aineiston aikana laskenut noin 100 metriä, 20 cm on hyvin pieni muutos

Vaikka aineisto on pitkä ja datapisteitä pitäisi olla riittävästi, on tärkeää huomata, miten aineistoa muokattiin ennen estimointia. Vuosikeskiarvon käyttö toi sekä hyötyä että haittaa. Vaikka vuosikeskiarvojen käyttö vähentää kausivaihtelua, se pienentää aineiston havaintojen määrää merkittävästi.

Kappaleessa (3.3.2) mainitaan, että parametrit Φ ja Ψ estimoidaan ehdolla, että siirtymäfunktion parametrit on löydetty. Koska $\hat{\gamma}$:n arvoa ei kuitenkaan löydy, myöskään näiden parametrien estimaatteja ei voida määrittää. Vaikka parametrien Φ ja Ψ estimaatit eivät ole tilastollisesti merkitseviä, niitä ei voida jättää pois mallista, sillä *lstar* funktio edellyttää näitä parametreja toimiakseen.

Mallin sovite piirrettiin vedenkorkeuden päälle kuvastamaan, kuinka hyvin malli vastaa oikeaa vedenkorkeutta.

Kuvasta (5) näkyy, miten malli kuvaa maannousua. LSTAR1-malli kuvaa maan-



Kuva 5: LSTAR1-mallin kuvaaja

nousua kohtuullisen tarkasti. Verrattuna lineaariseen malliin (kuva 1), STAR-malli huomioi hieman paremmin lyhyet vaihtelut ja mallin siirtymät tapahtuvat tasaisemmin kuin lineaarisessa mallissa. Kuitenkin vaihtelujen mallinnus ei ollut niin tarkkaa kuin alun perin oletettiin sen olevan

4.3 Vertailun tulokset

Kandidaattityön tärkein osuus oli mallintaa maannousu STAR-mallilla, mutta tarkoituksena oli myös verrata mallia aiempiin malleihin, kuten lineaariseen malliin. Vertailu tehtiin laskemalla *Akaiken informaatiokriteerin* (AIC) ja *Bayesin informaatiokriteerin* (BIC) arvot. AIC- ja BIC-arvot kuvaavat mallin hyvyydestä ja yksinkertaisuudesta ja antavat näiden perusteella mallille pisteet (Burnham ja Anderson 2004). Pisteiden avulla voidaan verrata keskenään jopa hyvin erilaisia malleja.

AIC- ja BIC-pisteet saadaan laskettua seuraavilla kaavoilla,

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{L}),$$

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(\hat{L}),$$

joissa k on estimoitujen parametrien lukumäärä ja \hat{L} on kyseisen mallin maksimoitu uskottavuusfunktion arvo. LSTAR1-mallin AIC-arvo on 893.83 ja BIC-arvo 921.97. Lineaarisen mallin (1) AIC- ja BIC-arvot on laskettu molemmille segmenteille erikseen: ensimmäisen segmentin AIC-arvo on 725.45 ja toisen segmentin 883.80, kun taas BIC-arvot ovat vastaavasti 733.58 ja 892.58. Lineaarisen mallin AIC- ja BIC-arvot ovat pienempiä kuin LSTAR1-mallin vastaavat arvot, mikä viittaa siihen, että lineaarinen malli on tässä tapauksessa suositeltavampi.

5 Yhteenveto

Tässä kandidaatintyössä mallinnetaan maannousua STAR-mallilla ja verrataan sitä lineaariseen ja kvadraattiseen malliin. Ennen mallinnusta aineistoa käsitellään laskemalla vuosikeskiarvo ja paikkaamalla puuttuvat havainnot. Estimoitua mallia verrataan lineaariseen ja kvadraattiseen malliin. Työssä pohditaan estimoitujen parametrien arvoja ja niiden vaikutusta malliin.

Työn tulokseen vaikuttaa tilastollisesti ei-merkittävä $\hat{\gamma}$, mikä johtuu numeerisista ongelmista. Estimaatin $\hat{\gamma}$ poistaminen mallista johtaa lineaariseen malliin, mikä on ristiriidassa lineaarisuustestin tuloksen kanssa. Vaikka toimivaa mallia ei saatu, tiedetään, mitä seuraavaksi tulisi kokeilla. Jos mallinnusta halutaan jatkaa STAR-mallilla, havaintojen määrää tulisi lisätä. Se, mikä toimi Ekmanin tutkimuksessa – vuosikeskiarvojen käyttö – ei osoittautunut tässä tarkoituksessa soveltuvaksi. Kuukausikeskiarvojen käyttö voisi olla vaihtoehto, mutta tällöin kausivaihtelut on huomioitava.

Havaintojen määrän lisääminen ei kuitenkaan takaa mallin toimivuutta. Toinen lähestymistapa voisi olla mallin vaihtaminen. Esimerkiksi ydinregressiolla voidaan mallintaa epälineaarinen suhde selitettävän ja selittävän muuttujan välillä. Ydinregressio on parametriton menetelmä. Tässä työssä käytetyt menetelmät ovat parametrisia, joissa mallin parametrit estimoidaan ennalta määritellyn funktiomuodon perusteella. Parametrittomissa menetelmissä ei oleteta tiettyä funktiomuotoa, vaan pyritään suoraan löytämään funktio, joka parhaiten kuvaa muuttujien välistä suhdetta.

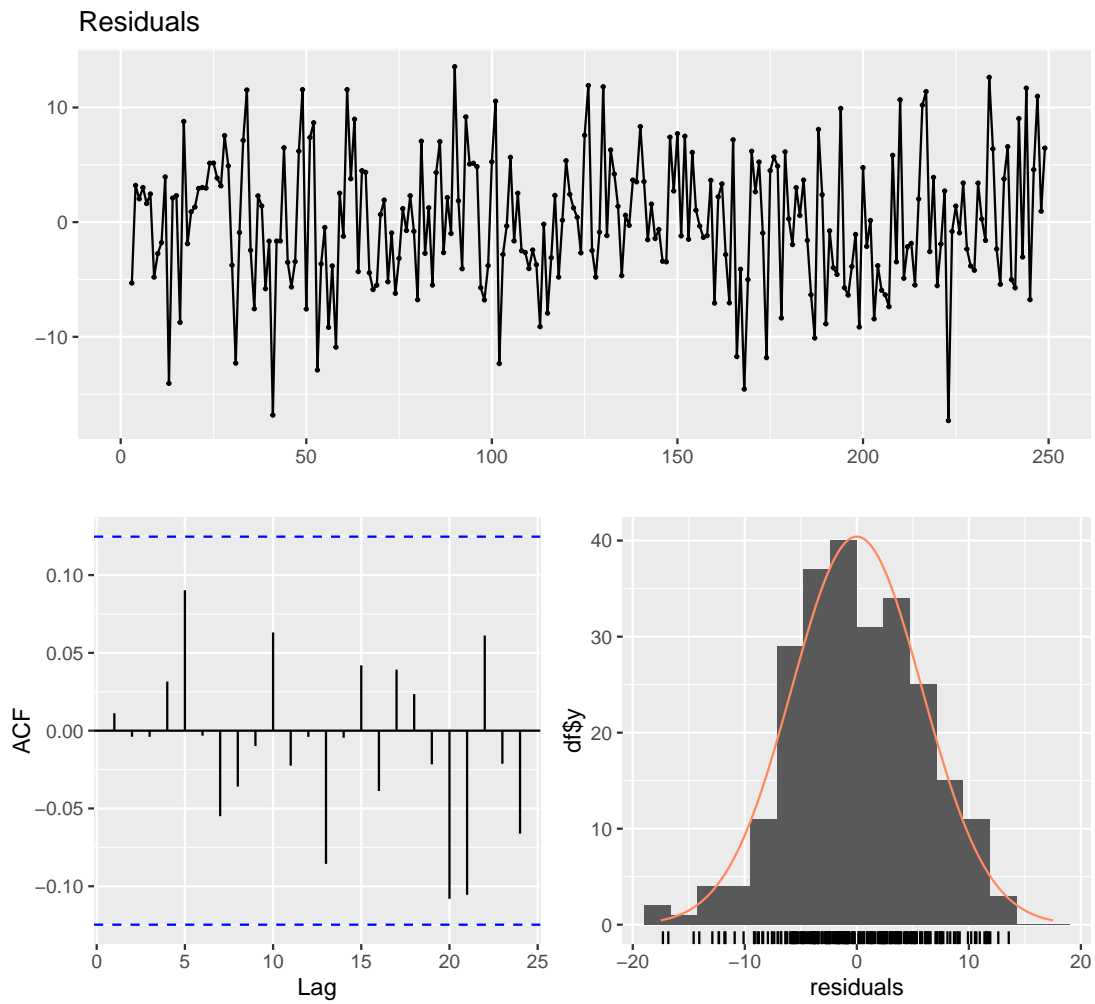
Työssä pohditaan tilojen määrää tulevaisuudessa ja sitä, miten kiihtyvä ilmastonmuutos voi synnyttää kolmannen tilan. STAR-malli ei kuitenkaan tämän tutkielman rajausten puitteissa osoittautunut järkeväksi malliksi. Toisaalta STAR-mallia ei tule sulkea pois maannousun mallinnusmenetelmistä, sillä aineiston rajauksia ja oletuksia muuttamalla – kuten käyttämällä kuukausikeskiarvoja vuosikeskiarvojen sijaan – voidaan hypoteettisesti ratkaista aiemmin mainittu numeerinen ongelma. On myös huomioitava, että STAR-mallilla on kirjallisuudessa onnistuttu mallintamaan hyvin monimutkaisia ilmiöitä, kuten lajien haavoittuvuutta (Dueker et al. 2023). STAR-mallin etu verrattuna lineaariseen malliin on selvä; lyhyet vaihtelut, jotka eivät tule esiin lineaarisessa mallissa, näkyvät STAR-mallilla selkeämmin.

Viitteet

- Peter J Brockwell ja Richard A Davis. *Introduction to time series and forecasting*. Springer, 2002.
- Kenneth P Burnham ja David R Anderson. Multimodel inference: understanding aic and bic in model selection. *Sociological methods & research*, 33(2):261–304, 2004.
- Antonio Fabio Di Narzo, Jose Luis Aznarte, ja Matthieu Stigler. Paketti ‘tsdyn’. 2015.
- Michael Dueker, Laura E Jackson, Michael T Owyang, ja Martin Sola. A time-varying threshold star model with applications. *Oxford Open Economics*, 2:odac012, 2023.
- Martin Ekman. *Long-term changes of interannual sea level variability in the Baltic Sea and related changes of winter climate*. Summer Institute for Historical Geophysics, 1998. URL <https://www.historicalgeophysics.ax/downloads/small-publications-05.pdf>.
- Martin Ekman. *The world’s longest sea level series and a winter oscillation index for northern Europe 1774-2000*. Summer Institute for Historical Geophysics Åland Islands, Finland, 2003. URL <https://www.historicalgeophysics.ax/downloads/small-publications-12.pdf>.
- Martin Ekman. *The changing level of the Baltic Sea during 300 years: a clue to understanding the Earth*. Summer Institute for Historical Geophysics Åland Islands, 2009. URL <https://www.historicalgeophysics.ax/downloads/the-changing-level-of-the-baltic-sea.pdf>.
- Robert F Engle. A general approach to lagrange multiplier model diagnostics. 20(1), 1982.
- Kai Hartmann, Joachim Krois, ja Annette Rudolph. Statistics and geodata analysis using r (soga-r). <https://www.geo.fu-berlin.de/en/v/soga-r/Basics-of-statistics/Hypothesis-Tests/Inferential-Methods-in-Regression-and-Correlation/Inferences-About-the-Slope/index.html>, 2023. Department of Earth Sciences, Freie Universitaet Berlin. Käytetty: 2024-06-11.
- Thomas F Jamieson. Iii.—on the cause of the depression and re-elevation of the land during the glacial period. *Geological Magazine*, 9(9):400–407, 1882.
- Stephen Leybourne, Paul Newbold, ja Dimitrios Vougas. Unit roots and smooth transitions. *Journal of time series analysis*, 19(1):83–97, 1998.
- Steffen Moritz ja Thomas Bartz-Beielstein. *imputeTS: Time Series Missing Value Imputation*, 2020. URL <https://cran.r-project.org/web/packages/imputeTS/imputeTS.pdf>. R paketti versio 3.1.

- Maaria Nordman, Aleksi Peltola, Mirjam Bilker-Koivula, ja Sonja Lahtinen. Past and future sea level changes and land uplift in the baltic sea seen by geodetic observations. Teoksessa *Beyond 100: The Next Century in Geodesy: Proceedings of the IAG General Assembly, Montreal, Canada, July 8-18, 2019*. Springer, 2020.
- Archie Paulson, Shijie Zhong, ja John Wahr. Modelling post-glacial rebound with lateral viscosity variations. *Geophysical Journal International*, 163(1):357–371, 2005.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2023. URL <https://www.R-project.org/>.
- Timo Teräsvirta. Specification, estimation, and evaluation of smooth transition autoregressive models. *Journal of the American Statistical Association*, 89(425): 208–218, 1994.
- Timo Teräsvirta, Dag Tjøstheim, ja Clive WJ Granger. *Modelling nonlinear economic time series*. Oxford University Press, 2010.
- PL Woodworth. A search for accelerations in records of european mean sea level. *International Journal of Climatology*, 10(2):129–143, 1990.

A Jäännösdiagnostiikka



Kuva A1: LSTAR1-mallin jäännösdiagnostiikka