

RC-kredsløb

Analyse og Python-simulering

Gruppe B.355

18. december 2020

P1-projekt





Det Ingeniør- og Naturvidenskabelige Fakultet

Aalborg Universitet

www.aau.dk

AALBORG UNIVERSITET

STUDENTERRAPPORT

Titel:

RC-kredsløb

Tema:

Analyse og Python-simulering

Projektperiode:

Oktober-december 2020

Projektgruppe:

B.355

Deltagere:

Anders Brøsted Jensen

Christian Dausel Jensen

Nikolai Lund Kühne

Sidse Sofie Haumann Mortensen

Sif Bjerre Lindby

Stine Byrjalsen

Thorbjørn Korshøj Bording Nielsen

Vejledere:

Toke Christian Zinn

Josefine Holm

Oplagstal: 1

Sidetal: 78

Afleveringsdato:

18. december 2020

Rapportens indhold er frit tilgængeligt, men offentliggørelse (med kildeangivelse) må kun ske efter aftale med forfatterne.

Abstract

This project deals with RC circuits and the theory behind electrical circuits, ordinary differential equations, complex numbers, and the Laplace transform in order to analyze and verify certain theories regarding such circuits.

The first part of the project consists of an introduction to the theory behind electrical circuits and utilises this theory to delineate how RC circuits work in practice. Moreover, this part of the project also introduces the theory behind some solutions to ordinary differential equations (ODE's), calculations with complex numbers, and the utilisation of the Laplace transform to solve ODE's. The project encompasses a chapter analyzing RC circuits being charged and discharged where the theory regarding ODE's are implemented. Furthermore, this part of the project comprises an experiment on RC circuits using alternating current in order to verify the already derived formulas regarding the voltage across the capacitor in the RC circuit.

The second part of the project confirms the theory behind high-pass and low-pass filters where the mathematical models describing these filters have been verified in an experiment. Firstly, it has become evident that the theory regarding electrical circuits, ordinary differential equations, complex numbers, and the Laplace transform can be utilised to derive certain mathematical models and formulas for the voltage across a capacitor in RC circuits. This has been verified experimentally with a small percentile deviation for the main part of the experiment, for both the high- and low-pass filter. The exception being the end of the high-pass filter and the beginning of the low-pass filter, where the deviation went beyond the expected values. The results have proven to be acceptable, albeit the deviance problems concerning the high- and low-pass filter.

In sum, the project has shown that the experimental charge and discharge of a capacitor validates the mathematical theory. Correspondingly, the experimental values from a high- and low-pass filter validates the mathematical theory as well.

Forord

Dette projekt er udarbejdet i perioden oktober-december 2020 af gruppe B.355, som består af syv førstesemesterstuderende på Matematik-Teknologi ved det Ingenør- og Naturvidenskabelige Fakultet på Aalborg Universitet.

Vi vil skænke vores vejleder, Toke Christian Zinn, som har bidraget med kyndig vejledning og input gennem hele processen, en stor tak.

I projektet er der anvendt kildehenvisning efter IEEE-metoden, hvor kilder refereres i teksten med et tal i firkantede klammer. Henvisningerne fører til kildelisten, hvor kildens fulde reference står ud for tallet.



Anders Brøsted Jensen



Christian Dausel Jensen



Nikolai Lund Kühne



Sidse Sofie Haumann Mortensen



Sif Bjerre Lindby



Stine Byrjaßen



Thorbjørn Korshøj Bording Nielsen

Indhold

Forord	iv
1 Det initierende problem	1
1.1 Problemanalyse	1
1.2 Projektafgrænsning	1
1.3 Problemformulering	1
2 Elektriske kredsløb	2
2.1 Elektrisk strøm og spænding	2
2.2 Ohms lov	2
2.3 Kirchhoff's love	2
2.3.1 Kirchhoff's 1. lov	3
2.3.2 Kirchhoff's 2. lov	3
2.4 Kondensator	4
2.5 Jævnstrøm og vekselstrøm	4
2.6 RC-kredsløb	5
2.6.1 RC-filtre	5
3 Ordinære differentialequationer	8
3.1 Separation af variable	9
3.1.1 Separable differentialequationer	11
3.2 Lineære ordinære differentialequationer	14
4 Komplekse tal	17
4.1 Regneregler	18
4.2 Den komplekse eksponentialfunktion	21
5 Laplacetransformationer	23
5.1 Generelt om Laplacetransformationer	23
5.2 Eksistens af Laplacetransformationen	24
5.3 Regneregler for Laplacetransformationer	26
5.4 Laplacetransformation af første orden	27
5.5 Bevis for Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{f'\}(s)$	28
5.6 Bevis for Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s)$	29
5.7 Den inverse Laplacetransformation $\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$	31
5.8 Løsning af differentialequationer vha. Laplacetransformationen	33
6 Analyse af RC-kredsløb	35
6.1 Afladning af kondensator	35
6.2 Opladning af kondensator	37

7 Forsøg med op- og afladning af kondensator	39
7.1 Forsøgsbeskrivelse	39
7.2 Forsøgsopstilling	39
7.3 Udførelse	40
7.4 Simulering i Python	41
7.5 Deldiskussion	43
8 Analyse af høj- og lavpasfiltre	44
8.1 Sinuskurver	44
8.2 Lavpasfilter	45
8.3 Højpasfilter	48
8.4 Bodeplot	50
9 Forsøg med høj- og lavpasfiltre	51
9.1 Forsøgsbeskrivelse	51
9.2 Forsøgsopstilling	51
9.3 Udførelse	52
9.4 Simulering i Python	54
9.5 Deldiskussion	59
10 Konklusion	60
Litteraturliste	62
A Python Kode	64
A.1 Op- og afladning af en kondensator	64
A.2 Højpasfilter	68
A.3 Lavpasfilter	74

Symboliste

Symbol	Betydning
\mathbb{C}	Komplekse tal.
\mathbb{R}	Reelle tal.
\mathbb{R}^+	Positive, reelle tal, inklusive 0.
\mathbb{N}	Naturlige tal.
j	Den imaginære enhed.
\forall	For alle.
\subseteq	Delmængde.
$y^{(n)}$	Den n'te aflede af y.
$A \times B$	Det kartesiske produkt af mængderne A og B.
\mathcal{L}	Laplacetransformation.
\mathcal{L}^{-1}	Den inverse Laplacetransformation.

Tabel 1: Liste over symboler, der bruges i projektet.

Kapitel 1

Det initierende problem

1.1 Problemanalyse

Teknologi bliver en større og større del af vores hverdag i hele verden [8]. Computere, TV, smartphones, højttalere og alt andet teknologi, man bruger i hverdagen, har i hvert fald én fællesnævner: elektriske kredsløb. Et elektrisk kredsløb har forskellige funktioner afhængigt af komponenterne, der sættes i kredsløbet, samt placeringen af dem. De hyppigst brugte komponenter er transistoren, dioden, kondensatoren og modstanden. Kondensatoren samt modstanden anvendes i dette projekt i et såkaldt resistor-capacitor-kredsløb (RC-kredsløb). Modstanden begrænser strømstyrken gennem kredsløbet, mens kondensatoren op- og aflades over tid [17]. Samspillet mellem disse komponenter i forhold til op- og afladning af en kondensator er det, vi i dette projekt, vil undersøge.

De matematiske modeller, der skal bruges for at fremvise sådanne sammenhænge mellem elektriske komponenter, er vigtige for forståelsen af problemstillingen og implementeringen ude i den virkelige verden. Det, at kunne simulere eller forudsige, hvordan komponenter vil påvirke et kredsløb, giver producenten af eksempelvis fjernsyn mulighed for at vælge de korrekte elementer, der giver det skarpeste billede eller den bedste lyd [15]. Nogle af de mest brugbare indstillinger for RC-kredsløb er høj- og lavpasfiltre. Disse filtre tager et spændingssignal og filtrerer henholdsvis de højeste og laveste frekvenser fra i et bestemt interval. Denne funktionalitet bruges i mange elektroniske produkter, blandt andet i en subwoofer, hvor et lavpasfilter kun sender lavfrekvenssignaler gennem højttaleren, hvilket resulterer i den dybe bas [2].

1.2 Projektafgrænsning

I denne rapport arbejdes der med to overordnede emner: op- og afladning af en kondensator i et simpelt RC-kredsløb samt undersøgelse af forskellen mellem højpasfilterkredsløb og et lavpasfilterkredsløb med henblik på at undersøge, om hvorvidt det stemmer overens med teorien.

1.3 Problemformulering

Hvordan kan man ved hjælp af matematiske modeller og deres teori beskrive og beregne op- og afladningen af spændingen over en kondensator i et simpelt RC-kredsløb samt amplitude, faseforskydning og knækfrekvens ved høj- og lavpasfiltre?

Kapitel 2

Elektriske kredsløb

2.1 Elektrisk strøm og spænding

Dette afsnit er baseret på [12].

Den elektriske strøm opstilles som en funktion af tiden t . Ligning (2.1) stammer fra [12], Kapitel 1 Definition 1.1:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (2.1)$$

hvor den elektriske strøm til tiden t , i , er givet ved ændringen i ladning q i forhold til tiden t og måles i ampere (A).

Derudover er der også andre vigtige fysiske enheder, som arbejde og spænding. Betegnelsen w angiver arbejdet, der udføres for at flytte en positiv ladning igennem et element. Den elektriske spænding v ændrer sig over tid og er givet ved formlen:

$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq},$$

som stammer fra [12], Kapitel 1 Definition 1.2. Dette svarer til en ændring i arbejde delt med en ændring i ladning. Den elektriske spænding v beskriver altså den mængde arbejde, der skal udføres over tid, eller den mængde energi det kræver at flytte en ladning på 1 coulomb igennem et element og måles i volt (V).

2.2 Ohms lov

Dette afsnit er baseret på [14].

Ohms lov beskriver sammenhængen mellem strøm og spænding over en modstand. Den angiver, at spændingen over en modstand er proportional med strømmen igennem den. Modstanden er proportionalitetsfaktoren. Dette kan udtrykkes ved formlen:

$$v(t) = R \cdot i(t), \quad R > 0, \quad (2.2)$$

hvor v er spændingen til tiden t , R er modstanden målt i ohm (Ω), og i er strømmen til tiden t .

2.3 Kirchhoffs love

Dette afsnit er baseret på [9].

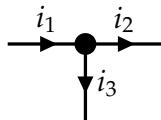
For at analysere et RC-kredsløb er det nødvendigt at kende til både Ohms lov og Kirchhoffs love. I dette afsnit vil Kirchhoffs to love blive beskrevet.

2.3.1 Kirchhoffs 1. lov

Kirchhoffs 1. lov kaldes også for strømloven eller knudepunktsgiveningen. Den beskriver, at summen af alle strømmene i et knudepunkt er lig med nul. Det kan skrives på følgende måde:

$$\sum_{k=1}^N i_k(t) = 0,$$

hvor N er antallet af grene forbundet til knudepunktet, og $i_k(t)$ er strømmen, der går gennem en knude til den pågældende gren, k , til et givet tidspunkt t . Loven gør det muligt at finde strømstyrken i komponenterne omkring et knudepunkt. Det kan forklares ud fra Figur 2.1, der viser et eksempel på et kredsløb med et knudepunkt og flere grene. Der er én strøm, der går ind i knudepunktet, og to strømme, der går ud.



Figur 2.1: Uddrag af kredsløbsskema med 1 knude og 3 grene, hvor hver gren har fået angivet en strøm. Strømmens retning angives med en pil.

På Figur 2.1 ses det, at knudepunktet deler strømmen. Den samlede strøm, der kommer ind i systemet, er i_1 . Strømmen deles herefter ud i strømmen i den lodrette og vandrette gren, i_2 og i_3 . For strømme pegende ind mod et knudepunkt opskrives strømmen med et negativt fortegn, $i_1 = -k$. For strømme pegende væk fra knudepunktet opskrives strømmen med et positivt fortegn, $i_2 + i_3 = k$. Det kan derfor ses, at summen af alle strømmene, der kommer ind i knudepunktet, og strømmene, der kommer ud, er lig nul. Ud fra eksemplet på Figur 2.1 ses, at udtrykket for strømloven kan opstilles på følgende måde:

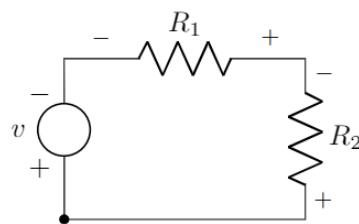
$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (2.3)$$

2.3.2 Kirchhoffs 2. lov

Kirchhoffs 2. lov, også kaldet spændingsloven eller maskeligningen, beskriver, at summen af spændingsforskellen i en løkke er lig nul. Det kan udtrykkes ved følgende formel:

$$\sum_{k=1}^N v_k(t) = 0,$$

hvor N er antallet af spændinger, og v_k er spændingsforskellen over den k 'te gren i en løkke til et givet tidspunkt t . Dette kan forklaries ud fra Figur 2.2, der beskriver et kredsløb bestående af én løkke med en spændingskilde v , og to modstande, R_1 og R_2 .



Figur 2.2: Kredsløb med en spændingskilde v , og to modstande R_1 og R_2 .

Kredsløbet aflæses i urets retning. Man starter i knudepunktet nederst i venstre hjørne, hvor den første komponent er spændingskilden. Her støder man først på et plus, der anses som en stigning i spænding over denne komponent. Den næste komponent er modstanden, R_1 , hvor man støder på et minus. Denne anses så for et spændingsfald over komponenten. Det samme gælder modstanden, R_2 . Herefter er man tilbage i knuden, hvorfør man kan opstille følgende udtryk for den samlede spænding i kredsløbet:

$$v - v_{R_1} - v_{R_2} = 0. \quad (2.4)$$

Hvis spændingen skulle måles i den anden retning, ville fortagnene for alle komponenternes spænding være modsat, og summen vil derfor stadig være nul.

2.4 Kondensator

Dette afsnit er baseret på [12], side 221.

En kondensator er en elektrisk komponent, der har evnen til at oplagre elektrisk ladning ved elektrisk spændingsforskell. Kondensatoren har en elektrisk kapacitans, der måles i farad (F). Man kan omskrive (2.1) til strømmen over kondensatoren på følgende måde:

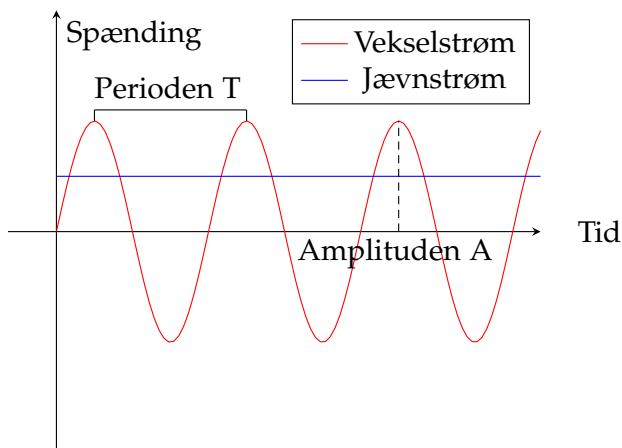
$$i_C(t) = C'_v(t),$$

hvor C er størrelsen på kondensatoren i form af komponentens kapacitans, F . Hvis strømmen over kondensatoren er konstant, kan strømmen beskrives på følgende måde:

$$i_C(t) = C \cdot v'(t). \quad (2.5)$$

2.5 Jævnstrøm og vekselstrøm

Jævnstrøm er en elektrisk strøm, der går i samme retning, hvorimod vekselstrøm er en elektrisk strøm, der veksler mellem en positiv maksimalværdi til en negativ minimalværdi. Det illustreres på Figur 2.3, hvoraf en sinuskurve fremgår. Denne har variablen tid, målt i sekunder, på førsteakse og spændingen, målt i enheden volt, på andenakse.



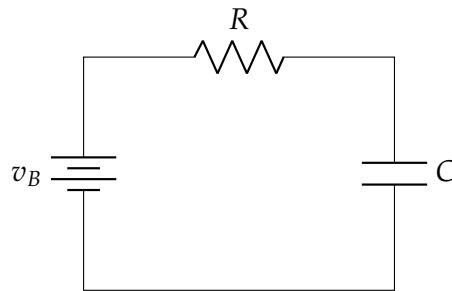
Figur 2.3: Spændingen som funktion af tid for jævn- og vekselstrøm.

Afstanden mellem toppene på kurven kaldes perioden, T , og antallet af perioder pr. sekund kaldes frekvens, f , og måles typisk i s^{-1} eller Hz. Højden til en bølgetop eller -bund på kurven er amplituden og vist ved den stiplede linje.

2.6 RC-kredsløb

Dette afsnit er baseret på [4], [20] og [21].

Et RC-kredsløb er et elektrisk kredsløb, som består af en kombination mellem modstandens størrelse R , og kondensatorens kapacitans C og sidst en strømkilde med spænding v_B . En opstilling af et simpelt RC-kredsløb kan se ud som på Figur 2.4.



Figur 2.4: RC-kredsløb med en modstand R , en kondensator C og en strømkilde med spændingen v_B .

Kondensatoren vil virke som en afbryder ved jævnstrøm og som en kortslutter ved vekselstrøm, da der ikke kan løbe strøm igennem kondensatoren. Tilsætter vi derimod en tom kondensator til en fast spænding, vil kondensatoren blive opladet og afladet gennem de modstande, der måtte være i kredsløbet.

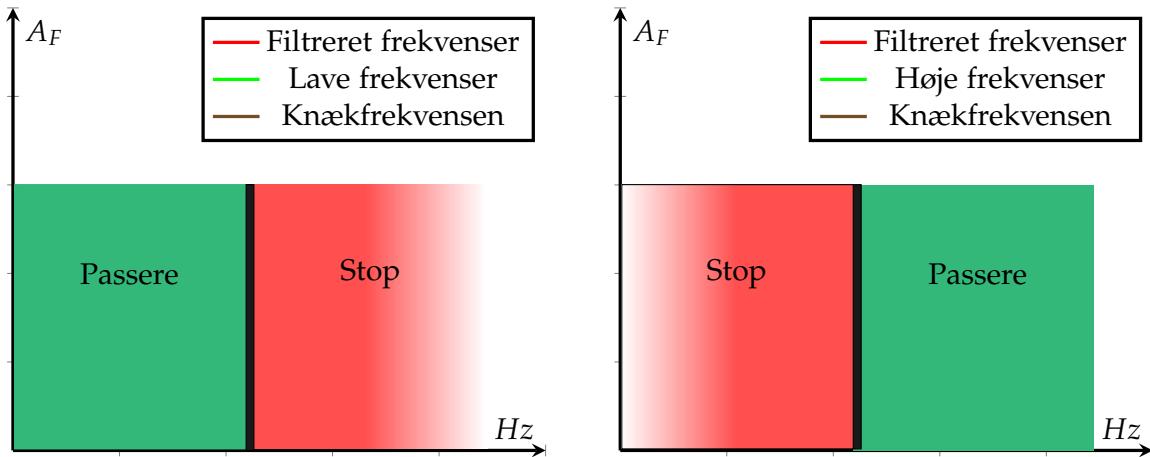
Opladning og afladning af kondensatoren vil gøres inden for en bestemt tid. Tiden afhænger af størrelsen på kondensatoren og modstandene i kredsløbet:

$$\tau = RC,$$

hvor τ er målt i en tidsenhed, typisk sekunder, R er i Ω , og C er i farad.

2.6.1 RC-filtre

Inden for RC-kredsløb findes RC-filtre, der filtrerer signaler ved at blokere nogle frekvenser og tillade andre. Disse signaler er ofte kunstigt frembragt i vores hverdag, f.eks. radiofrekvenser eller andet støj. De mest anvendte filtre er højpasfiltre og lavpasfiltre. Forskellen på høj- og lavpasfiltre er, at lavpasfiltret kun lader lave frekvenser passere, og at højpasfiltret kun lader høje frekvenser passere, hvilket fremgår af Figur 2.5a og 2.5b.



(a) Lavfrekvensinput, herved passerer kun frekvenssignaler fra 0 Hz til knækfrekvensen, mens alt over vil blive blokeret. Denne blokering ses markeret med "Stop". (b) Højfrekvensinput, herved passerer kun frekvenssignaler over knækfrekvensen, mens alt under vil blive blokeret. Denne blokering ses markeret med "Stop".

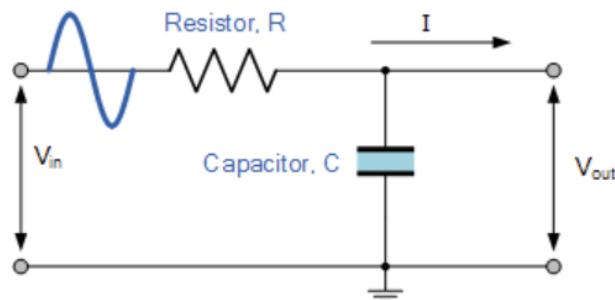
Figur 2.5: Forskel på høj- og lavpasfiltre i et RC-kredsløb.

Yderligere for at forstå figurerne, skal man vide, hvordan knækfrekvensen udregnes, og for hvert kredsløb gælder følgende formel [21]:

$$f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau} Hz. \quad (2.6)$$

Et passivt filter består af komponenter som modstande, kondensatorer og spoler og har ingen forstærkningselementer som eksempelvis transistorer. Derfor vil dets output blive mindre end dets input.

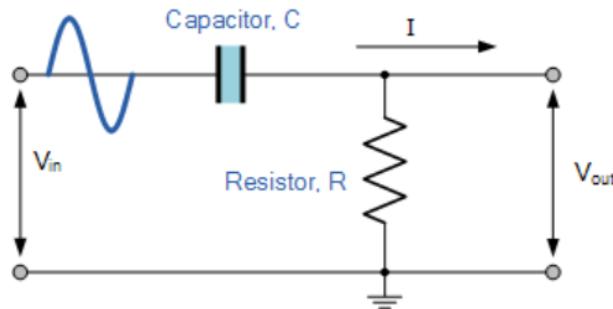
Afhængig af hvordan modstanden og kondensatoren forbinderes i forhold til indgangssignalet og filterets output, vil det resultere i enten et højpasfilterkredsløb eller et lavpasfilterkredsløb. På Figur 2.6 ses et lavpasfilterkredsløb. I denne type lavpasfilterkredsløb påføres indgangssignalet på både modstanden og kondensatoren, mens udgangssignalet (spændingsforholdet) kun måles over kondensatoren. Udgangsspændingen afhænger derfor også af både tidskonstanten og frekvensen af indgangssignalet.



Figur 2.6: Kredsløbsopstilling af et lavpasfilter. Denne figur er fra [21].

I modsætningen til lavpasfilterkredsløbet, viser Figur 2.7 opsætningen af et højpasfilterkredsløb, hvor kondensatoren er placeret først i kredsløbet. Da kondensatoren blokerer

for alle lavfrekvenser, og alle signaler skal passere kondensatoren først, så er det kun de højfrekvente signaler, der kan passere. Højpasfiltre anvender de samme komponenter som lavpasfiltre, men spændingsforholdet måles i stedet over modstanden.



Figur 2.7: Kredsløbsopstilling af et højpasfilter. Denne figur er fra [20].

Kapitel 3

Ordinære differentialligninger

I denne del af projektet vil der gennemgås de mest gængse differentialligninger og deres løsning. Dette afsnit er baseret på [1], [5], [6], [7], [16], [23], [24] og [27].

Før vi behandler differentialligninger, skal vi beskrive, hvad de egentlig er.

Definition 3.1 er baseret på [5], Definition 1.1.

Definition 3.1 (Ordinære differentialligninger)

Lad $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval (a, b) , hvor a eller b kan være uendelig. Lad så $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ være en delmængde, hvor $n \in \mathbb{N}$. Lad $F : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion defineret ved $(x, z, z_1, \dots, z_n) \mapsto F(x, z, z_1, \dots, z_n)$ sådan at F netop ikke er en konstant funktion i variablen z_n . Vi definerer da en n 'te ordens ordinær differentialligning til at være på formen:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \quad (3.1)$$

hvor notationen $y^{(n)}(x)$ betegner den n 'te afledede af en ukendt funktion $x \mapsto y(x)$ ift. variablen x .

I de fleste tilfælde, er $\Omega = \mathbb{R}^2$, da det er her, de fleste simple funktioner er defineret. Da definitionen er meget implicit, vælger vi ofte at omskrive vores definition til noget, der ligner de differentialligninger, vi arbejder med, ved at isolere det led af højeste orden $y^{(n)}(x)$. Dette kræver dog, at vi kan løse den implicitte differentialligning i (3.1) for $y^{(n)}(x)$, hvorfor det antages, at dette kan gøres. Vi kan så skrive:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right).$$

Dette kaldes ordinære differentialligninger på normalform.

Da det er relativt kompliceret at give og forstå den formelle definition af en differentialligning, eksemplificeres vores definition via Eksempel 3.1.

Eksempel 3.1

Lad $\mathbb{I} = (0, 1)$ og $\Omega = \mathbb{R}^2$. Vi har en funktion $F : \mathbb{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ som er defineret ved:

$$F(x, z, z_1, z_2) = z_2 + z.$$

Dette giver os følgende differentialligning:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) = y''(x) + y(x) = 0$$

Her er det tydeligt, at funktionerne $y_1, y_2 : (0, 1) \rightarrow (-1, -1)$ defineret ved:

$$y_1(x) = \sin(x),$$

og:

$$y_2(x) = \cos(x)$$

opfylder differentialligningen for alle $x \in (0, 1)$, da:

$$y_1''(x) + y_1(x) = -\sin(x) + \sin(x) = 0$$

og:

$$y_2''(x) + y_2(x) = -\cos(x) + \cos(x) = 0.$$

Her kalder vi y_1 og y_2 for løsninger til differentialligningen. Dette motiverer Definition 3.2.

Vi vil definere, hvad der menes med løsningen til en differentialligning. Definition 3.2 er baseret på [5], Definition 1.3.

Definition 3.2 (Løsning til ordinære differentialligninger)

En reel funktion ϕ er løsningen til en ordinær differentialligning som set i (3.1), hvis ϕ er n -gange kontinuert differentiabel på \mathbb{I} og hvis:

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x), \dots, \phi^{(n)}(x)\right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{I}.$$

I denne opgave vil det senere kræves, at vi kan løse bestemte differentialligninger. Nogle af disse specifikke regnemetoder og løsninger gennemgås i kapitlet fremadrettet og opstilles som sætninger, der skal bevises.

3.1 Separation af variable

Dette afsnit er baseret på [27].

Vi vil først indføre Analysens Fundamentalsætning, da vi skal bruge den i de følgende beviser.

Sætning 3.1 (Analysens Fundamentalsætning)

Lad $\mathbb{I} = [a, b]$. Hvis $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert på \mathbb{I} , da er funktionen F defineret ved:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad a \leq x \leq b, \quad (3.2)$$

hvor $F(x)$ er kontinuert og differentiabel på (a, b) og $F'(x) = f(x)$.

Herfra kan vi udlede, at en funktion er integrabel, hvis den er kontinuert på et begrænset interval. Det betyder, at enhver funktion, der opfylder disse kriterier, har en stamfunktion.

Vi skal senere løse en bestemt differentialligning: den seperable differentialligning. Dog skal vi indføre det ubestemte integral samt stamfunktioner, da disse vil blive brugt fremadrettet. Definition 3.3 stammer fra [23], Kapitel 4.

Definition 3.3

Lad $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$. Da er funktionen $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ en stamfunktion til $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, hvis:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b). \quad (3.3)$$

Herfra vil man indse, at der eksisterer uendelig mange stamfunktioner, hvis blot én stamfunktion eksisterer, da en konstant differentieret giver 0.

Eksempelvis er både $G(x) = 2x + 1$ og $H(x) = 2x$ stamfunktion til $f(x) = 2$. Dette motiverer Sætning 3.2.

Sætning 3.2 og Bevis for Sætning 3.2 stammer fra [23], Kapitel 4.

Sætning 3.2

Lad $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$ og $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ være en funktion. Lad $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ være en stamfunktion til f , da er $G : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved:

$$G(x) = F(x) + c,$$

en stamfunktion til f for ethvert $c \in \mathbb{R}$.

Bevis

Vi antager, at F er en stamfunktion til f og husker fra (3.3), at hvis $G'(x) = f(x)$, da er det en stamfunktion. Vi ser derfor på:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Da $G'(x) = f(x)$ er G en stamfunktion til f , og der eksisterer uendelig stamfunktioner til enhver funktion, der blot har én stamfunktion. ■

Ud fra dette kan det også bevises, at hvis to funktioner er stamfunktioner til en tredje funktion, da er de på samme form med konstanten c som forskel.

Vi definerer nu det ubestemte integrale.

Definition 3.4 stammer fra [23], Kapitel 4.

Definition 3.4

Lad $\mathbb{I} = (a, b) \subset \mathbb{R}$ og $a < b$. Lad F og $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuerte og differentiable på \mathbb{I} . Lad også F være en stamfunktion til f på \mathbb{I} jævnfør Definition 3.3. Vi definerer da det ubestemte integral ved:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Fremadrettet, når der opstilles ubestemte integraler, er det dermed Definition 3.4, der anvendes. Desuden skal det bemærkes, at integralet i Definition 3.4 ikke er et rigtigt integral, men blot en notation for stamfunktioner. Da vi på nuværende tidspunkt har defineret ordinære differentialligninger og deres løsninger, vil vi se på bestemte differentialligninger samt deres løsninger, hvilket skal bruges til udledninger af spændingen over en kondensator i et RC-kredsløb.

3.1.1 Separable differentialligninger

Vi ønsker en regnemetode til at løse differentialligninger på formen:

$$y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x),$$

da denne type differentialligning optræder senere.

Sætning 3.3 og Bevis for Sætning 3.3 er baseret på [7], Sætning 1.1 og [16], Sætning og Bevis 1.3.2 og [24], Sætning 2.4.1.

Sætning 3.3

Lad to åbne intervaller $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subseteq \mathbb{R}$. Lad $h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ være kontinuerte funktioner. Lad $H : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ være en stamfunktion til h og $G : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ være en stamfunktion til $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$, og lad $\mathbb{I}^* \subseteq \mathbb{I}$. En kontinuert differentiabel funktion $y : \mathbb{I}^* \rightarrow \mathbb{J}$ er da en løsning til:

$$y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x), \quad (3.4)$$

hvis og kun hvis:

$$G(y(x)) = H(x) + c, \quad \forall x \in \mathbb{I}^*, \quad (3.5)$$

hvor $c \in \mathbb{R}$.

Bevis

Det, som vi helt konkret skal frem til er, at hvis y løser (3.5), så er det en løsning til vores differentialligning (3.4). Vi skal også vise, at hvis y er en løsning til differentialligningen (3.4), så holder (3.5).

Vi starter med at vise, at hvis y er en løsning til differentialligningen (3.4), så holder (3.5). Først lader vi vores y være en løsning til differentialligningen. Vi kigger nu på vores differentialligning og dividerer med $g(y(x))$ på begge sider af lighedstegnet:

$$y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x),$$

hvilket giver:

$$y'(x) \cdot \frac{1}{g(y(x))} = h(x). \quad (3.6)$$

Vi har fra vores Sætning 3.3, at H er en stamfunktion til h på \mathbb{I} og at G er en stamfunktion til $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$, hvorfor vi jævnfør Definition 3.3 har, at:

$$H'(x) = h(x), \quad (3.7)$$

og:

$$G'(y(x)) = \frac{1}{g(y(x))}. \quad (3.8)$$

Vi indstætter (3.7) og (3.8) i (3.6), og vi får, at:

$$y'(x) \cdot G'(y(x)) = H'(x). \quad (3.9)$$

Vi indser, at venstre side af lighedstegnet kan omskrives vha. kæderegralen, da:

$$(G(y(x)))' = y'(x) \cdot G'(y(x)). \quad (3.10)$$

Herfra anvender vi (3.10) til at ændre venstre side af lighedstegnet i (3.9):

$$(G(y(x)))' = H'(x).$$

Vi subtraherer nu $H'(x)$ på begge sider af lighedstegnet og husker, at differentiation er en lineær operator, samt at hvis noget differentieret er lig nul, er det en konstant:

$$\begin{aligned} (G(y(x)))' &= H'(x) && \Leftrightarrow \\ (G(y(x)) - H(x))' &= 0 && \Leftrightarrow \\ G(y(x)) - H(x) &= c && \Leftrightarrow \\ G(y(x)) &= H(x) + c \end{aligned}$$

Ergo har vi vist, at hvis y løser differentialligningen (3.4), da gælder (3.5). Vi skal nu omvendt vise, at hvis en kontinuert differentiabel funktion y løser (3.5), så er det en løsning til differentialligningen. Vi antager, at y opfylder (3.5), hvorfor vi kigger på (3.5) ved at differentiere y , hvilket kan gøres, da den er antaget kontinuert differentiabel:

$$(G(y(x)))' = (H(x) + c)'.$$

Vi omskriver venstre og højre side af lighedstegnet ved hjælp af henholdsvis (3.10) og (3.7):

$$\begin{aligned} (G(y(x)))' &= H'(x) \Leftrightarrow \\ y'(x) \cdot G'(y(x)) &= h(x). \end{aligned}$$

Dette omskrives ved hjælp af (3.8), og vi multiplicerer med $g(y(x))$ på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} y'(x) \cdot \frac{1}{g(y(x))} &= h(x) \Leftrightarrow \\ y'(x) &= g(y(x)) + h(x), \end{aligned}$$

hvilket er vores differentialligning, hvorfor vi har vist, at hvis y opfylder (3.5), så løser den også differentialligning (3.4). ■

Eksempel 3.2

Vi anvender Sætning 3.3. Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til følgende differentialligning:

$$y'(x) = x \cdot y(x).$$

Vi indser, at denne type differentialligning har samme løsning som funktionalligningen (3.5). Vi ser, at:

$$h(x) = x,$$

og:

$$g(y(x)) = y(x).$$

Det betyder, at:

$$H'(x) = x,$$

og:

$$G'(y(x)) = \frac{1}{y(x)}.$$

Heldigvis er y veldefineret for $x = 0$, hvorfor vi kan skrive ovenstående. Herfra følger det direkte fra (3.2), at:

$$H(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

og:

$$G(y(x)) = \ln|y(x)|.$$

Vi indsætter ovenstående i (3.5) og isolerer y :

$$\begin{aligned} \ln|y(x)| &= \frac{1}{2}x^2 + c \quad \Leftrightarrow \\ y(x) &= \pm e^{\frac{1}{2}x^2 + c} = \pm e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c = \pm e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot k. \end{aligned}$$

Vi vil ud over separable differentialligninger også behandle en anden form for differentialligninger i denne opgave.

3.2 Lineære ordinære differentialligninger

Vi skal i denne del af opgaven kigge på lineære ordinære differentialligninger, hvorfor vi definerer disse.

Definition 3.5 er baseret på [6], Kapitel 1.

Definition 3.5 (Lineære ordinære differentialligninger)

En n 'te ordens ordinær differentialligning er lineær, hvis den er på formen:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x),$$

hvor $a_0(x), \dots, a_n(x)$, $g(x)$ er vilkårlige differentiable funktioner og y er en funktion af den uafhængige variabel x . Hvis $g(x) = 0$ kaldes differentialligningen for homogen. Er $g(x) \neq 0$, kaldes differentialligningen inhomogen.

Vi ønsker en metode til at løse en bestemt type lineær ordinær differentialligning, som skal bruges senere.

Vi vil gerne kunne løse differentialligninger på følgende form:

$$y'(x) + h(x) \cdot y(x) = g(x).$$

Sætning 3.4 og Bevis for Sætning 3.4 er baseret på [7], Sætning 1.2 og [24], Sætning 2.5.2.

Sætning 3.4

Lad $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og lad $g, h : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$. Lad $H : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ være en stamfunktion til h på \mathbb{I} jævnfør Definition 3.3. Den 1. ordens lineære ordinære differentialligning:

$$y'(x) + h(x) \cdot y(x) = g(x), \quad (3.11)$$

har da følgende fuldstændige løsning $y : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved:

$$y(x) = e^{-H(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + c \right), \quad (3.12)$$

hvor $c \in \mathbb{R}$.

Bevis

Til dette bevis skal vi huske, at h er kontinuert i \mathbb{I} og har en stamfunktion H , hvorfor ifølge Definition 3.3 ved, at $H'(x) = h(x)$. Vi kigger nu på vores differentialligning og omskriver denne ved at multiplicere med $e^{H(x)}$ på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} y'(x) + h(x) \cdot y(x) &= g(x) && \Leftrightarrow \\ y'(x) \cdot e^{H(x)} + h(x) \cdot e^{H(x)} \cdot y(x) &= g(x) \cdot e^{H(x)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vi ser på følgende udtryk vha. produkt- og kædereglen:

$$(y(x) \cdot e^{H(x)})' = y'(x) \cdot e^{H(x)} + y(x) \cdot h(x) \cdot e^{H(x)} \quad (3.14)$$

Vi omskriver nu venstre side af ligning (3.13) vha. (3.14):

$$(y(x) \cdot e^{H(x)})' = g(x) \cdot e^{H(x)}$$

Vi har så vist jævnfør Definition 3.3 og Sætning 3.1, at $y(x) \cdot e^{H(x)}$ må være en stamfunktion til $g(x) \cdot e^{H(x)}$. Derfor har vi så, at:

$$\begin{aligned} y(x) \cdot e^{H(x)} &= \int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + c && \Leftrightarrow \\ y(x) &= e^{-H(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + c \right), \end{aligned}$$

hvilket er den fuldstændige løsning til vores differentialligning. ■

Eksempel 3.3

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til følgende differentialligning:

$$y'(x) + 2x \cdot y(x) = x.$$

Vi indser, at her er:

$$\begin{aligned} h(x) &= 2x \Rightarrow H(x) = x^2 \\ g(x) &= x. \end{aligned}$$

Vi indsætter ovenstående i Panserformlen for at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-H(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{H(x)} dx + c \right) \\ &= e^{-x^2} \cdot \left(\int x \cdot e^{x^2} dx + c \right) \end{aligned}$$

Vi løser integralet vha. integration ved substitution og får:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2+x^2} + c \cdot e^{-x^2} \\ &= c \cdot e^{-x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Her bemærkes det, at det ikke er alle lineære ordinære 1. ordens differentialligninger, der kan løses med Panserformlen, eftersom vi ikke nødvendigvis kan bestemme det integral, vi opstiller.

Kapitel 4

Komplekse tal

Dette kapitel er baseret på [25], Appendix 1: Complex Numbers.

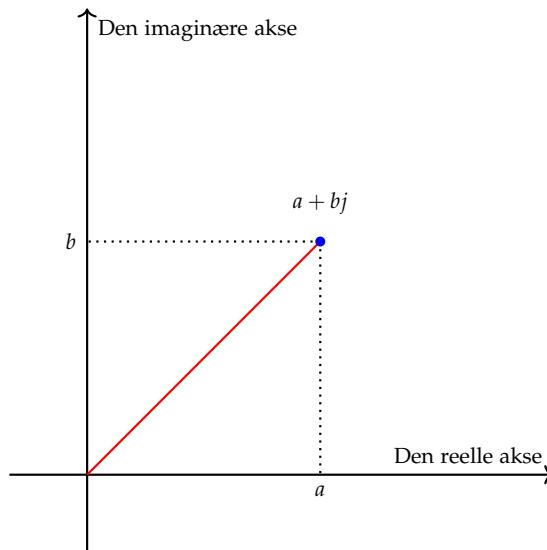
Ligningen:

$$x^2 + 1 = 0, \quad (4.1)$$

kan ikke løses med de reelle tal. For at løse (4.1) er det nødvendigt, at udvide de reelle tal, derfor er en ny type tal blevet defineret: de komplekse tal. Disse indeholder en real del samt en imaginær del. Den imaginære del er givet ved enhedsstørrelse j :

$$j^2 = -1. \quad (4.2)$$

Med (4.2) kan (4.1) løses. Det kan ses på Figur 4.1, at tallene udvides ved j , således den fungerer som en andenakse til de reelle tal på førsteaksen.



Figur 4.1: Et vilkårligt, komplekst tal i det komplekse plan.

Definition 4.1

Et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ er et tal beskrevet ved:

$$z = a + bj,$$

hvor a og b er reelle tal og j er den imaginære enhed, der opfylder $j^2 = -1$. Den reelle del af det komplekse tal er a , noteret ved $\text{Re}(z)$, og b er den imaginære del af z , noteret ved $\text{Im}(z)$:

$$\text{Re}(z) = \text{Re}(a + bj) = a, \quad \text{Im}(z) = \text{Im}(a + bj) = b.$$

4.1 Regneregler

Det er simpelt at addere og subtrahere komplekse tal, da det minder om at regne med vektorer.

Definition 4.2 (Addition og subtraktion)

Lad $w = x + yj \in \mathbb{C}$ og $z = a + bj \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} w + z &= (x + a) + (y + b)j, \\ w - z &= (x - a) + (y - b)j. \end{aligned}$$

Altså adderes/subtraheres den reelle og imaginære del hver for sig.

Multiplikation med komplekse tal minder om multiplikation med reelle tal og defineres jævnfør Definition 4.3.

Definition 4.3 (Multiplikation)

Lad $w = x + yj \in \mathbb{C}$ og $z = a + bj \in \mathbb{C}$:

$$w \cdot z = (ax - by) + (ay + bx)j.$$

Bemærk, at $w \cdot z$ også kan skrives på formen wz .

Modulus er betegnelsen for afstanden fra origo til et punkt (a, b) , der svarer til det komplekse tal på formen $z = a + bj$. Notationen for modulus af det komplekse tal z er $|z|$ eller $|a + bj|$.

Definition 4.4 (Modulus)

For et komplekst tal $z = a + bj$ findes modulus ved:

$$|z| = |a + bj| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Hvis linjen fra origo til punktet (a, b) laver en vinkel θ med den reelle akse, kaldes θ for argumentet til det komplekse tal $z = a + bj$. Dette noteres som $\arg(z)$ eller $\arg(a + bj)$.

Definition 4.5 (Argumentet)

For et komplekst tal $z = a + bj$, kan θ bestemmes i den positive samt negative omløbsretning for $-\pi \leq \theta \leq \pi$:

$$\arg(z) = \theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right), \quad a \neq 0.$$

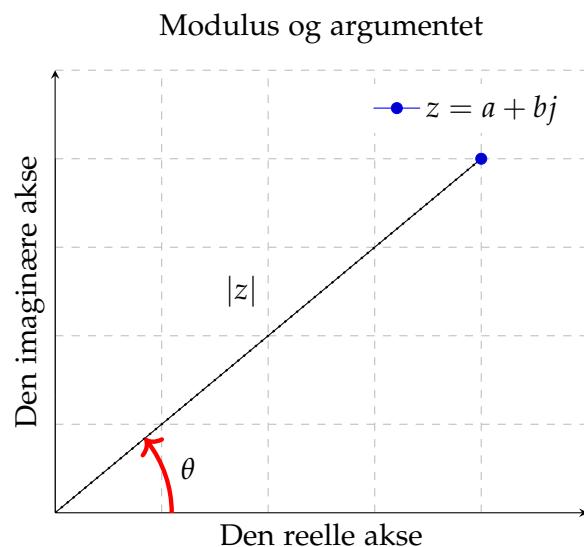
Komplekse tal kan også skrives på polær form. De polære koordinater til komplekse tal er tilsvarende normale polære koordinater, hvor førsteaksen er cosinus og andenaksen er sinus. Altså er den reelle del cosinus- og den imaginære del er sinusbidraget.

Definition 4.6 (Komplekse tal på polær form)

For et komplekst tal $z = a + bj$ kan tallet skrives på polær form, hvor r er givet ved $|w|$ og θ er givet ved $\arg(w)$:

$$z = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta)).$$

Definition 4.4 og Definition 4.5 er illustreret på Figur 4.2.



Figur 4.2: Modulus og argumentet for det komplekse tal $z = a + bj$.

En kompleks konjugering er et komplekst tal spejlet i førsteaksen. Dette gøres ved at vende fortegnet på den imaginære del af det komplekse tal.

Definition 4.7 (Kompleks konjugerede)

For et komplekst tal $z = a + bj$ defineres den kompleks konjugerede som:

$$\bar{z} = a - bj.$$

Regneregler	
$\overline{w+z} = \bar{w} + \bar{z}$	(i)
$\overline{w-z} = \bar{w} - \bar{z}$	(ii)
$\overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}$	(iii)
$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$	(iv)
$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}$	(v)
$\overline{(\bar{z})} = z$	(vi)
$ \bar{z} = z $	(vii)
$z\bar{z} = z ^2$	(viii)

Tabel 4.1: Liste over de hyppigst anvendte regneregler for komplekst konjugerede. Baseret på [25], Appendix 1: Complex Numbers.

Beviserne for regnereglerne i Tabel 4.1 udledes kort.

Tabel 4.1 (i): Først lægges to komplekse tal sammen og reelle samt imaginære dele adskilles jævnfør Definition 4.2.

$$z + w = a + jb + x + jy = a + x + j(b + y).$$

Den konjugerede for $z + w$ udledes og det indsies, at det er lig med $\bar{z} + \bar{w}$:

$$\overline{z + w} = a + x - j(b + y) = a - jb + x - jy = \bar{z} + \bar{w}.$$

Tilsvarende kan gøres for (ii).

Tabel 4.1 (iii): De to komplekse tal z og w multipliceres ved Definition 4.3, og den konjugerede findes til sidst:

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(a + jb) \cdot (x + jy)} = \overline{(ax - by) + j(ay + bx)} = (ax - by) - j(ay + bx).$$

Den konjugerede til de to komplekse tal findes først, hvorefter de multipliceres. Det ses, at de to resultater for (iii) er ens:

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - jb) \cdot (x - jy) = (ax - by) - j(ay + bx).$$

Tabel 4.1 (iv): Den reelle del af den komplekse tal z er a :

$$\operatorname{Re}(z) = a.$$

Højresiden af (iv) udledes til a :

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bj + a - bj}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Tilsvarende kan gøres for (v).

Tabel 4.1 (vi):

For (vi) findes den konjugerede til z to gange:

$$\overline{(z)} = \overline{a - bj} = a + bj = z.$$

Tabel 4.1 (vii):

Den negative del af den konjugerede bliver positiv, når det opløftes i 2. potens:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Tabel 4.1 (viii):

Der multipliceres via Definition 4.3, og tallene arrangeres, således modulus fremkommer:

$$z\bar{z} = (a + bj)(a - bj) = a^2 - (bj)^2 = a^2 - b^2j^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2.$$

Division med komplekse tal skal opfylde dette, hvor w, z og q er komplekse tal:

$$\frac{w}{z} = q \Leftrightarrow w = z \cdot q, \quad (z \neq 0).$$

For at finde en formel for, hvordan man dividerer to komplekse tal med hinanden, lægger man et led til tæller og nævner, hvilket er nævneren, konjugeret:

$$q = \frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}.$$

Da fås Definition 4.8.

Definition 4.8 (Division)

Lad $z = a + bj \in \mathbb{C}$ og $w = x + yj \in \mathbb{C}$:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2}.$$

4.2 Den komplekse eksponentialfunktion

Eksponentialfunktionen for de komplekse tal er defineret ud fra følgende to sammenhænge:

$$(e^{zt})' = ze^{zt}, \quad t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Disse funktioner giver anledning til Definition 4.9 af den komplekse eksponentialfunktion.

Definition 4.9 (Den komplekse eksponentialfunktion)

For et komplekst tal $z = a + bj$ er den komplekse eksponentialfunktion defineret ved:

$$e^z = e^a(\cos(b) + j\sin(b)).$$

Den komplekse eksponentialfunktion e^z generaliserer den reelle eksponentialfunktion e^x således, for $z = a + 0 \cdot j$ er:

$$e^z = e^a e^{j \cdot 0} = e^a(\cos(0) + j\sin(0)) = e^a(1 + j \cdot 0) = e^a.$$

Dette betyder, at den komplekse eksponentialfunktion er en udvidelse af den reelle eksponentialfunktion, ligesom de komplekse tal er en udvidelse af de reelle tal.

Kapitel 5

Laplacetransformationer

Dette kapitel er baseret på [10], [13], [16], [18], [19], [22] og [23].

5.1 Generelt om Laplacetransformationer

Definition 5.1 er baseret på [18], side 2.

Definition 5.1 (Laplacetransformation)

Lad en funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Laplacetransformationen af f er da funktionen F defineret ved følgende:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

for alle komplekse tal s , hvor integralet eksisterer.

Laplacetransformationen er altså en matematisk operator, som transformerer en tidsafhængig funktion, f , til en funktion, F , som er afhængig af den komplekse frekvensvariabel, s .

$y(t)$	$\mathcal{L}\{y\}(s)$	Kommentar
1	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}(s) > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}(s) > \text{Re}(a)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(s) > 0$
f'	$s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$	$\text{Re}(s) > 0$

Tabel 5.1: Tabel over de mest anvendte Laplacetransformationer. Baseret på [18].

Af Tabel 5.1 fremgår det, at når man foretager en Laplacetransformation, transformeres en funktion y til en funktion Y af den komplekse frekvensvariabel, s . Bemærk, at a og ω er vilkårlige konstanter, og f' er den afledeede af en vilkårlig funktion f .

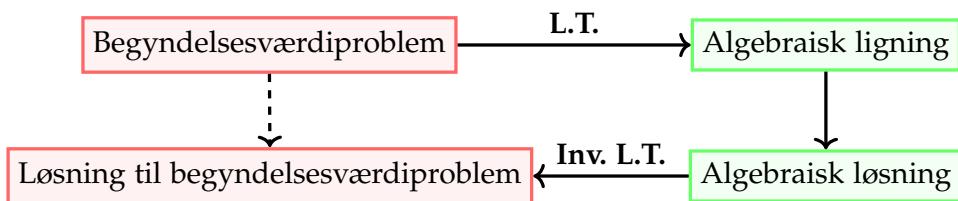
Beviset for Laplacetransformationen, $\mathcal{L}\{f'\}(s)$, fremgår af Bevis for Sætning 5.3.

Beviset for Laplacetransformationen, $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s)$, fremgår af Bevis for Sætning 5.4.

Laplacetransformation kan anvendes til at løse et begyndelsesværdiproblem som f.eks. en differentialligning. En sådan ligning kan være besværlig at løse direkte. Foretager man en Laplacetransformation, kan man transformere differentialligningen til en algebraisk ligning, som er nemmere at løse. Når den algebraiske ligning er løst, anvendes den inverse Laplacetransformation for at transformere løsningen på den algebraiske ligning til løsningen på differentialligningen. Det fremgår af Figur 5.1. Det er svært at gå direkte fra begyndelsesværdiproblemet til løsningen på begyndelsesværdiproblemet, mens det imidlertid er lettere at transformere ligningen og løse den algebraisk.

For uddybelse og eksempel på den inverse Laplacetransformation, se Afsnit 5.7.

For eksempel på løsning af en differentialligning ved hjælp af Laplacetransformation, se Afsnit 5.8.



Figur 5.1: Grafisk beskrivelse af Laplacetransformation (L.T.) og den inverse Laplacetransformation (Inv. L.T.).

5.2 Eksistens af Laplacetransformationen

Eftersom vi kan beregne Laplacetransformationen for en given funktion, skal vi se på, hvornår vi reelt set kan lave selve transformationen. Det viser sig nemlig, at alle funktioner af eksponentiel orden, som er stykvis kontinuerte har en Laplacetransformation, da det opstillede integrale vil eksistere. Derfor definerer vi, hvad det vil sige, at være af eksponentiel orden.

Definition 5.2 er baseret på [16] Definition 4.1.2 og [19].

Definition 5.2 (Eksponentiel orden)

En funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ er af eksponentiel orden $s_0 \in \mathbb{R}$, hvis der eksisterer en positiv konstant k så:

$$|f(t)| \leq ke^{s_0 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Det er ikke altid, at vi kender den præcise værdi af s_0 , hvor vi i et sådant tilfælde blot vil benævne funktionen til at være af eksponentiel orden. Vi kan nu bestemme hvornår Laplacetransformationen for en funktion eksisterer ved hjælp af Sætning 5.1, der er baseret på [16] Sætning 4.1.3 og Bevis 4.1.3 samt [19].

Sætning 5.1 (Eksistens af Laplacetransformationen)

Hvis en funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ er stykvis kontinuert og er af eksponentiel orden s_0 , da eksisterer Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{f\}(s)$ for alle $\text{Re}(s) > s_0$.

Bevis

Vi ser på formlen for en Laplacetransformation fra Definition 5.1:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt$$

Det bestemte integral eksisterer på intervallet $\mathbb{I} = [0, N]$ for alle $N > 0$, da f er stykvis kontinuert på \mathbb{I} . Vi skal blot vise, at integralet eksisterer, når $N \rightarrow \infty$. Vi ser på:

$$\left| \int_0^N e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^N |e^{-st} f(t)| dt. \quad (5.1)$$

Vi husker, at:

$$|e^{a+jb}| = e^a |\cos(b) + j \sin(b)| = e^a \sqrt{\cos(b)^2 + \sin(b)^2} = e^a.$$

Derfor har vi, at:

$$\int_0^N |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^N e^{-\operatorname{Re}(-s)t} |f(t)| dt. \quad (5.2)$$

Eftersom f er af eksponentiel orden s_0 ved vi jævnfør Definition 5.2, at der eksisterer en positiv konstant k , så:

$$|f(t)| \leq k e^{s_0 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Dette betyder, at integralet i ligning (5.2) kan begrænses og skrives som:

$$\int_0^N e^{-\operatorname{Re}(-s)t} |f(t)| dt \leq \int_0^N e^{-\operatorname{Re}(-s)t} k e^{s_0 t} dt = k \int_0^N e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s))t} dt. \quad (5.3)$$

Vi kan nu betragte følgende grænseværdi:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} k \int_0^N e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s))t} dt &= k \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s))t}}{s_0 - \operatorname{Re}(s)} \right]_0^N \\ &= k \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s))N}}{s_0 - \operatorname{Re}(s)} - \frac{e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s)) \cdot 0}}{s_0 - \operatorname{Re}(s)} \right), \quad 2. \text{ led afhænger ikke af } N, \\ &= k \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s))N}}{s_0 - \operatorname{Re}(s)} \right) - \frac{1}{s_0 - \operatorname{Re}(s)} \right), \quad 1. \text{ led går mod } 0 \text{ for } \operatorname{Re}(s) > s_0 \\ &= -\frac{k}{s_0 - \operatorname{Re}(s)} \\ &= \frac{k}{\operatorname{Re}(s) - s_0} < \infty. \end{aligned}$$

Ovenstående holder for $\operatorname{Re}(s) > s_0$, hvilket er antaget i sætningen. Vi ser nu på den absolute værdi af Laplacetransformationen ud fra vores udregninger:

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| = \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^N e^{-st} f(t) dt \right|. \quad (5.4)$$

Her holder ligning (5.4), da $t \mapsto |t|$ er kontinuert. Vi husker, at udtrykket i ligning (5.4) kan ændres via sidste udtryk ligning (5.3), da det er større end eller lig det første udtryk i ligning (5.1):

$$|\mathcal{L}\{f\}(s)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_0^N e^{-st} f(t) dt \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} k \int_0^N e^{(s_0 - \operatorname{Re}(s))t} dt = \frac{k}{\operatorname{Re}(s) - s_0} < \infty.$$

Det er altså vist, at hvis f er af eksponentiel orden, er stykvis kontinuert og $\operatorname{Re}(s) > s_0$, tager $|\mathcal{L}\{f\}(s)|$ en endelig værdi. Hvis dette er tilfældet må $\mathcal{L}\{f\}(s)$ også tage en endelig værdi, hvorfor:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

eksisterer for $\operatorname{Re}(s) > s_0$, hvis f netop er stykvis kontinuert og af eksponentiel orden. Det vil sige, at Laplacetransformationen eksisterer. ■

Vi har nu nogle kriterier for, hvornår vi kan opstille vores Laplacetransformation. Før konkrete beviser for Laplacetransformationer af visse funktioner gennemføres, vil essentielle regneregler blive gennemgået.

5.3 Regneregler for Laplacetransformationer

Sætning 5.2 og Bevis for Sætning 5.2 er baseret på [16] Sætning og Bevis 4.1.4.

Sætning 5.2 (Linearitet)

Lad $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Lad $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ være funktioner hvor Laplacetransformationen eksisterer. Da gælder:

$$\mathcal{L}\{c_1 f + c_2 g\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{g\}(s) \quad (5.5)$$

Bevis

Vi opskriver Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{c_1 f + c_2 g\}(s)$ jævnfør Definition 5.1:

$$\mathcal{L}\{c_1 f + c_2 g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt.$$

Der huskes, at integration er en lineær operator. Jævnfør Definition 5.1 har vi så:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f + c_2 g\}(s) &= \int_0^\infty c_1 e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_0^\infty c_2 e^{-st} \cdot g(t) dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} \cdot g(t) dt. \end{aligned}$$

Vi observerer, at $\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = \mathcal{L}\{f\}(s)$ og $\int_0^\infty e^{-st} \cdot g(t) dt = \mathcal{L}\{g\}(s)$. Disse indsættes, således at:

$$\mathcal{L}\{c_1 f + c_2 g\}(s) = c_1 \mathcal{L}\{f\}(s) + c_2 \mathcal{L}\{g\}(s).$$

Det er hermed bevist, at Laplacetransformationen er en lineær operator. ■

5.4 Laplacetransformation af første orden

Dette afsnit er baseret på [10], 1. Laplace transform af funktioner, og [19].

Eksempel 5.1

For at udføre en Laplacetransformation skal man integrere. Her kan vi danne et eksempel med en eksponentiel funktion. Vi skal dog først argumentere for, at denne funktion er af eksponentiel orden, og at den er stykvis kontinuert. Vi har, at:

$$f(t) = e^{at}.$$

Denne funktion er stykvis kontinuert, da den er kontinuert, og vi skal blot vise, at den er af eksponentiel orden. For at funktionen skal være af eksponentiel orden, må der eksistere en positiv konstant k , så:

$$|f(t)| \leq ke^{s_0 t}.$$

Da der eksisterer et $k = 2$, så

$$|f(t)| < 2 \cdot e^{\operatorname{Re}(a)t},$$

er f af eksponentiel orden, hvorfor Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{f\}(s)$ eksisterer. Vi skal finde den transformerede version af f ved at skrive:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt.$$

Ud fra eksemplet kan det ses, at det er et uegentligt integral, og da grænseværdierne går fra et $\mathbb{R}^+ \rightarrow \infty$, har det en endelig grænseværdi. Her bruges eksponentiel regnereglerne som er $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, hvilket vi kan gøre da de begge er eksponentielle funktioner med det samme endelige grænseværdi, da fås:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right) - \frac{1}{a-s} e^{(a-s) \cdot 0}.$$

Her er:

$$\frac{1}{a-s} e^{(a-s) \cdot 0} = \frac{1}{a-s},$$

og:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right) = 0, \quad \operatorname{Re}(s) > a. \quad (5.6)$$

Årsagen til, at grænseværdien i ligning (5.6) går mod 0 er, at tælleren $e^{(a-s)t}$ går mod 0, når $t \rightarrow \infty$, da vi antager, at $\operatorname{Re}(s) > s_0$. Ergo får vi Laplacetransformationen til at være:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad \operatorname{Re}(s) > a. \quad (5.7)$$

5.5 Bevis for Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{f'\}(s)$

Sætning og Bevis 5.3 er baseret på [13] og [23].

Sætning 5.3

Lad $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være kontinuert differentiabel og dens første ordens afledeede $f': \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ være stykvis differentiabel og af eksponentiel orden s_0 . Da eksisterer Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{f'\}(s)$ for $s > s_0$, og:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0), \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (5.8)$$

Bevis

Jævnfør Definition 5.1 og Sætning 5.1, som siger, at f er kontinuert differentiabel og af eksponentiel orden, har vi, at:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Jævnfør [23], Sætning 4.4.2, vides det om partiel integration, at:

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

Idet vi vælger, at:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-st}, \\ u'(t) &= -se^{-st}, \\ v(t) &= f(t), \\ v'(t) &= f'(t), \end{aligned}$$

kan vi skrive $\mathcal{L}\{f'\}(s)$ som:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t) dt &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t) dt \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty + \int_0^\infty se^{-st} f(t) dt \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Vi antager, at $f(t)$ vokser langsommere end e^{-st} aftager, således at:

$$\begin{aligned} \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-st} \cdot f(t)) - 1 \cdot f(0) \\ &= 0 - f(0) \\ &= -f(0). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Vi observerer jævnfør Definition 5.1, at $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}\{f\}(s)$. Denne og (5.10) indsættes i (5.9), således at:

$$\begin{aligned} \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} dt &= -f(0) + s \mathcal{L}\{f\}(s) \\ &= s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0). \end{aligned}$$

Det er hermed bevist, at Laplacetransformationen af den første ordens afledeede, f' , af en funktion f kan skrives som:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0). \quad \blacksquare$$

5.6 Bevis for Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s)$

Sætning 5.4 og Bevis er baseret på [18], side 8.

Sætning 5.4

Lad $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, og lad funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, hvor $t \mapsto \sin(\omega t)$. Da eksisterer Laplace-transformation $\mathcal{L}\{f\}(s)$ for $s > s_0$, og:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (5.11)$$

Bevis

Før vi begynder beviset, skal vi overbevise os selv om, at $\sin(\omega t)$ er af eksponentiel orden, da vi ved, at den er stykvis kontinuert. Jævnfør Sætning 5.2 er en funktion af eksponentiel orden s_0 , en funktion, hvor vi kan finde en positiv konstant k , så:

$$|f(t)| \leq k e^{st},$$

hvor $f(t) = \sin(\omega t)$. Lader vi $k = 1$ og $s_0 = 0$, har vi, at:

$$|f(t)| \leq 1 \cdot e^{0 \cdot 1} = 1. \quad (5.12)$$

Ligning (5.12) holder, da værdimængden af f har sin maksimale værdi som 1, hvorfor f netop er af eksponentiel orden 0, og vi kan opstille vores Laplacetransformation.

Sinusfunktionen, $\sin(\omega t)$, kan vha. komplekse tal beskrives således:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

jævnfør [18], side 7, hvor j er den imaginære enhed.

Vi kan nu opskrive Laplacetransformationen, således at:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right\} (s).$$

Da Laplacetransformationen er en lineær operator, kan vi skrive følgende:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{1}{2j} \left(\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}(s) \right).$$

Følgende Laplacetransformation gælder for eksponentialfunktionen, $e^{j\omega t}$:

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}(s) = \frac{1}{s - j\omega},$$

hvorfor denne indsættes, således at:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right).$$

Vi laver fælles nævner for brøkerne ved, at forlænge den første brøk med $s + j\omega$ og den anden brøk med $s - j\omega$:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} - \frac{s - j\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} \right).$$

Nævnerne reduceres:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega}{s^2 - sj\omega + sj\omega - (j\omega)^2} - \frac{s - j\omega}{s^2 - sj\omega + sj\omega - (j\omega)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega}{s^2 - (j\omega)^2} - \frac{s - j\omega}{s^2 - (j\omega)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Vi kigger på $(j\omega)^2$:

$$(j\omega)(j\omega) = j^2\omega^2.$$

Vi udnytter, at $j^2 = -1$ jævnfør (4.2), således at:

$$(j\omega)^2 = -\omega^2,$$

som indsættes i (5.13):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega}{s^2 - (-\omega^2)} - \frac{s - j\omega}{s^2 - (-\omega^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s - j\omega}{s^2 + \omega^2} \right). \end{aligned}$$

Brøkerne samles til én, således at:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega - (s - j\omega)}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} \right). \end{aligned}$$

Da $2j$ er faktor i tæller og nævner, går denne ud, således at:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Det er hermed bevist, at Laplacetransformationen $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ gælder. ■

5.7 Den inverse Laplacetransformation $\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$

Dette afsnit er baseret på [10] og [22].

Følgende definition er baseret på [16], Definition 4.2.2.

Definition 5.3 (Den inverse Laplacetransformation)

Lad en given Laplacetransformation $F(s)$ være defineret for $s \in \mathbb{C}$.

Den inverse Laplacetransformation er da defineret ved følgende:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = f(t) \Leftrightarrow F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s).$$

Der gælder de samme regneregler for inverse Laplacetransformationer, som der gør for Laplacetransformationer. Jævnfør (5.5) er Laplacetransformationen såvel som den inverse Laplacetransformation altså lineære operatorer.

Eksempel 5.2

Find den inverse Laplacetransformation af:

$$F(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{16}{s^2+9}.$$

Da den inverse Laplacetransformation jævnfør (5.5) er lineær, kan man skrive, at:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3} - \frac{16}{s^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{16}{s^2+9}\right\}. \quad (5.14)$$

Ved brug af Tabel 5.1 kan man nemt udlede, hvordan den inverse Laplacetransformation ser ud.

Vi kigger først på $\frac{1}{s-3}$. Det fås af Tabel 5.1, at:

$$\frac{1}{s-3}$$

er en Laplacetransformation på formen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \frac{1}{s-a} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} &= e^{at}, \end{aligned}$$

hvor $a = 3$.

Den inverse Laplacetransformation giver derfor, at:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}. \quad (5.15)$$

(5.15) kan nu indsættes i (5.14), således at:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(s) = e^{3t} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{16}{s^2+9}\right\}. \quad (5.16)$$

Vi kigger nu på $\frac{16}{s^2+9}$. Det fås af Tabel 5.1, at:

$$\frac{16}{s^2+9} \quad (5.17)$$

er en Laplacetransformation på formen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(at)\} &= \frac{a}{s^2+a^2} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} &= \sin(at). \end{aligned}$$

hvor $a = 3$. Men idet der står 16 i brøkens tæller i (5.17), og $a = 3$ skal stå både i brøkens tæller og nævner, omskrives udtrykket således:

$$\frac{16}{s^2+9} = \frac{\frac{16}{3} \cdot 3}{s^2+3^2}.$$

Grundet Laplacetransformationens lineære egenskaber gælder det, at:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{16}{3} \cdot 3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{16}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}. \quad (5.18)$$

Derfor kan (5.18) omskrives til:

$$\frac{16}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} = \frac{16}{3} \cdot \sin(3t), \quad (5.19)$$

idet $a = 3$.

(5.19) indsættes i (5.16), således at:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(s) = e^{3t} - \frac{16}{3} \cdot \sin(3t).$$

Hermed er den inverse operator for et separabelt eksempel demonstreret.

5.8 Løsning af differentialligninger vha. Laplacetransformationen

Nu hvor vi har opsat kriterier for, hvornår Laplacetransformationen og den inverse Laplacetransformation kan anvendes, kan vi bruge disse til at eksemplificere, hvordan metoderne kan anvendes i praksis til at løse differentialligninger.

Eksempel 5.3 er baseret på [16], Eksempel 4.2.1.

Eksempel 5.3

Vi ønsker at bestemme løsningen til følgende differentialligning ved hjælp af Laplacetransformationen:

$$y'(t) + 2y(t) = 0,$$

hvorom det er oplyst, at løsningen til differentialligningen opfylder, at:

$$y(0) = 3.$$

Helt konkret er målet først at Laplacetransformere differentialligningen til en algebraisk ligning for $\mathcal{L}\{y\}(s)$, hvor denne isoleres. Sidst anvender vi den inverse Laplacetransformation til at opnå y , som er vores løsning til differentialligningen. Differentialligningen Laplacetransformeres:

$$\mathcal{L}\{y' + 2y\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s) = 0.$$

Højresiden af lighedstegnet kan skrives som 0, da vi jævnfør Definition 5.1 ender med at skulle integrere 0 over en grænse, hvilket blot giver 0. Ifølge (5.5) er Laplacetransformationen en lineær operator, hvorfor venstresiden blot kan opdeles:

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = 0.$$

Vi husker, at venstre side af lighedstegnet kan omskrives ved hjælp af (5.8), hvorefter $\mathcal{L}\{y\}(s)$ sættes udenfor parentes, og $y(0)$ adderes på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}\{y\}(s) - y(0) + 2\mathcal{L}\{y\}(s) &= 0 &\Leftrightarrow \\ (s+2)\mathcal{L}\{y\}(s) &= y(0). \end{aligned}$$

Da vi nu har laplacetransformeret differentialligningen, isolerer vi $\mathcal{L}\{y\}(s)$ i vores algebraiske ligning, og vi husker, at $y(0) = 3$:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{y(0)}{s+2} = \frac{3}{s+2}. \quad (5.20)$$

Vi skal nu anvende den inverse Laplacetransformation til at bestemme vores løsning y . Udtrykket for $\mathcal{L}\{y\}(s)$ ligner meget $\frac{1}{s-a}$. Dette svarer til Laplacetransformationen for e^{at} , som fremgår af Tabel 5.1. Ud fra disse oplysninger har vi, at:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(a). \quad (5.21)$$

Vi omskriver (5.21) og husker igen, at Laplacetransformationen er en lineær operator, hvorfor konstanter både kan trækkes ud af og sættes ind i selve transformationen:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a} \Rightarrow \mathcal{L}\{3e^{at}\}(s) = \frac{3}{s-a}.$$

I vores tilfælde er $a = -2$, hvilket indsættes:

$$\mathcal{L}\{3e^{-2t}\}(s) = \frac{3}{s+2}.$$

Her er højre side af lighedstegnet det samme som (5.20). Derfor kan vi skrive:

$$\mathcal{L}\{3e^{-2t}\}(s) = \mathcal{L}\{y\}(s).$$

Vi anvender nu [16], Sætning 4.2.1, til at isolere y :

$$y(t) = 3e^{-2t},$$

hvormed løsningen til differentialligningen er bestemt.

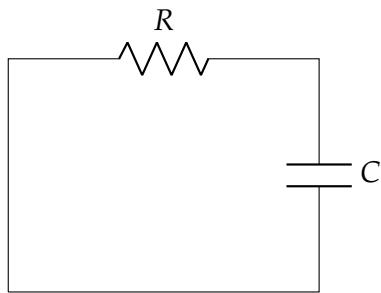
Kapitel 6

Analyse af RC-kredsløb

6.1 Afladning af kondensator

I dette afsnit anvendes teori fra Kapitel 2 og 3 til at udlede formlen for spændingen over en kondensator i et RC-kredsløb, som bliver afladet og derefter opladet. Udledningerne er baseret på [11] Afsnit 9.1 og 9.2, [12] Kapitel 7 og [26].

Det antages, at der arbejdes med et kredsløb som set på Figur 6.1, hvor kondensatoren C , er sat i kredsløb med en modstand R .



Figur 6.1: RC-kredsløb, der aflades.

Har man et vilkårligt knudepunkt i kredsløbet, mellem kondensatoren og modstanden, gælder der følgende relation ifølge Kirchhoffs 1. lov, som ses i Afsnit 2.3:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N i_k(t) &= 0 & \Leftrightarrow \\ i_C(t) + i_R(t) &= 0 & \Leftrightarrow \\ i_C(t) &= -i_R(t). \end{aligned}$$

Her betegner $i_C(t)$ og $i_R(t)$ strømmen over henholdsvis kondensatoren og modstanden til tiden t .

Derudover fås fra (2.5), at:

$$i_C(t) = C \cdot v'_C(t). \quad (6.1)$$

Fra Afsnit 2.2 fås, at:

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t). \quad (6.2)$$

Hvis strømmen isoleres i (6.2) fås:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}. \quad (6.3)$$

Isoleres $v'_C(t)$ i (6.1) bliver udtrykket følgende:

$$v'_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t). \quad (6.4)$$

Vi kigger nu på spændingen over knudepunktet ved hjælp af Kirchoffs 2. lov, som giver, at:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N v_k(t) &= 0 && \Leftrightarrow \\ v_C(t) - v_R(t) &= 0 && \Leftrightarrow \\ v_C(t) &= v_R(t). \end{aligned}$$

Her betegner $v_C(t)$ og $v_R(t)$ spændingen over henholdsvis kondensatoren og modstanden til tiden t . Der ses igen på (6.4), og højresiden af lighedstegnet omskrives:

$$v'_C(t) = \frac{1}{C}i_C(t).$$

Vi udnytter, at $i_C(t) = -i_R(t)$, således at:

$$v'_C(t) = \frac{-1}{C}i_R(t).$$

Jævnfør (6.3) fås det, at:

$$v'_C(t) = \frac{-1}{R \cdot C}v_R(t).$$

Vi udnytter, at $v_C(t) = v_R(t)$:

$$v'_C(t) = \frac{-1}{R \cdot C}v_C(t).$$

Lad nu:

$$\omega = \frac{1}{RC}.$$

Dette giver følgende differentialligning:

$$v'_C(t) = -\omega \cdot v_C(t).$$

Det ses, at denne differentialligning er på samme form som (3.4) og derfor har samme løsning som (3.5). Anvendes dette samt Sætning 3.1, fås:

$$h(t) = -\omega \Rightarrow H(t) = -\omega t$$

og:

$$g(y(t)) = v_C(t) \Rightarrow G(y(x)) = \ln |v_C(t)|.$$

Her er H og G er stamfunktioner til henholdsvis h og $\frac{1}{g(y(t))}$. Der indsættes ovenstående i (3.5), og $v_C(t)$ isoleres:

$$\begin{aligned} v'_C(t) &= -\omega \cdot v_C(t) \Leftrightarrow \\ \ln |y(x)| &= -\omega t + c, \end{aligned}$$

hvilket giver, at:

$$v_C(t) = k \cdot e^{-\omega t}.$$

Det bemærkes her, at det positive fortegn er blevet holdt, omend løsningen både kan have positivt og negativt fortegn. Årsagen dertil er, at $v_C(t)$ betegner en ændring, hvor fortegnet ikke er vigtigt. Der skal nu vises, at k blot er en konstant, der repræsenterer spændingen over kondensatoren til tiden $t = 0$. Det vides nemlig, at til tiden $t = 0$ er spændingen over kondensatoren netop v_0 , hvor kondensatoren er ladet helt op. Derfor indsættes v_0 i udtrykket for spændingen over kondensatoren:

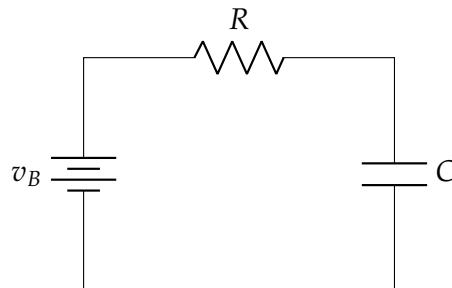
$$\begin{aligned} v_C(0) &= v_0 & \Leftrightarrow \\ k \cdot e^{-\omega \cdot 0} &= v_0. \end{aligned}$$

Da $e^0 = 1$ har vi, at konstanten k netop er v_0 . Derfor er udtrykket for spændingen over kondensatoren givet ved:

$$v_C(t) = v_0 \cdot e^{-\omega t}. \quad (6.5)$$

6.2 Opladning af kondensator

Det antages, at der arbejdes med et kredsløb som i Figur 6.2. Dette kredsløb kiges på ved $t = 0$, og kredsløbet består af en kondensator C , en modstand R og en strømkilde med spændingen v_B . Strømkilden oplader kredsløbet, som set på Figur 6.2.



Figur 6.2: RC-kredsløb, der oplades.

Anvendes der Kirchoffs 1. lov ligesom ved afladning af et RC-kredsløb, får vi, at ved knudepunktet mellem kondensatoren og modstanden, er:

$$i_C(t) = -i_R(t), \quad (6.6)$$

hvor $i_C(t)$ og $i_R(t)$ også her betegner strømmen over henholdsvis kondensatoren og modstanden til tiden t . Derudover har man samme udtryk som i (6.1), (6.2) og (6.3).

Der kan nu indsættes (6.1) og (6.3) i (6.6), som bliver:

$$C \cdot v'_C(t) = -\frac{v_R(t)}{R}. \quad (6.7)$$

Anvendes Kirchhoff's 2. lov, fås det, at:

$$v_C(t) - v_R(t) - v_B = 0,$$

hvilket næsten er analogt til det udtryk, der fremkommer, når dette gøres for afladningen af en kondensator. Her er der blot en strømkilde inkluderet, som skal regnes med. Isoleres spændingen over modstanden fås:

$$v_R(t) = v_C(t) - v_B. \quad (6.8)$$

Når (6.8) indsættes i (6.7), fås det, at:

$$C \cdot v'_C(t) = -\frac{v_C(t) - v_B}{R}.$$

Vi adderer $\frac{v_C(t)}{R}$ på begge sider af lighedstegnet:

$$C \cdot v'_C(t) + \frac{v_C(t)}{R} = \frac{v_B}{R}.$$

Sidst divideres der med C på begge sider af lighedstegnet og husker, at $\omega = \frac{1}{RC}$:

$$\begin{aligned} v'_C(t) + \frac{v_C(t)}{R \cdot C} &= \frac{v_B}{R \cdot C} \quad \Leftrightarrow \\ v'_C(t) + \omega v_C(t) &= \omega v_B. \end{aligned}$$

Det indses, at dette er en linear ordinær differentialeligning på samme form som (3.11) og har samme løsning som (3.12). Her er:

$$\begin{aligned} h(t) &= \omega \quad \Rightarrow \quad H(t) = \omega t \\ g(t) &= \omega v_B. \end{aligned}$$

Dette indsættes i (3.12), hvilket giver os:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= e^{-H(t)} \cdot \left(\int g(t) \cdot e^{H(t)} dt + c \right) \\ &= e^{-\omega t} \cdot \left(\int \omega v_B \cdot e^{\omega t} dt + c \right). \end{aligned}$$

Det huskes, at ωv_B ikke afhænger af tiden t , hvorfor man kan trække det uden for integralet, hvorefter integralet blot løses:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= e^{-\omega t} \cdot \left(\omega v_B \cdot \int e^{\omega t} dt + c \right) \\ &= e^{-\omega t} \cdot (v_B \cdot e^{\omega t} + k). \end{aligned}$$

Der ganges ind i parantesen:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= e^{-\omega t} \cdot (v_B \cdot e^{\omega t} + k) \\ &= v_B + e^{-\omega t} \cdot k. \end{aligned}$$

Eftersom kredsløbet oplades, er spændingen over kondensatoren 0 til tiden $t = 0$:

$$\begin{aligned} v_C(0) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ v_B + e^0 \cdot k &= 0. \end{aligned}$$

Da man igen har, at $e^0 = 1$, betyder det, at konstanten $k = -v_B$, hvilket giver os:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_B - e^{-\omega t} \cdot v_B \\ &= v_B \cdot (1 - e^{-\omega t}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

hvor v_B betegner spændingen over spændingskilden i kredsløbet.

Kapitel 7

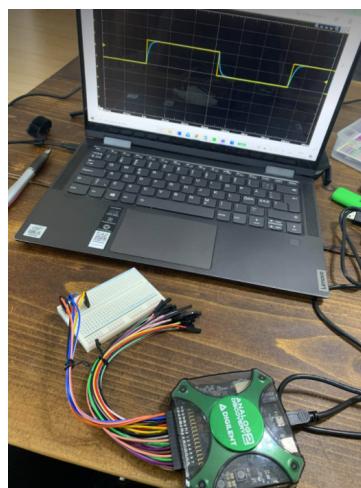
Forsøg med op- og afladning af kondensator

7.1 Forsøgsbeskrivelse

Formålet med dette forsøg er at måle spændingen ved op- og afladning af en kondensator i et kredsløb ved jævnstrøm. Der testes også for, om de teoretiske simuleringer stemmer overens med forsøgets resultater. Derudover vil vi undersøge den maksimale afvigelse mellem den teoretiske og den eksperimentelle op- og afladning af kondensatoren.

7.2 Forsøgsopstilling

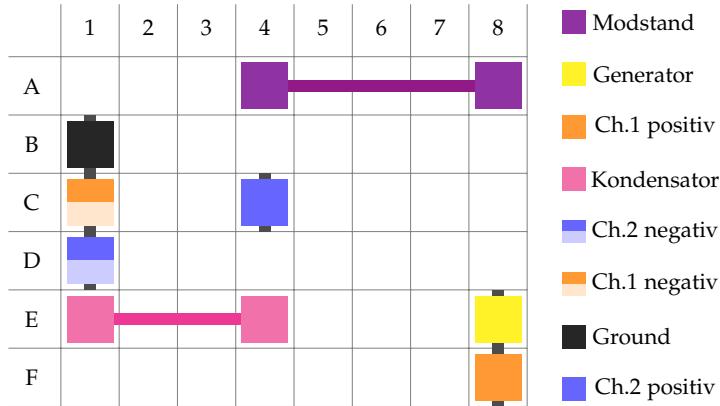
Forsøget er udført ved at koble kredsløbet til en Analog Discovery 2, som det ses på Figur 7.1, der er et kombineret oscilloskop og signalgenerator. Analog Discovery 2 styres via programmet WaveForms, der benyttes til at opsamle data og visualisere op- og afladning af kondensatoren over tid.



Figur 7.1: Forsøgsopstilling af Analog Discovery 2 og computer til op- og afladning af kondensator.

Til forsøget anvendes et breadboard, en modstand, en kondensator og ledninger. De forskellige farver af ledninger på Figur 7.2 beskriver hver deres del i RC-kredsløbet: den sorte ledning er en ground, der er udgangspunktet hvorfra spændingen aflæses. De to orange ledninger er WaveForms Scope kanal 1, henholdsvis en positiv og negativ indgang. De to blå ledninger er WaveForms Scope kanal 2, henholdsvis positiv og negativ indgang. Disse fem ledninger gør det muligt at måle på kredsløbet og at give det ønskede output. Den grøne ledning er WaveForms Generator, som er inputtet. Derudover benyttes 2 komponenter mere: den lyserøde farve er kondensatoren, og den lilla farve er modstanden. Vi arbejder

med en modstand på $220\Omega \pm 1\%$ og en kondensator med en elektrisk kapacitans på $15nF \pm 10\%$.

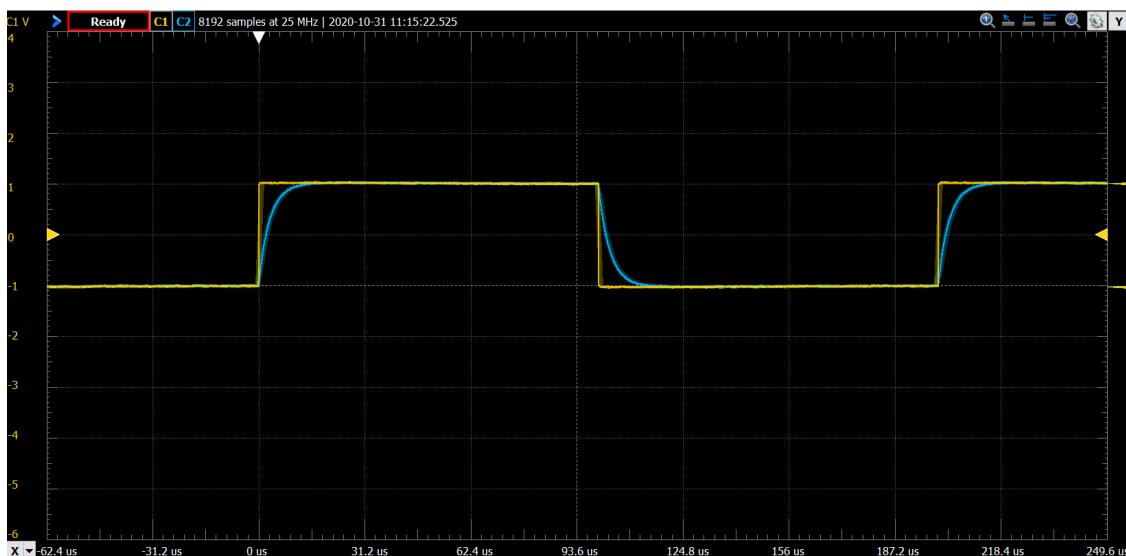


Figur 7.2: Opsætningen af et RC-kredsløb.

7.3 Udførelse

Til udførelsen af forsøget benyttes programmet WaveForms, hvor kredsløbet opstilles som på Figur 7.2 og tilsluttes til programmet. For at vise op- og afladning af kondensatoren i kredsløbet køres en Scope på samme tid med en Wavegen Square-kurve. Amplituden sættes til 1V, så svingningen foregår mellem -1 V og 1 V. Frekvensen sættes til 5 kHz, fordi det giver et tilstrækkeligt antal svingninger, for at arbejde videre med resultatet.

På Figur 7.3 beskriver den gule graf spændingsinputtet for op- og afladning af RC-kredsløbet, mens den blå graf beskriver spændingsoutputtet, der er spændingen over kondensatoren når den op- og aflades over tid. På førsteaksen er op- og afladning, målt over tid i μs , og på andenakse er spændingen, målt i volt V.

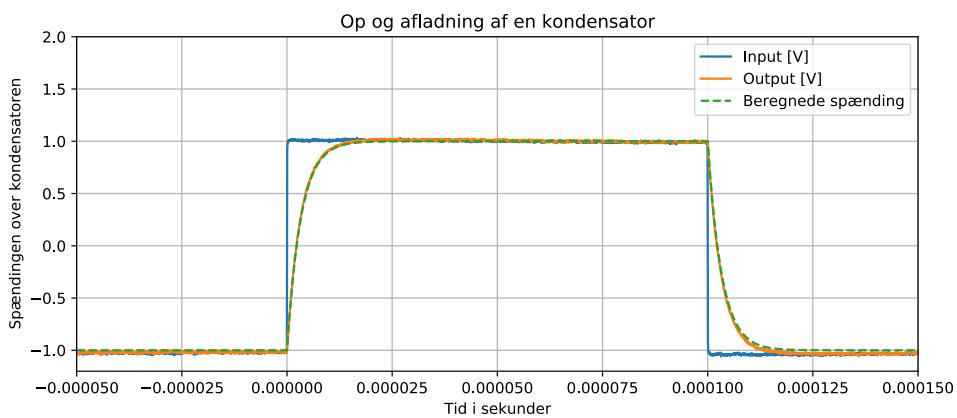


Figur 7.3: Måling på op- og afladning af kondensatoren.

På Figur 7.3 ses det, at opladningen starter når programmet køres ved $0 \mu s$, og det stopper på et tidspunkt, hvorefter afladningen starter ved $99,85 \mu s$, svarende til $0,00009985$ s.

7.4 Simulering i Python

For at undersøge, hvordan det teoretiske stemmer overens med forsøgsresultaterne, har vi plottet dataene for op- og afladning af kondensatoren i Python. Koden fremgår af Appendix A.1. Figur 7.4 viser simuleringen af op- og afladningen af en kondensator i et RC-kredsløb, hvor tiden målt i sekunder er på førsteakse, og spændingen målt i volt er på andenakse. Grafen viser spændingsinputtet (blå), spændingsoutputtet (orange) og den teoretiske værdi (grøn) for op- og afladning af kondensatoren.



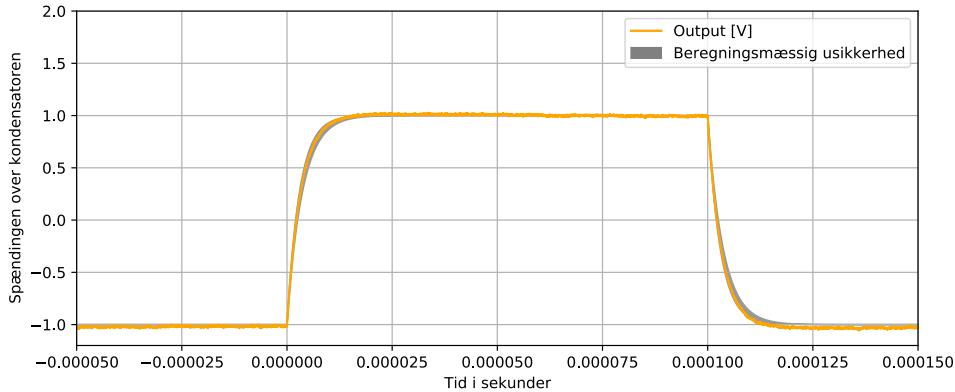
Figur 7.4: Graf over op- og afladning af kondensatoren

Grafen for den teoretiske værdi er lavet ud fra en revideret version af (6.9) for opladningen af kondensatoren og (6.5) for afladning af kondensatoren, fordi vi i vores forsøg arbejder fra -1V til 1V på andenaksen og med en begyndelsesværdi på -1V . Da bliver formlen, som vi benytter til at regne den teoretiske op- og afladning af kondensatoren:

$$v_C(t)_{opladning} = -1 + 2 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t}), \quad (7.1)$$

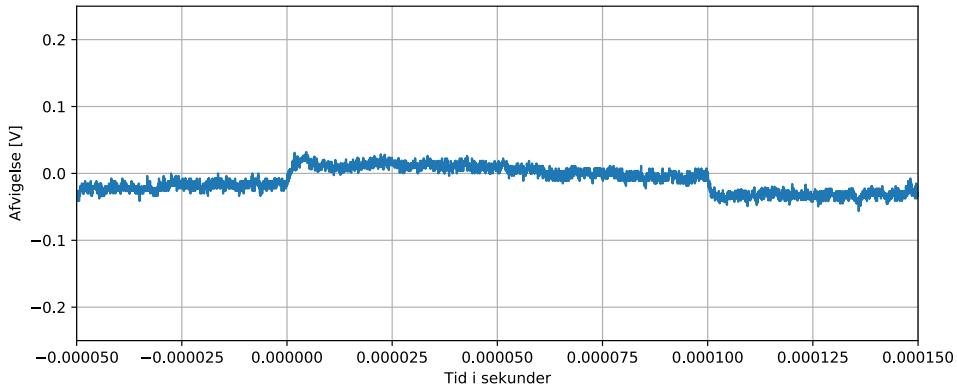
$$v_C(t)_{afladning} = -1 + 2 \cdot (e^{-\frac{1}{RC}t}). \quad (7.2)$$

Derudover har vi plottet det grå område på Figur 7.5 for at vise, at det er det område, vores output må være inden for, når vi tager i betragtning, at kondensatoren kan have en afvigelse på $\pm 10\%$, og modstanden har en afvigelse på $\pm 1\%$. På Figur 7.5 kan man se, at kurverne ligger oven i hinanden, hvilket hentyder til, at forsøgets output ligger inden for det forventede resultat.



Figur 7.5: Graf over op- og afladning af kondensatoren med den beregnede usikkerhed fra henholdsvis kondensatoren og modstanden.

Til sidst har vi plottet afvigelsen mellem de teoretiske data og de eksperimentelle data. Plottet på Figur 7.6 er en absolut afvigelse målt i volt, mens det på Figur 7.7 er en relativ afvigelse i procent. Disse to grafer er lavet for at kunne se, hvor den største afvigelse fra den teoretiske værdi til den eksperimentelle værdi er. Derudfra kan vi udregne, hvor stor afvigelsen er.



Figur 7.6: Graf over afvigelse i volt mellem de teoretiske og eksperimentelle værdier.

På Figur 7.6 ses det, at den største afvigelse er ved afladningen, ved tiden $t = 0,00010229\text{s}$. Kigger vi på denne tid i vores datasæt, er spændingen på $-0,0374\text{V}$, hvorefter vi kan udregne værdien for den teoretiske spænding ved denne tid ved at udnytte (7.2), således at:

$$-1 + 2 \cdot \left(e^{-\frac{1}{220 \cdot (15 \cdot 10^{-9})} \cdot 0,00010229} \right) = -0,99\text{V}.$$

Derudfra kan vi udregne afvigelsen i procent mellen den teoretiske værdi og den eksperimentelle værdi:

$$\frac{-0,0374\text{V} - (-0,99\text{V})}{-0,99\text{V}} \cdot 100 = 96,22\%.$$

Denne afvigelse på 96% er en høj afvigelse, men dette stemmer også overens med den højeste afvigelse, som fremgår af Figur 7.7. Tager vi derimod et tidspunkt, hvor afvigelsen

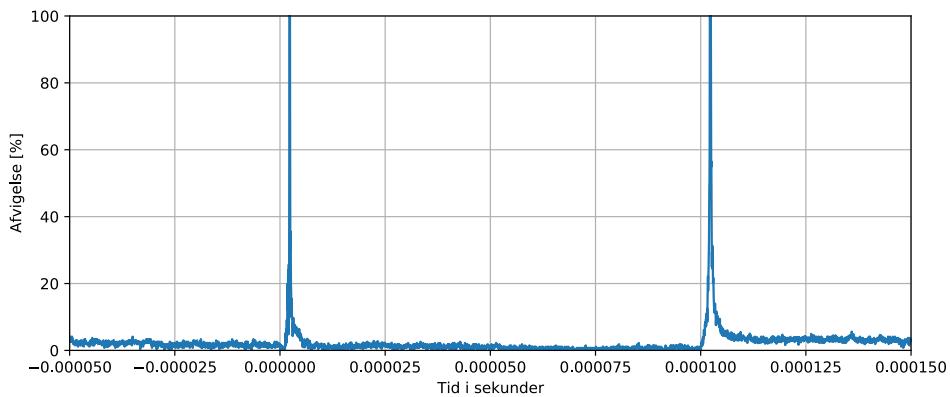
er lille, eksempelvis til tiden $t = 0,000036773\text{s}$, har vi i datasættet en spænding på $0,997\text{V}$. Dette tidspunkt kan vi udregne den teoretiske spænding for ved at udnytte (7.1):

$$-1 + 2 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{220 \cdot (15 \cdot 10^{-9})} \cdot 0,000036773}) = 0,99\text{V}.$$

Derudfra kan vi udregne afvigelsen i procent mellem den teoretiske værdi og den eksperimentelle værdi:

$$\frac{0,997\text{V} - 0,99\text{V}}{0,99\text{V}} \cdot 100 = 0,70\%.$$

Denne udgør en procentmæssig afvigelse på $0,70\%$ for et tilfældigt tidspunkt på Figur 7.7, hvilket giver os et godt indblik i, hvor lille den procentmæssige afvigelse er for størstedelen af datasættet. På Figur 7.7 har vi illustreret udregningerne ovenfor ved at lave en graf over den procentvise afvigelse. Her kan man kan se, at afvigelsen er meget tæt på 0% , udover en stor relativ afvigelse, lige når opladningen starter, og lige når afladningen starter. Dette skyldes, at vi arbejder med meget små absolute værdier, således at selv en lille stigning vil bevirket en stor, relativ afvigelse. For uddybelse af dette, se Afsnit 7.5.



Figur 7.7: Graf over den procentvise afvigelse mellem de teoretiske og eksperimentelle værdier.

7.5 Deldiskussion

Forsøget fra Afsnit 7.2 stemmer godt overens med teorien fra 7.4, udover ved to punkter i Figur 7.7, hvor afvigelsen er meget stor, eftersom det teoretiske plot går mod 0, mens den eksperimentelle ikke kommer ligeså tæt på 0, og derfor vil afvigelsen komme til at se større ud:

$$\lim_{teoretisk \rightarrow 0} \frac{eksperimentel - teoretisk}{teoretisk} \cdot 100\% = \infty.$$

En anden mulig begrundelse for denne afvigelse kan være, at vi ikke har datapunkter nok. Ved store ændringer inden for kort tid ville flere datapunkter kunne gøre afvigelsen markant mindre, fordi den ville skærpe præcisionen for data. En anden grund til den store afvigelse kan være, at en lille forskel mellem teori og praksis giver en stor procentmæssig forskel, eftersom vi har at gøre med meget lave værdier. De laver afvigelser på få procent kan skyldes blandt andet energitab i ledninger og elektriske komponenter, som der ikke er taget højde for i forsøget.

Kapitel 8

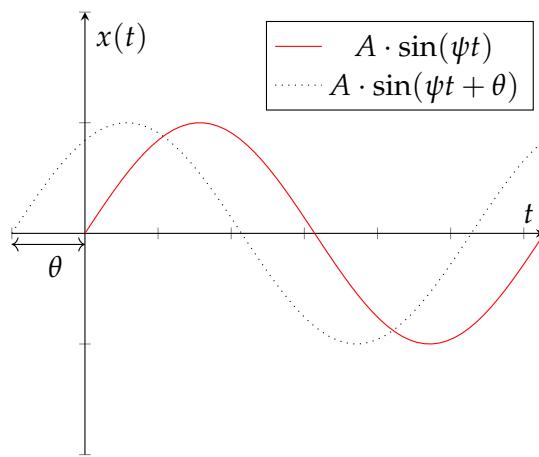
Analyse af høj- og lavpasfiltre

8.1 Sinuskurver

I dette afsnit undersøges det, hvordan man udregner henholdsvis amplituden og faseforskydningen for høj- og lavpasfilterkredsløb, samt hvordan disse har effekt på bodeplottet. For uddybelse af bodeplottet og dets egenskaber, se Afsnit 8.4.

Dette afsnit er baseret på [12], side 306.

En sinuskurve er en matematisk funktion, der kan bruges til at beskrive vekselstrøm i et elektrisk kredsløb.



Figur 8.1: Den røde kurve er et udsnit af en sinusbølge, mens den stiplede kurve er faseforskuft med θ i forhold til den røde kurve.

På Figur 8.1 er der indtegnet et udsnit af en sinusbølge, hvor kurven bevæger sig mellem A og $-A$, som er amplituden, på andenaksen. Funktionen gentager sig selv efter perioden T , som er 2π radianer, når vinkelfrekvensen er $\psi = 1$. Når $\psi > 1$, er perioden, T , kortere, dvs. at funktionen svinger hurtigere. Og når $\psi < 1$, er perioden, T , længere, dvs. at funktionen svinger langsommere.

Vinkelfrekvensen beregnes således:

$$\psi = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad (8.1)$$

hvor ψ er vinkelfrekvensen målt i radianer pr. tidsenhed, T er perioden målt i en vilkårlig, invers tidsenhed som f.eks. s^{-1} , og f er frekvensen ligeledes målt i en invers tidsenhed eller Hz.

Graferne på Figur 8.1 kan både repræsentere $v(t)$ eller $i(t)$. Forskriften for den røde kurve

er givet ved:

$$x_1(t) = A \cdot \sin(\psi t),$$

mens den stiplede kurve er givet ved:

$$x_2(t) = A \cdot \sin(\psi t + \theta), \quad (8.2)$$

hvor θ er faseforskydningen. Det vil sige, at den stiplede kurve er faseforskudt med θ i forhold til den røde kurve. Faseforskydningen er i de fleste tilfælde udtrykt med grader frem for radianer, hvorfor man også kan skrive (8.2) som eksempelvis:

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\psi t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \sin(\psi t + 90^\circ).$$

8.2 Lavpasfilter

I dette afsnit undersøges det, hvordan man udregner amplituden og faseforskydningen for et lavpasfilterkredsløb. Afsnittet er baseret på [12], side 523.

Med udgangspunkt i (2.5) omskriver vi formlen, så den bliver afhængig af $v'(t)$:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \cdot v'_C(t) \Leftrightarrow \\ v'_C(t) &= \frac{1}{C} \cdot i_C(t). \end{aligned}$$

Herefter bruger vi Kirchhoffs 1. lov, idet vi ved fra (2.3), at $i_C(t) = -i_R(t)$:

$$v'_C(t) = -\frac{1}{C} \cdot i_R(t). \quad (8.3)$$

I Afsnit 2.2 fås det, at:

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t),$$

hvorefter i_R isoleres:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}. \quad (8.4)$$

Vi kan nu indsætte i_R fra (8.4) i (8.3):

$$v'_C(t) = -\frac{1}{RC} \cdot v_R(t).$$

Kirchhoffs 2. lov (2.4) anvendes, så vi ikke kun måler på spændingen i forhold til tid, men også inddrager spændingsinputtet:

$$v'_C(t) = -\frac{1}{RC} \cdot (v_C(t) - v). \quad (8.5)$$

Man kan benytte Laplacetransformationen til at bestemme overføringsfunktionen. Altså relationen mellem indgangsspændingen v og den målte spænding over kondensatoren v_C . Vi udnytter Sætning 5.2 om linearitet og Sætning 5.3 om Laplacetransformation for den

første ordens afledeede af f til at bestemme udtrykket for spændingen over frekvensdomænet. Her indsætter vi vores værdier fra (8.5):

$$\mathcal{L}\{v'_C\}(s) = \mathcal{L}\left\{-\frac{1}{RC}v_C + \frac{1}{RC}v\right\}(s),$$

hvilket giver os:

$$s \cdot \mathcal{L}\{v_C\}(s) - v_C(0) = -\frac{1}{RC} \mathcal{L}\{v_C\}(s) + \frac{1}{RC} \mathcal{L}\{v\}(s). \quad (8.6)$$

Laplacetransformationen skrives ud, da vi fra vores Definition 5.1 ved, at:

$$\mathcal{L}\{v_C\}(s) = V_C(s) \quad (8.7)$$

og:

$$\mathcal{L}\{v\}(s) = V(s). \quad (8.8)$$

(8.7) og (8.8) indsættes i (8.6), således at:

$$s \cdot V_C(s) - v_C(0) = -\frac{1}{RC}V_C(s) + \frac{1}{RC}V(s).$$

Tager man udgangspunkt i, at kondensatoren ikke har nogen ladning, før man har tændt på kontakten, er vores begyndelsesbetingelse, at:

$$v_C(0) = 0.$$

Der gælder derfor, at:

$$s \cdot V_C(s) = -\frac{1}{RC}V_C(s) + \frac{1}{RC}V(s),$$

hvorefter vi lægger $\frac{1}{RC}V_C(s)$ til på begge sider:

$$\frac{1}{RC}V_C(s) + sV_C(s) = \frac{1}{RC}V(s).$$

Der divideres på begge sider med $\frac{1}{RC}$:

$$\frac{\frac{1}{RC}V_C(s) + sV_C(s)}{\frac{1}{RC}} = V(s).$$

$V_C(s)$ sættes uden for parentes:

$$V_C(s) \left(\frac{\frac{1}{RC} + s}{\frac{1}{RC}} \right) = V(s).$$

Der divideres på begge sider med $\frac{\frac{1}{RC} + s}{\frac{1}{RC}}$:

$$V_C(s) = \frac{V(s)}{\frac{\frac{1}{RC} + s}{\frac{1}{RC}}}.$$

Jævnfør brøkregneregler fås det, at:

$$V_C(s) = \left(\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + s} \right) \cdot V(s).$$

Funktionen $\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + s}$ er overføringsfunktionen for et lavpasfilter og udtrykkes som $H_L(s)$:

$$H_L(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)}.$$

Derfor kan vi skrive ovenstående, således at:

$$H_L(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + s}$$

jævnfør [12] side 523.

Derfor kan man også skrive følgende, da vi trækker $\frac{1}{RC}$ ned foran brøken:

$$H_L(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC} + s}.$$

Brøkerne ganges med hinanden:

$$H_L(s) = \frac{1}{1 + RC \cdot s}.$$

Da $\tau = RC$, kan vi omskrive til følgende:

$$H_L(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s},$$

hvor s er et komplekst tal. Så ved at tilføje vekselstrøm til systemet, vil vinkelhastigheden fra inputtet kunne sættes ind på s' plads, $s = j\psi$:

$$H_L(j\psi) = \frac{1}{1 + \tau \cdot j\psi}.$$

Overføringsfunktionen $H_L(j\psi) = \frac{1}{1 + \tau \cdot j\psi}$ indeholder et komplekst tal, hvorfor man både kan tage modulus og argumentet af overføringsfunktionen.

Vi tager nu modulus af overføringsfunktionen jævnfør Definition 4.4. Da vi ved, at komplekse tal er defineret ved $z = a + bj$, er vores reelle del $\text{Re}(z) = a = 0$ i tælleren og $\text{Re}(z) = a = 1$ i nævneren, mens den imaginære del er $\text{Im}(z) = b = 1$ i tælleren og $\text{Im}(z) = b = \psi\tau$ i nævneren:

$$|H_L(\psi)| = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + (\psi \cdot \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\psi\tau)^2}}.$$

Vi tager nu argumentet af overføringsfrekvensen jævnfør Definition 4.5:

$$\arg(H_L(\psi)) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\psi\tau}{1}\right) = -\tan^{-1}(\psi\tau).$$

Amplituden kan altså beskrives på følgende måde, da $|H_L(\psi)| = A_L(\psi)$:

$$A_L(\psi) = \frac{1}{(1 + (\psi\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Faseforskydningen kan altså beskrives som følgende, da $\arg(H_L(\psi)) = \theta_L(\psi)$:

$$\theta_L(\psi) = -\tan^{-1}(\psi\tau).$$

8.3 Højpasfilter

I dette afsnit undersøges amplituden og faseforskydningen for et højpasfilterkredsløb. Afsnittet er baseret på [12], side 524.

Med udgangspunkt i Ohms lov (2.2), fås det, at:

$$v_C(t) = R \cdot i_C(t). \quad (8.9)$$

Da vi ved fra (2.5), at $i_C(t) = C \cdot v'_C(t)$, kan dette indsættes i (8.9):

$$v_C(t) = RC \cdot v'_C(t).$$

Vi benytter Kirchhoffs 1. lov (2.3), da vi ved, at $i_C = -i_R$, således at:

$$v_R(t) = -RC \cdot v'_R(t).$$

Kirchhoffs 2. lov (2.4) anvendes, så vi ikke kun måler på spændingen i forhold til tid, men også inddrager spændningsinputtet:

$$\begin{aligned} v_R(t) &= -RC \left(-v'_R(t) + v'(t) \right) \\ &= RC \cdot v'_R(t) - RC \cdot v'(t). \end{aligned}$$

Vi opskriver Laplacetransformationen jævnfør Sætning 5.3:

$$\mathcal{L}\{v_R\}(s) = RC \cdot \mathcal{L}\{v'_R\}(s) - RC \cdot \mathcal{L}\{v'\}(s),$$

hvilket giver os:

$$\mathcal{L}\{v_R\}(s) = RC \cdot s \cdot \mathcal{L}\{v_R\}(s) - v_R(0) - RC \cdot s \cdot \mathcal{L}\{v\}(s) - v(0). \quad (8.10)$$

Laplacetransformationen skrives ud, da vi fra Definition 5.1 ved, at:

$$\mathcal{L}\{v_R\}(s) = V_R(s) \quad (8.11)$$

og:

$$\mathcal{L}\{v\}(s) = V(s). \quad (8.12)$$

(8.11) og (8.12) indsættes i (8.10), således at:

$$V_R(s) = RC \cdot s \cdot V_R(s) - v_R(0) - RC \cdot s \cdot V(s) - v(0). \quad (8.13)$$

Tager man udgangspunkt i, at kondensatoren ikke har nogen ladning, før man har tændt på kontakten, er vores begyndelsesbetingelser:

$$v_R(0) = 0$$

og:

$$v(0) = 0,$$

hvorfor (8.13) reduceres, således at:

$$V_R(s) = RC \cdot s \cdot V_R(s) - RC \cdot s \cdot V(s).$$

$RC \cdot s \cdot V_R(s)$ lægges til på begge sider, således at:

$$V_R(s) + RC \cdot s \cdot V_R(s) = -RC \cdot s \cdot V(s).$$

$V_R(s)$ sættes uden for parentes:

$$V_R(s) \cdot (1 + RC \cdot s) = RC \cdot s \cdot V(s).$$

$V_R(s)$ isoleres:

$$V_R(s) = \frac{RC \cdot s}{1 + RC \cdot s} \cdot V(s).$$

Da overføringsfunktionen for et højpasfilter er $H_H(s) = \frac{RC \cdot s}{1 + RC \cdot s}$, og $H_H(s)$ kan skrives på følgende måde:

$$H_H(s) = \frac{V_R(s)}{V(s)}$$

jævnfør [12] side 524. Da kan vi opskrive følgende formel:

$$H_H(s) = \frac{RC \cdot s}{1 + RC \cdot s}.$$

Her vil s være et komplekst tal. Så ved at tilføje vekselstrøm til systemet, vil vinkelhastigheden fra inputtet kunne sættes ind på s' plads, $s = j\psi$:

$$H_H(\psi) = \frac{RC \cdot j\psi}{1 + RC \cdot j\psi}.$$

Da $RC = \tau$, indsættes denne:

$$H_H(j\psi) = \frac{\tau \cdot j\psi}{1 + \tau \cdot j\psi}.$$

Overføringsfunktionen $H_H(j\psi) = \frac{\tau \cdot j\psi}{1 + \tau \cdot j\psi}$ indeholder et komplekst tal, hvorfor man både kan tage modulus og argumentet af overføringsfrekvensen.

Vi tager nu modulus af overføringsfunktionen jævnfør Definition 4.4:

$$|H_H(\psi)| = \frac{\sqrt{(\tau \cdot \psi)^2}}{\sqrt{1^2 + (\tau \cdot \psi)^2}} = \frac{\tau \cdot \psi}{\sqrt{1 + (\tau \psi)^2}},$$

Vi tager nu argumentet af overføringsfrekvensen jævnfør Definition 4.5:

$$\arg(H_H(\psi)) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\tau \psi}{1}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tau \psi).$$

Da den reelle del af det komplekse tal er lig 0, må det gælde, at $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Amplituden kan altså beskrives på følgende måde, da $|H_H(\psi)| = A_H(\psi)$:

$$A_H(\psi) = \frac{\tau \cdot \psi}{(1 + (\tau \psi)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Faseforskydningen kan altså beskrives som følgende, da $\arg(H_H(\psi)) = \theta_H(\psi)$:

$$\theta_H(\psi) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tau \psi).$$

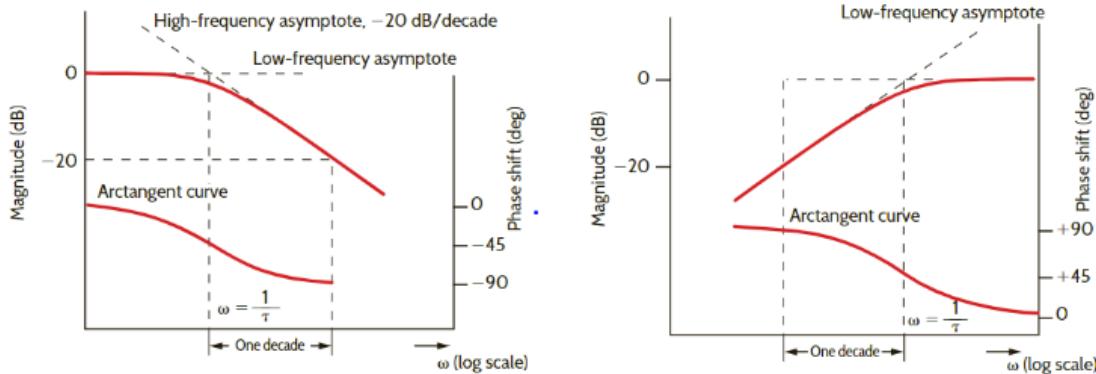
8.4 Bodeplot

Dette afsnit er baseret på [3] og [12].

Bodeplot er en kurve, som beskriver amplituden og faseforskydningen. Amplituden beskrives som forholdet mellem spændningsoutputtet og -inputtet, mens bodeplottet beskriver faseforskydningen af outputtet i en anden graf. De to grafer er defineret med frekvensen ud af førsteaksen, samt enten amplituden målt i decibel eller faseforskydningen målt i grader op ad andenaksen. Forholdet mellem spændingsinputtet og -outputtet kan beskrives som:

$$\text{decibel(dB)} = 20 \log_{10} \frac{v_{out}}{v_{in}} = 20 \log_{10} (|H(j\omega)|). \quad (8.14)$$

Som det ses på Figur 8.2, vil amplituden ved et lavpasfilterkredsløb starte ved 0 dB og bevæge sig mod knækfrekvensen, som den er ved, når den er faldet med 3 dBm. Faseforskydninegn vil starte ved 0° og derefter aftage, indtil den når knækfrekvensen ved 45° for derefter at flade ud omkring 90° . Det modsatte sker for et højpasfilterkredsløb, hvor amplituden vokser mod de 0° , hvorefter den rammer knækfrekvensen ved -3 dB. Faseforskydningen starter ved 90° , aftager til knækfrekvensen ved 45° og aftager til sidst indtil 0° , hvor grafen flader ud.



Figur 8.2: Teoretisk eksempel på amplitude og faseforskydning henholdsvis et højpasfilter og et lavpasfilter.
Figur taget fra: [12]

Kapitel 9

Forsøg med høj- og lavpasfiltre

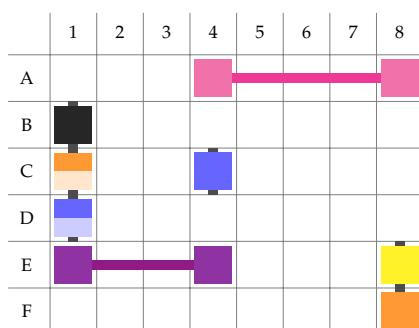
9.1 Forsøgsbeskrivelse

Formålet med forsøg 2 er at visualisere, hvordan høj- og lavpasfiltre fungerer ved bestemte frekvenser i et kredsløb med vekselstrøm samt undersøge dets bodeplots. Der testes også for, om de teoretiske simuleringer stemmer overens med forsøgets resultater og simulering.

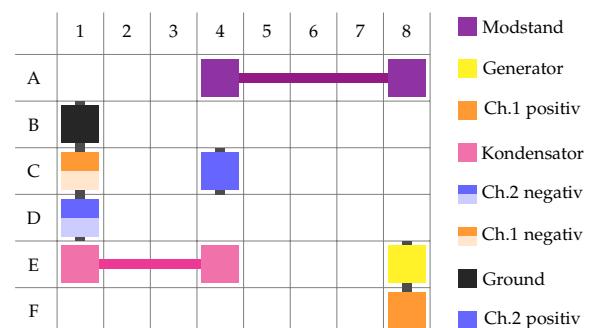
9.2 Forsøgsopstilling

Forsøget er udført ved at koble kredsløbet til en Analog Discovery 2, som styres via programmet WaveForms, der benyttes til at samle data om og visualisere et høj- og et lavpasfilterkredsløb.

Til forsøget anvendes et breadboard, en modstand, en kondensator og ledninger. Kredsløbet opstilles for et lavpasfilter som på Figur 9.2 og for et højpasfilter som på Figur 9.1. Betegnelserne for alle ledninger er som beskrevet i forsøget med op- og afladning af kondensator i Afsnit 7.2.



Figur 9.1: Højpasfilterkredsløb.



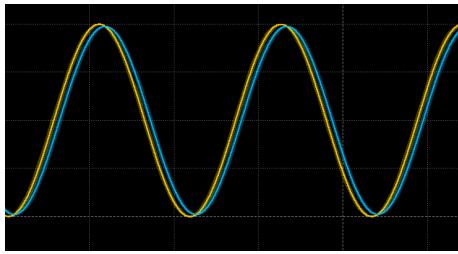
Figur 9.2: Lavpasfilterkredsløb.

Inden vi går i gang med udførelsen af forsøget, beregner vi knækfrekvensen for vores kredsløb. Da vi har en modstand på 220Ω og en kondensator med en elektrisk kapacitet på 15 nF , kan vi udregne knækfreknesen ved at indsætte i (2.6) for knækfrekvensen:

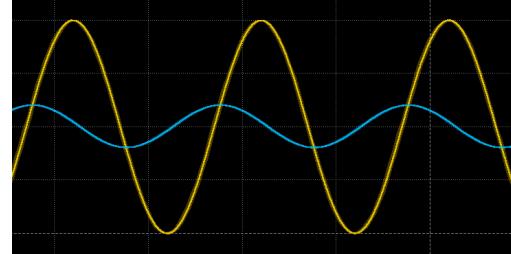
$$f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 220\Omega \cdot (15 \cdot 10^{-9})\text{F}} = 48,2\text{kHz}. \quad (9.1)$$

9.3 Udførelse

I første del af forsøget illustreres det grafisk, hvordan et lavpasfilter og et højpasfilter virker i forhold til hinanden. Inputtet og outputtet for spændingen kan repræsenteres som sinusbølger, og dette gør vi i programmet Waveforms, Scope og Wavegen. Dette gør vi med tre forskellige frekvenser, henholdsvis 10 kHz, 48 kHz og 300 kHz.

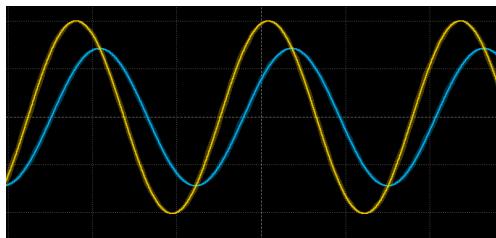


Figur 9.3: Lavpasfilter ved 10 kHz.



Figur 9.4: Højpasfilter ved 10 kHz.

Figur 9.3 viser, at inputtet (gul) og outputtet (blå) ligger tæt på hinanden, både i forhold til amplituden og faseforskydningen. Figur 9.4 viser et output med en amplitude, der er tættere på 0V, fordi et højpasfilterkredsløb blokerer lave frekvenser, og en fase, der er forskudt en kvart periode i forhold til inputtet.

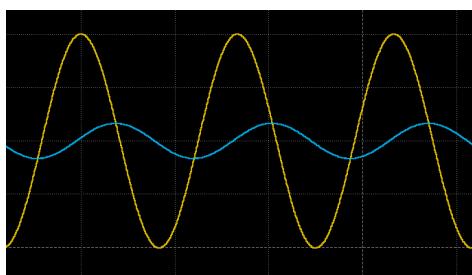


Figur 9.5: Lavpasfilter ved 48 kHz.



Figur 9.6: Højpasfilter ved 48 kHz.

Vi har tidligere i (9.1) beregnet knækfrekvensen til at være 48 kHz, hvorfor vi har valgt at illustrere, hvordan sinuskurven kommer til at se ud for henholdsvis et lavpasfilterkredsløb og et højpasfilterkredsløb ved netop denne frekvens. Man kan se på Figur 9.5 og 9.6, at spændingsinputtet og -outputtet ligger meget tæt på hinanden, hvilket viser, at det er omkring denne frekvens, hvor knækfrekvensen er. Dog kan vi se, at spændingsoutputtet på begge grafer får en lidt mindre amplitude og en fase, der er forskudt en lille smule, hvilket kan være på grund af energitab i kredsløbet, så spændingsoutputtet ikke bliver så stort som spændingsinputtet.



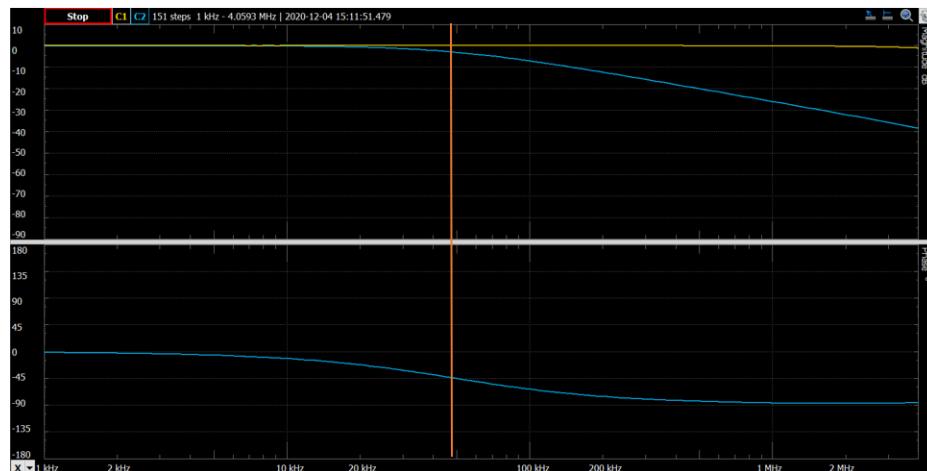
Figur 9.7: Lavpasfilter ved 300 kHz.



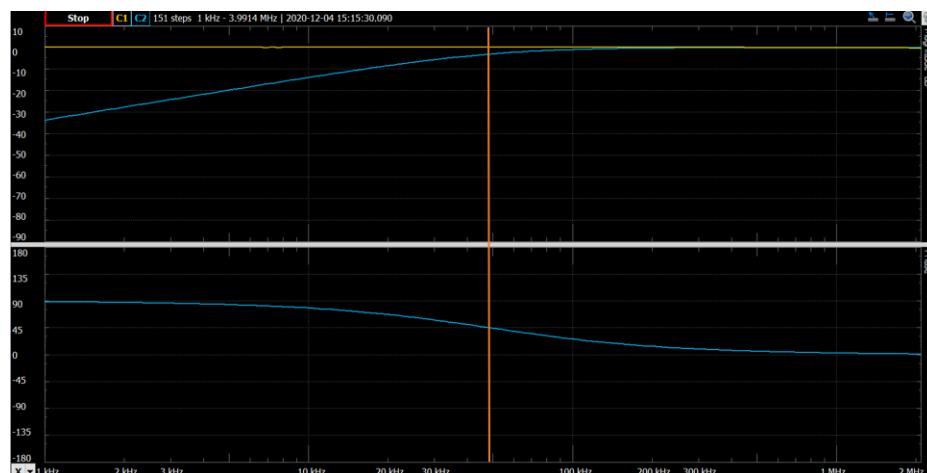
Figur 9.8: Højpasfilter ved 300 kHz.

Figur 9.8 viser, at inputtet og outputtet ligger tæt på hinanden, både i forhold til amplituden og faseforskydningen. Figur 9.7 viser et output med en amplitude, der er tættere på 0V, fordi et lavpasfilterkredsløb blokerer høje frekvenser, og en fase, der er forskudt en kvart periode i forhold til inputtet.

I anden del af forsøget har vi lavet et bodeplot for henholdsvis højpas- og lavpasfilterkredsløbet. Dette gøres i programmet Waveforms, Scope og Network. På Figur 9.9 kan vi se, at faseforskydningen starter ved 0° og bevæger sig mod -90° , fordi det ved frekvenser, der ikke bliver påvirket af filtrene, vil starte ved 0° . Efter knækfrekvensen vil kurven bevæge sig mod -90° . I modsætning til Figur 9.10, hvor den starter ved 90° inden knækfrekvensen og bevæger sig mod 0° efter knækfrekvensen. På Figur 9.9 øverst falder amplituden til 3dB, når den kommer til knækfrekvensen på 48kHz, og derefter aftager den til omkring -40 dB. Figur 9.10 stiger kurven, til den når knækfrekvensen, og der er amplituden på 3dB.



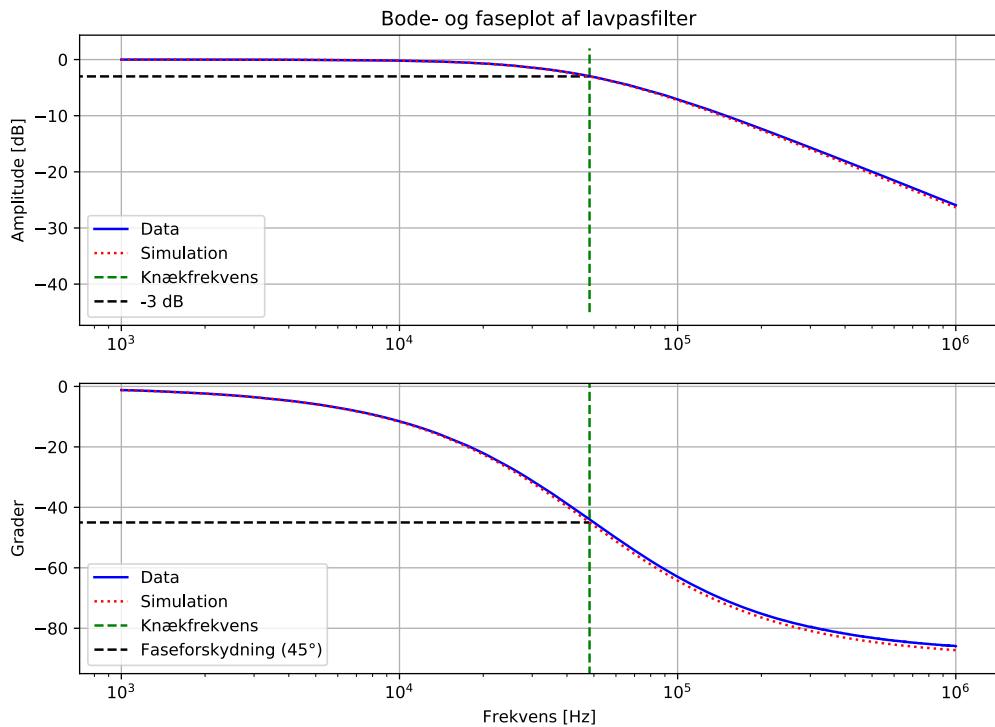
Figur 9.9: Bodeplottet for lavpasfilterkredsløbet - øverst er bodeplot over amplituden og nederst et bodeplot over fasen. Den orange linje illustrerer knækfrekvensen.



Figur 9.10: Bodeplottet for højpasfilterkredsløbet - øverst er bodeplot over amplituden og nederst et bodeplot over fasen. Den orange linje illustrerer knækfrekvensen.

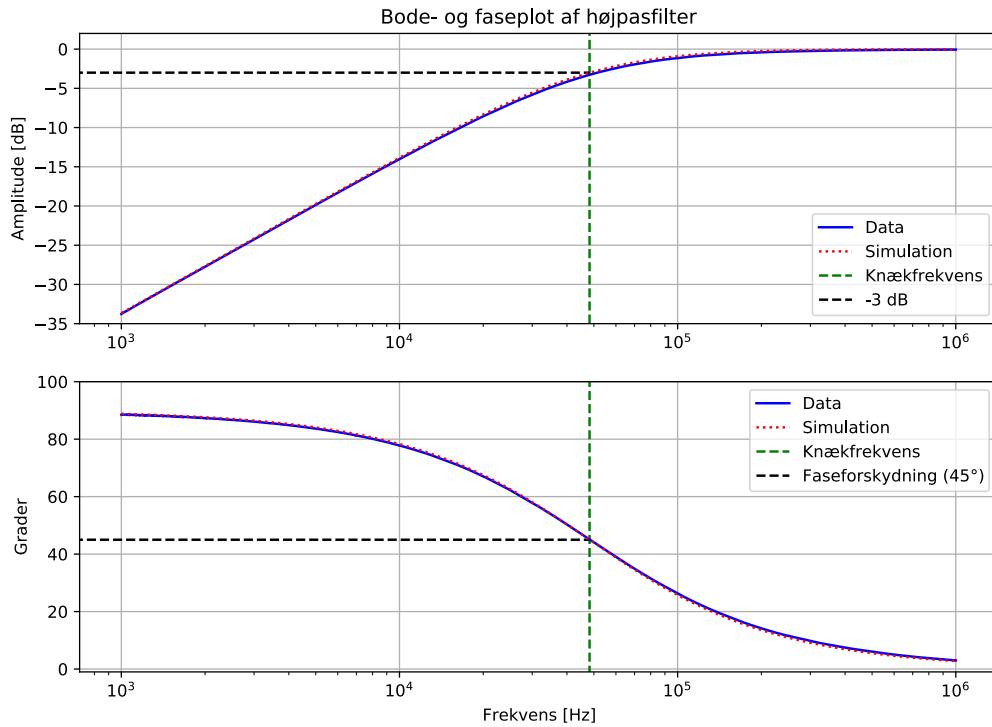
9.4 Simulering i Python

I programmeringssproget Python er der blevet lavet en simulering af et højpasfilter (se Appendix A.2 for Python-kode) og et lavpasfilter (se Appendix A.3 for Python-kode). Der laves en graf med dataene fra forsøget (blå linje) og en graf af simuleringen (prikket rød linje) for henholdsvis et lavpasfilterkredsløb på Figur 9.11 og et højpasfilterkredsløb på Figur 9.12. Derudover undersøges det, hvorvidt bodeplottet har en amplitude på -3 dB og er 45° forskudt ved knækfrekvensen (stippled grøn linje).



Figur 9.11: Simuleret bodeplot af lavpasfilter.

Det ses på Figur 9.11 og Figur 9.12, at det for begge filtre gælder, at der er et 3dB fald i amplituden ved knækfrekvensen, og at knækfrekvensen er ved en faseforskydning på 45° . Vi ser også, at begge grafer for henholdsvis høj- og lavpasfilterkredsløbet ligger lige oven i hinanden, hvilket giver os en forståelse for, hvordan vores forsøg hænger sammen med den teoretiske, matematiske model for bodeplottet.



Figur 9.12: Simuleret bodeplot af højpasfilter.

Vi undersøger, om teorien hænger sammen med de eksperimentelle data for knækfrekvensen ved at kigge i vores datasæt og finde de frekvenser, der ligger tættest på vores knækfrekvens. Vi vil gerne finde ud af, hvilke frekvenser der ligger omkring de teoretiske værdier for knækfrekvensen. Det vil sige, at vores amplitude skal være omkring -3dB , og faseforskydningen skal være omkring -45° for lavpasfiltret og 45° for højpasfiltret. Disse data fra vores forsøg er skrevet ind i Tabel 9.1 og Tabel 9.2. Da vi ikke har en måling lige præcis ved vores knækfrekvens, har vi indsat tre værdier, så vi kan tage gennemsnittet af dem og benytte det til at udregne afvigelse mellem den teoretiske værdi og den eksperimentelle værdi.

Frekvens i Hz	Amplitude i dB	Vinkel i $^\circ$
46718	-2,82	-43,07
49228	-3,04	-44,53
51873	-3,27	-45,90
Gennemsnitsværdier	49273	44,5
Relativ afvigelse i %		1,33
		1,11

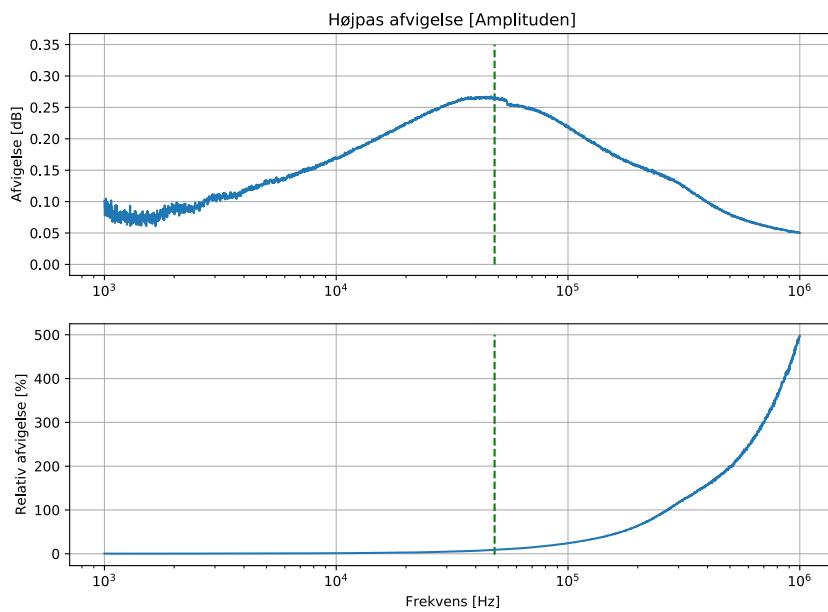
Tabel 9.1: Sammenhørende forsøgværdier for lavpasfilterkredsløbet samt udregnede gennemsnitsværdier og den relative afvigelse.

Frekvens i Hz	Amplitude i dB	Vinkel i °
46718	-3,33	46,15
49228	-3,09	44,67
51873	-2,88	43,18
Gennemsnitsværdier	49273	44,66
Relativ afvigelse i %		3,33
		0,75

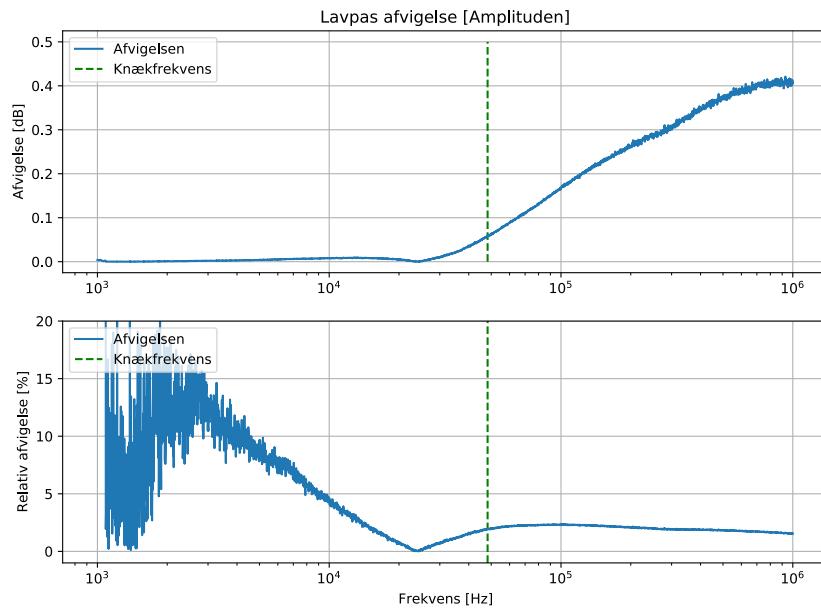
Tabel 9.2: Sammenhørende forsøgsverdier for højpasfilterkredsløbet samt udregnede gennemsnitsværdier og den relative afvigelse.

Den relative afvigelse, som ses nederst i Tabel 9.1 og Tabel 9.2, er under 3,33% for begge kredsløb. Afvigelsen er større for amplituden end faseforskydningen, hvilket skyldes, at der arbejdes med meget små tal. Den lille relative afvigelse gør, at vi kan acceptere eksperimentet. Eftersom knækfrekvensen er meget afgørende, når man snakker om, hvornår der skal skelnes mellem højpasfilterkredsløb og lavpasfilterkredsløb, var det netop vigtigt for os at fastslå teorien bag disse filtre.

Til slut har vi i Python lavet grafer over afvigelse i decibel for amplituden, grader for faseforskydningen og den procentvise afvigelse mellem teori og vores eksperimentelle data. Graferne beskriver afigelserne for amplituden og faseforskydningen for henholdsvis højpasfilterkredsløbet og lavpasfilterkredsløbet. På Figur 9.13 over amplituden for et højpasfilterkredsløb, ses det, at den relative afvigelse er høj (se Afsnit 9.5 for forklaring). Dog skal det bemærkes, at selve afvigelsen i decibel er under 0,30 dB. På Figur 9.14 ses det, at afvigelsen i decibel er omkring 0,4 dB ved lavpasfiltret.

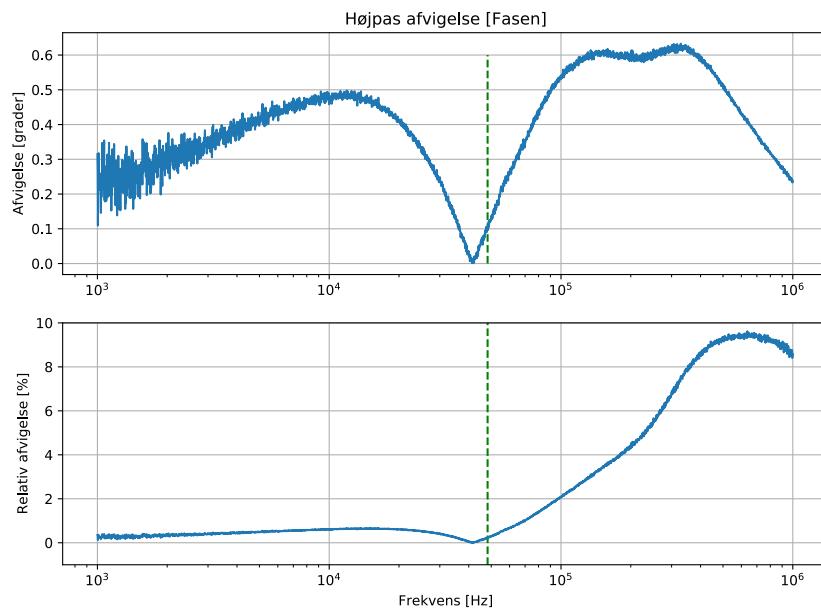


Figur 9.13: Grafer for afvigelse i amplitude mellem teori og forsøg for højpasfilteret. Øverst i dB, nederst i %.

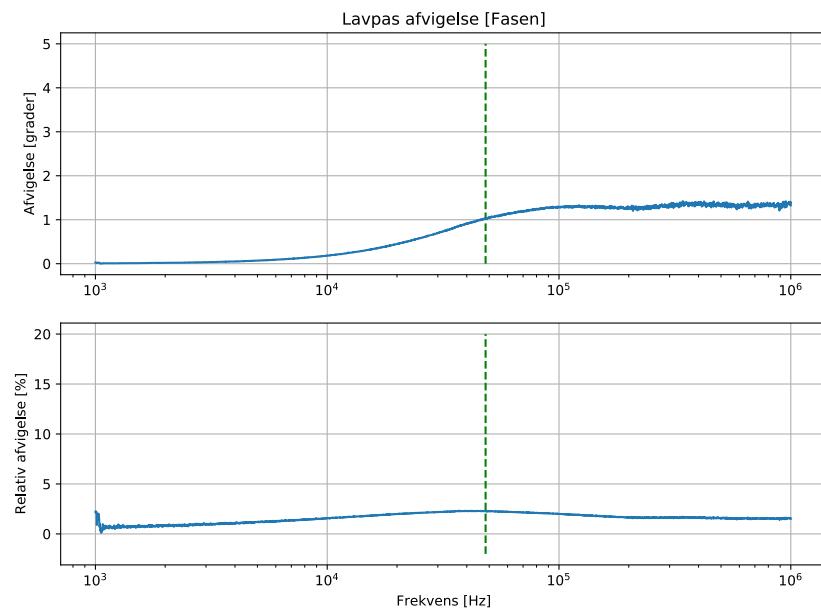


Figur 9.14: Grafer for afvigelse i amplitude mellem teori og forsøg for lavpasfilteret. Øverst i dB, nederst i %.

Det ses på Figur 9.15 over faseforskydningen for et højpasfilterkredsløb, at fasen har en voksende afvigelse, både i grader og i procent, ved højere frekvenser. Den afviger omkring $0,6^\circ$ når den har sin maksimale afvigelse. Det ses på Figur 9.16 over faseforskydningen for et lavpasfilterkredsløb, at den relative afvigelsen er under 5% for hele målingen, mens afvigelsen i grader er omkring 0° i starten, dog vokser afvigelsen til omkring $1,5^\circ$ efter knækfrekvensen.



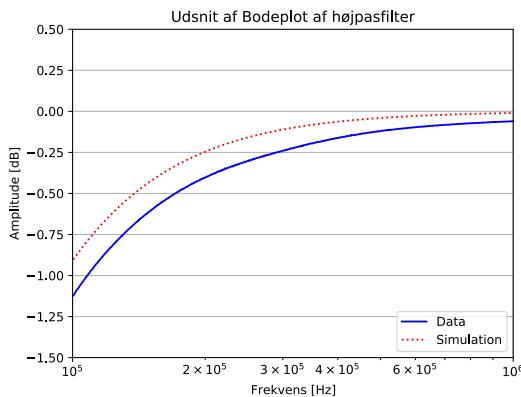
Figur 9.15: Grafer for afvigelse i vinkel mellem teori og forsøg for højpasfilteret. Øverst i grader, nederst i %.



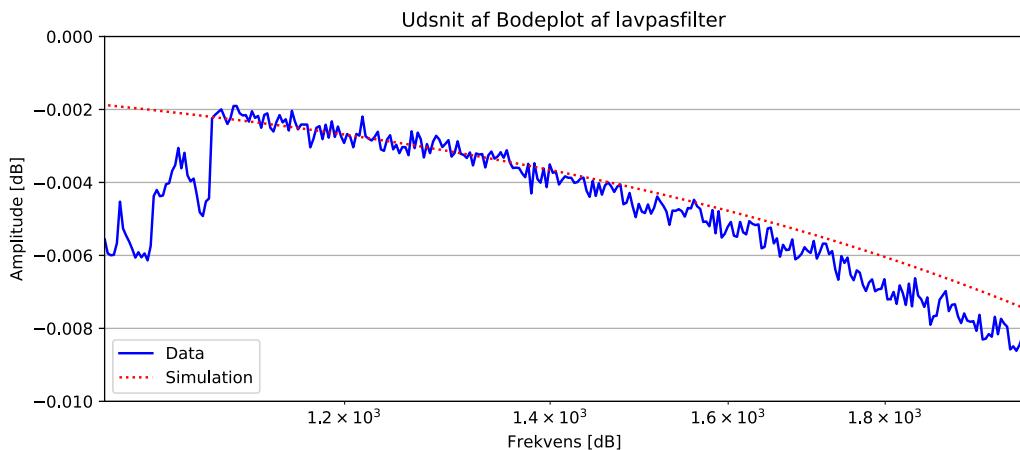
Figur 9.16: Grafer for afvigelse i vinkel mellem teori og forsøg for lavpasfilteret. Øverst i grader, nederst i %.

9.5 Deldiskussion

Forsøget fra Afsnit 9.4, tilsvarende Afsnit 7.5, stemmer overens med teorien bag. I Figur 9.11 og 9.12 ses, at dataen fra forsøget ligger meget tæt på plottet for simuleringen i Python. Den faktiske afvigelse viser dog en stor afvigelse to steder. Især er der en høj procentmæssig afvigelse ved starten af Figur 9.14 og slutningen af Figur 9.13. Afgigelserne er blevet tydeliggjort i Figur 9.17 og 9.18, hvor simuleringen er nærmere 0 dB end plottet for dataen, tilsvarende Afsnit 7.5:



Figur 9.17: Forstørret del af slutningen af Figur 9.12.



Figur 9.18: Forstørret del af starten af Figur 9.11.

Disse procentmæssige afigelser kan der altså ses bort fra, eftersom de faktiske afigelser (i decibel og grader) er relativt små. Da de store relative afigelser ligger langt uden for fokusområdet omkring knækfrekvensen, ser vi også bort fra dem. Der kan være mange grunde til afigelserne. De lave afigelser, vi har i decibel og grader for henholdsvis amplituderne og faseforskydningerne, kan skyldes energitab i ledningerne og de elektriske komponenter (på $\pm 1\%$ for modstanden og $\pm 10\%$ for kondensatoren), som vi ikke kan tage højde for i forsøget.

Kapitel 10

Konklusion

I det første forsøg har vi målt på spændingen over kondensatoren ved jævnstrøm og derefter simuleret det i Python for at se, hvor stor en afvigelse der er mellem forsøget og det teoretiske plot. Følgende er vores teoretiske udtryk, som vi har benyttet til at beregne henholdsvis op- og afladningen af kondensatoren:

$$v_C(t)_{oplading} = v_B(1 - e^{-\omega t}),$$

$$v_C(t)_{afladning} = v_0 \cdot e^{-\omega t}.$$

Ud fra forsøget er afvigelsen, hvor op- og afladningen starter, lige under 100%. Eftersom afvigelsen for alle andre datapunkter på grafen er under 5%, kan vi konkludere, at de matematiske modeller fra teorien stemmer overens med de eksperimentelle data.

For det andet forsøg har vi undersøgt, hvordan høj- og lavpasfiltre fungerer ved bestemte frekvenser ved vekselstrøm og derefter simuleret og vurderet ligesom det første forsøg. Vi kan konkludere ud fra Afsnit 9.3, at et lavpasfilterkredsløb accepterer lavere frekvenser end knækfrekvensen og blokerer højere frekvenser. Et højpasfilterkredsløb blokerer derimod lavere frekvenser end knækfrekvensen og accepterer højere frekvenser. På baggrund af bodeplottet kan vi konkludere, at den relative afvigelse mellem teorien og vores eksperimentelle data for amplituden er forholdsvis stor, fordi teorien kommer så tæt på 0 som muligt. Men fordi vores data ikke kommer helt så tæt på 0, vil det se ud, som om der er rigtig stor afvigelse i procent. De teoretiske udtryk for amplituden for lavpas- og højpasfilter beskrives som:

$$A_{Lavpas}(\psi) = \frac{1}{(1 + (\tau\psi)^2)^{\frac{1}{2}}},$$
$$A_{Højpas}(\psi) = \frac{\tau \cdot \psi}{(1 + (\tau\psi)^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Herudfra ved vi, at forholdet mellem spændningsinputtet og spændningsoutputtet kan beskrives som modulus af overføringsfunktionen:

$$\text{decibel(dB)} = 20 \log_{10} \frac{v_{out}}{v_{in}} = 20 \log_{10}(|H(j\psi)|).$$

Kigger vi derimod på afvigelsen i decibel, er afvigelsen ikke særligt stor, hvorfor vi accepterer vores eksperimentelle værdi i forhold til teorien. For faseforskydningen kan teorien beskrives ud fra følgende:

$$\theta_{Lavpas}(\psi) = -\tan^{-1}(\tau\psi),$$
$$\theta_{Højpas}(\psi) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tau\psi).$$

Kapitel 10

Ud fra det kan vi konkludere, at alle afvigelserne er forholdsvis lave, hvilket gør, at vores teori stemmer overens med vores data fra forsøget. Til slut kan vi altså konkludere, at knækfrekvensen, som er en vigtig faktor i forhold til anvendelsen af lavpasfilterkredsløb og højpasfilterkredsløb, hvilket stemmer rigtig godt overens med teorien fra Afsnit 2.6.1 og vores eksperimentelle data fra Tabel 9.1 og Tabel 9.2.

Litteraturliste

- [1] *An Introduction to Complex Numbers and Differential Equations*. eng. 2. ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2011. ISBN: 9780857764782.
- [2] Frederiksen Scientific A/S. *RC lavpasfiltre*. 136310-RC-Lavpasfilter.pdf, 2017.
- [3] *Bode Plots*. http://www.dartmouth.edu/~sullivan/22files/Bode_plots.pdf, 2004.
- [4] *Capacitive Reactance*. https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter_1.html, 2014.
- [5] S. Sivaji Ganesh. "Lecture notes on Ordinary Differential Equations". eng. I: (2007).
- [6] Corrado Giannantoni. "LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS". eng. I: (1995).
- [7] Alexander Grigorian. "Ordinary Differential Equation - Lecture Notes". eng. I: (2008).
- [8] Tianyi Gu. *Newzoo's Global Mobile Market Report: Insights into the World's 3.2 Billion Smartphone Users, the Devices They Use the Mobile Games They Play*. <https://newzoo.com/insights/articles/newzoos-global-mobile-market-report-insights-into-the-worlds-3-2-billion-smartphone-users-the-devices-they-use-the-mobile-games-they-play/>, 2019.
- [9] Claus Hansen. *De elektriske love*. <https://elbogen.dk/el-love/>, 2019.
- [10] Nikolaj Hess-Nielsen. *Introduktion til Laplace transformen*. http://mikkellhb.dk/FSAE2016/NHess_Laplace.pdf, 2013.
- [11] Scott Hughes. "Lecture 9: Variable currents; Thévenin equivalence". eng. I: (2005).
- [12] R. Mark Nelms J. David Irwin. *Basic Engineering Circuit Analysis*. 11. udg, ISBN-13 978-1-118-53929-3: Don Fowley, 2015.
- [13] Khan Academy. *Laplace as linear operator and Laplace of derivatives | Laplace transform | Khan Academy*. https://www.youtube.com/watch?v=E2VxbufzuWQ&ab_channel=KhanAcademy, 2008.
- [14] Matematikcenter. *Ohms lov*. <https://www.webmatematik.dk/lektioner/eud-matematik/elektriker/ohms-lov>.
- [15] Klaus Fink og Mikael Skånstrøm. *Modelleringskompetence*. <http://mat-didaktik.dk/wp-content/uploads/2018/11/modelleringskompetencen.pdf>, 2017.
- [16] Gabriel Nagy. "Ordinary Differential Equations". eng. I: (2020).
- [17] Grundfos og Økolariet NRGi. *Byg en FixObot*. https://www.okolariet.dk/media/159816/oekolariet_hele-kapitlet-hjaelp-i-hverdagen-2.pdf, 2019.
- [18] Haynes Miller Jeremy Orloff. *The Laplace Transform*. <https://math.mit.edu/~stoopn/18.031/laplace-notes.pdf?fbclid=IwAR02Yfa7NesGlekrmB18Ahn31C2IsNJXrX2b\kPLVu7a7XHgOVoLMkWTMBd4>.
- [19] Jeremy Orloff. *Topic 12 notes - Laplace transform*. <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic12.pdf>.

- [20] *Passive High Pass Filter.* https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter_3.html, 2014.
- [21] *Passive Low Pass Filter.* https://www.electronics-tutorials.ws/filter/filter_2.html, 2014.
- [22] Patrick JMT. *The Inverse Laplace Transform - Example and Important Theorem.* https://www.youtube.com/watch?v=Y8GXpS31CGI&ab_channel=AhmedElSayed, 2011.
- [23] Max Wilken Pedersen. *Matematik* 2. dansk. 1. ed. Esbjerg: Ikke udgivet notesamling, 2015.
- [24] Max Wilken Pedersen. *Matematik* 3. dansk. 1. ed. Esbjerg: Ikke udgivet notesamling, 2016.
- [25] Christopher Essex Robert A. Adams. *Calculus Volume 1* 2. 9. udg. Pearson, 2020.
- [26] W. Chow-D. Wai J. Wang 1 T. Dear J. Chang. "First-Order RC and RL Transient Circuits". eng. I: (2012).
- [27] Peyam Ryan Tabrizian. "MATH 1A - PROOF OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS". eng. I: (2010).

Bilag A

Python Kode

A.1 Op- og afladning af en kondensator

Koden til op- og afladning af en kondensator er på de følgende sider.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.patches as mpatches
4 from numpy import genfromtxt
5 from math import pi
6 from os import path
7
8 #For at python kan finde og gemme dokumenter
9 def sti_til_fil(filnavn):
10     return path.join(path.dirname(__file__), filnavn)
11 #-----
12 #Figur størrelse
13 def fig_size(højde):
14     fig = plt.figure(1)
15     return fig.set_figheight(højde), fig.set_figwidth(10)
16 #-----
17 my_data = genfromtxt(sti_til_fil('op-og-afladning-af-kondensator-
18 resultater.csv'), delimiter=',', names=['TID', 'INPUT', 'OUTPUT'])
#Data hentes fra csv filen waveforms har eksporteret.
19
20 sim_y_val=[]
21
22 ax=plt.subplot(111)
#Plot data
23 plt.plot(my_data['TID'],my_data['INPUT'],label='Input [V]')
24 plt.plot(my_data['TID'],my_data['OUTPUT'],label='Output [V]')
#-----
25
26
27
28
29 #Plot simulation
30 def f(t,R,C):
31     return -1+np.piecewise(t,[t>=0.0,t>=0.0001],[lambda t:2 * (1-
32         np.exp(-1/(R*C)*t)),lambda t:(2 * np.exp(-1/(R*C)*(t-0.0001)))] )
33
34 t=my_data['TID']
35 plt.plot(t,f(t,220,15*10**(-9)),label='Beregnde
36 spænding',linestyle='dashed')
37 ax.set_xlabel('Tid i sekunder')
38 ax.set_ylabel('Spændingen over kondensatoren')
39 ax.set_title('Op og afladning af en kondensator')
40
41 # set the limits
42 ax.set_xlim(-0.00005, 0.00015)
43 ax.set_ylim(-1.2, 2)
44 # set the grid on
```

```
45 ax.grid('on')
46 plt.legend()
47 #-----
48 fig_size(4)
49 plt.savefig(sti_til_fil('op_og_afladning.pdf'),dpi=500)
50 plt.show()
51
52
53 #Plot usikkerhed
54 au=plt.subplot(111)
55 plt.fill_between(my_data['TID'],f(t,220*1.01,
56 (15*10**(-9))*1.1),f(t,220*0.99,
57 (15*10**(-9))*0.9),color='gray',alpha=0.8)
58 plt.plot(t,my_data['OUTPUT'],color='orange',label='Output [V]')
59
60 au.set_xlabel('Tid i sekunder')
61 au.set_ylabel('Spændingen over kondensatoren')
62
63 # set the limits
64 au.set_xlim(-0.00005, 0.00015)
65 au.set_ylim(-1.2, 2)
66
67 # set the grid on
68 au.grid('on')
69
70
71
72
73 # Legends
74 legends, labels=au.get_legend_handles_labels()
75 usikkerhed=mpatches.Patch(color='gray',label='Beregningsmæssig
76 usikkerhed')
77 legends.append(usikkerhed)
78 plt.legend(handles=legends)
79
80
81
82 fig_size(4)
83 plt.savefig(sti_til_fil('op_og_afladning_usikkerhed.pdf'),dpi=500)
84 plt.show()
85
86
87
88
```

```
89 def g(t,R,C):
90     return -1+np.piecewise(t,[t>=0.0,t>=0.0001],[lambda t:2 * (1-
91         np.exp(-1/(R*C)*t)),lambda t:(2 * np.exp(-1/(R*C)*(t-0.0001)))] )
#Der plottes en piecewise funktion. Da begge funktioner starter i
#t=0, forskydes afladningen -10ms, som er den tid afladningen
#begynder ved.
92
93 az=plt.subplot(111)
94 sim_y_val=g(t,220,15*10**(-9))
95
96 afvigelse=np.subtract(my_data['OUTPUT'],sim_y_val)
97 plt.plot(t,afvigelse)
98
99
100
101 az.set_xlim(-0.00005, 0.00015)
102 az.set_ylim(-0.25, 0.25)
103
104 az.set_xlabel('Tid i sekunder')
105 az.set_ylabel('Afvigelse [V]')
106 az.grid('on')
107
108 fig_size(4)
109 plt.savefig(sti_til_fil('afvigelse.pdf'),dpi=500)
110 plt.show()
111 #-----
112 av=plt.subplot(111)
113 av.set_xlim(-0.00005,0.00015)
114 av.set_ylim(0,100)
115 av.set_xlabel('Tid i sekunder')
116 av.set_ylabel('Afvigelse [%]')
117 av.grid('on')
118
119 procent_afvigelse=(afvigelse/sim_y_val)*100
120
121 plt.plot(t,abs(procent_afvigelse))
122 fig_size(4)
123
124 plt.savefig(sti_til_fil('procent_afvigelse.pdf'),dpi=500)
125 plt.show()
```

A.2 Højpasfilter

Koden til Højpasfilter er på de følgende sider.

```
1 import control.matlab as ml
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from numpy import genfromtxt
5 from math import pi
6 from os import path
7 from scipy import signal
8
9
10 #For at python kan finde og gemme dokumenter
11 def sti_til_fil(filnavn):
12     return path.join(path.dirname(__file__), filnavn)
13 -----
14 #Figur størrelse
15 def fig_size(højde):
16     fig = plt.figure(1)
17     return fig.set_figheight(højde), fig.set_figwidth(10)
18 -----
19
20
21 my_data = genfromtxt(sti_til_fil('Højpas
3k.csv'), delimiter=',', names=['FREQ', 'iIN', 'iOUT', 'fase'])
22 #Data hentes fra csv filen waveforms har eksporteret.
23
24
25
26 R=220 #Modstanden
27 C=15*10**(-9) #Kondensatoren
28
29
30
31 #Den teoretiske værdi
32 def teori(w):
33     return 20*np.log10((R*C*2*np.pi*w)/
34                         np.sqrt(((R*C*2*np.pi*w)**2)+1))
35
36 #Faseplot
37 def fase(w):
38     #Der omregnes fra rad til deg med np.degrees()
39     return np.degrees(np.arctan2(1,R*C*2*np.pi*w))
40
41 #Knækfrekvensen-----
42 f_c=1/(2*np.pi*R*C)
43 print(f_c)
44 -----
```

```
46 #Bodeplot-----
47 ax=plt.subplot(211)
48 #ax.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
49 ax.set_ylabel('Amplitude [dB]')
50 ax.set_title('Bode- og faseplot af højpasfilter')
51 ax.grid('on')
52 ax.set_ylim(-35,2)
53
54
55
56 plt.semilogx(my_data['FREQ'],my_data['iOUT'],label='Data',color='blue')
57 plt.semilogx(my_data['FREQ'],teori(my_data['FREQ']),label='Simulation',color='red',linestyle='dotted')
58
59 plt.vlines(f_c,-45,2,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
60 plt.hlines(-3,0,f_c,color='black',linestyle='dashed',label='−3 dB')
61
62 plt.legend(loc='lower right')
63
64
65 #Faseplot-----
66 az=plt.subplot(212)
67 az.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
68 az.set_ylabel('Grader')
69 az.grid('on')
70 az.set_ylim(-1,100)
71 plt.semilogx(my_data['FREQ'],my_data['fase'],color='blue',label='Data')
72 plt.semilogx(my_data['FREQ'],
73     fase(my_data['FREQ']),color='red',linestyle='dotted',label='Simulation')
74
75 plt.vlines(f_c,-2,101,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
76 plt.hlines(45,0,f_c,color='black',linestyle='dashed',label='Faseforskydning (45°)')
77
78 plt.legend(loc='upper right')
79 fig_size(7)
80 plt.savefig(sti_til_fil('Bodeplot_høj.pdf'),dpi=500)
81 plt.show()
82
83 #Zoom-----
```

```
-----  
84 #Bodeplot-----  
85 ax=plt.subplot(111)  
86 ax.set_xlabel('Frekvens [Hz]')  
87 ax.set_ylabel('Amplitude [dB]')  
88 ax.set_title('Udsnit af Bodeplot af højpasfilter')  
89 ax.grid('on')  
90 ax.set_ylimit(-1.5,0.5)  
91 ax.set_xlim(my_data['FREQ'][2000],my_data['FREQ'][3000])  
92  
93  
94  
95 plt.semilogx(my_data['FREQ'],my_data['iOUT'],label='Data',color='blue')  
96 plt.semilogx(my_data['FREQ'],teori(my_data['FREQ']),label='Simulation',color='red',linestyle='dotted')  
97  
98  
99  
100 plt.legend(loc='lower right')  
101 plt.savefig(sti_til_fil('Højpas_zoom.pdf'),dpi=500)  
102 fig_size(3)  
103 plt.show()  
#-----  
-----  
105  
106 #-----  
---  
107  
108 afvigelse=my_data['iOUT']-teori(my_data['FREQ'])  
109 af=plt.subplot(211)  
110  
111 #Afvigelse  
112 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(avfigelse))  
113 af.set_title('Højpas afvigelse [Amplituden]')  
114 #af.set_xlabel('Frekvens [Hz]')  
115 af.set_ylabel('Afvigelse [dB]')  
116 af.grid('on')  
117 plt.vlines(f_c,0,0.35,color='green',linestyle='dashed',label='Knækf  
rekvens')  
118  
119 #Relativ afvigelse  
120 afvigelse_procent=(avfigelse/teori(my_data['FREQ']))*100  
121  
122  
123 ag=plt.subplot(212)  
124
```

```
125 ag.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
126 ag.set_ylabel('Relativ afvigelse [%]')
127 ag.grid('on')
128
129 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse_procent))
130
131 plt.vlines(f_c,-2,500,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
132 fig_size(7)
133 plt.savefig(sti_til_fil('Afvigelse_højpas.pdf'),dpi=500)
134 plt.show()
135
136
137 #-----
138
139
140
141
142 #Afvigelse for faseplot-----
143
144 #Plot af afvigelsen af faseplottet
145
146 #-----
147 afvigelse_fase=my_data['fase']-fase(my_data['FREQ'])
148 #Afvigelsen numerisk
149
150 af=plt.subplot(211)
151
152 #Afvigelse
153 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse_fase))
154 #Den absolutte værdi af afvigelsen plottes i et semilogaritmisk koordinatsystem
155 af.set_title('Højpas afvigelse [Fasen]')
156 #af.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
157 af.set_ylabel('Afvigelse [grader]')
158 af.grid('on')
159 plt.vlines(f_c,0,0.6,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
160
161 #Relativ afvigelse
162 afvigelse_fase_procent=(afvigelse_fase/fase(my_data['FREQ']))*100
163
164 # ((Data-Tabelværdi)/Tabelværdi)*100
165
166
167 ag=plt.subplot(212)
```

```
168 ag.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
169 ag.set_ylabel('Relativ afvigelse [%]')
170 ag.grid('on')
171
172 ag.set_ylim(-1,10)
173 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse_fase_procent))
174
175 plt.vlines(f_c,-2,10,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
176 fig_size(7)
177 plt.savefig(sti_til_fil('Afvigelse_fase_højpas.pdf'),dpi=500)
178 plt.show()
179
180
181
182 print('Så burde det hele være printet :)')
```

A.3 Lavpasfilter

Koden til lavpasfilter er på de følgende sider.

```
1 #import control.matlab as ml
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from numpy import genfromtxt
5 from os import path
6
7 #For at python kan finde og gemme dokumenter
8 def sti_til_fil(filnavn):
9     return path.join(path.dirname(__file__), filnavn)
#-----
11
12 #Figur størrelse
13 def fig_size(højde):
14     fig = plt.figure(1)
15     return fig.set_figheight(højde), fig.set_figwidth(10)
#-----
17
18
19 my_data = genfromtxt(sti_til_fil('Lavpas
3k.csv'), delimiter=',', names=['FREQ', 'iIN', 'iOUT', 'fase'])
#Data hentes fra csv filen waveforms har eksporteret.
21
22 R=220 #Modstanden
23 C=15*10**(-9) #Kondensatoren
24
25
26 #Funktion laver plot af de teoretiske værdier
27 def teori(w):
28     return 20*np.log10(1/np.sqrt(1+(R*C*w*np.pi*2)**2))
29
30
31 #Knækfrekvensen-----
32 f_c=1/(2*np.pi*R*C)
33 print(f_c)
#-----
35
36 #Bodeplot-----
37 ax=plt.subplot(211)
38
39 ax.set_ylabel('Amplitude [dB]')
40 ax.set_title('Bode- og faseplot af lavpasfilter')
41 ax.grid('on')
42
43
44
45 plt.semilogx(my_data['FREQ'],my_data['iOUT'],label='Data',color='bl
```

```
ue')

46 plt.semilogx(my_data['FREQ'],teori(my_data['FREQ']),label='Simulation',color='red',linestyle='dotted')
47
48 plt.vlines(f_c,-45,2,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
49 plt.hlines(-3,0,f_c,color='black',linestyle='dashed',label='-3 dB')
50 plt.legend(loc='lower left')
51
52 #
53 #-----
54
55 #Faseplot værdier udregnes og ændres til grader
56 def fase(w):
57     return -np.degrees(np.arctan(R*C*w*np.pi*2))
58
59 #Faseplot-----
60 az=plt.subplot(212)
61 az.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
62 az.set_ylabel('Grader')
63 az.grid('on')
64 az.set_ylim(-95, 1)
65
66 plt.semilogx(my_data['FREQ'],my_data['fase'],color='blue',label='Data')
67 plt.semilogx(my_data['FREQ'],fase(my_data['FREQ']),color='red',label='Simulation',linestyle='dotted')
68
69
70 plt.vlines(f_c,-100,2,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
71 plt.hlines(-45,0,f_c,color='black',linestyle='dashed',label='Faseforskydning (45°)')
72
73 #
74
75 plt.legend(loc='lower left')
76 fig_size(7)
77 plt.savefig(sti_til_fil('Bodeplot_lav.pdf'),dpi=500)
78 plt.show()
79
80 #Zoom-----
81 ax=plt.subplot(111)
```

```
83 ax.set_ylabel('Amplitude [dB]')
84 ax.set_xlabel('Frekvens [dB]')
85 ax.set_title('Udsnit af Bodeplot af lavpasfilter')
86 ax.grid('on')
87 ax.set_ylim(-0.01, 0)
88 ax.set_xlim(my_data['FREQ'][1],my_data['FREQ'][300])
89
90
91 plt.semilogx(my_data['FREQ'],my_data['iOUT'],label='Data',color='blue')
92
93 plt.semilogx(my_data['FREQ'],teori(my_data['FREQ']),label='Simulation',color='red',linestyle='dotted')
94
95
96
97 plt.legend(loc='lower left')
98 fig_size(4)
99 plt.savefig(sti_til_fil('Lavpas_zoom.pdf'),dpi=500)
100 plt.show()
101 #-----
102
103 #-----
104 afvigelse=my_data['iOUT']-teori(my_data['FREQ'])
105 af=plt.subplot(211)
106
107 #Afvigelse
108 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse),label='Afvigelsen')
109 af.set_title('Lavpas afvigelse [Amplituden]')
110
111 af.set_ylabel('Afvigelse [dB]')
112 af.grid('on')
113 plt.vlines(f_c,0,0.5,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
114 plt.legend(loc='upper left')
115
116 #Relativ afvigelse
117 afvigelse_procent=(afvigelse/teori(my_data['FREQ']))*100
118
119
120 ag=plt.subplot(212)
121
122 ag.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
123 ag.set_ylabel('Relativ afvigelse [%]')
124 ag.grid('on')
125 ag.set_ylim(-1,20)
```

```
126 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse_procent),label='Afvigelsen')
127 plt.vlines(f_c,-1,21,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
128
129 plt.legend(loc='upper left')
130 fig_size(7)
131 plt.savefig(sti_til_fil('Afvigelse_lavpas.pdf'),dpi=500)
132 plt.show()
133
134
135
136
137
138 #Afvigelse for faseplot
139 afvigelse_fase=my_data['fase']-fase(my_data['FREQ'])
140 af=plt.subplot(211)
141
142 #Afvigelse
143 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse_fase))
144 af.set_title('Lavpas afvigelse [Fasen]')
145
146 af.set_ylabel('Afvigelse [grader]')
147 af.grid('on')
148 plt.vlines(f_c,0,5,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
149
150 #Relativ afvigelse
151 afvigelse_fase_procent=(afvigelse_fase/fase(my_data['FREQ']))*100
152
153 ag=plt.subplot(212)
154
155 ag.set_xlabel('Frekvens [Hz]')
156 ag.set_ylabel('Relativ afvigelse [%]')
157 ag.grid('on')
158
159 plt.semilogx(my_data['FREQ'],abs(afvigelse_fase_procent))
160
161 plt.vlines(f_c,-2,20,color='green',linestyle='dashed',label='Knækfrekvens')
162 fig_size(7)
163 plt.savefig(sti_til_fil('Afvigelse_fase_lavpas.pdf'),dpi=500)
164 plt.show()
```